

程 国 采 编 著

弹道导弹制导方法与最优控制



国防科技大学出版社

1007
程 国 采 编 著

弹道导弹制导方法与最优控制

DANDAODAODAN ZHIDAOFANGFA
YU ZUIYOUKONGZHI



628978

内 容 简 介

本书叙述弹道导弹制导方法与最优控制基本理论。内容包括弹道摄动理论、弹道导弹摄动制导方法、显式制导方法、最优控制理论基础及其应用等四部分。综合了近年来国内外有关飞行器制导方法的资料,从理论上和制导方法发展规律上进行了研究。书中包含弹道修正理论、人造卫星摄动理论、利用共轭方程的摄动制导方法、基于求需要速度的显式制导方法和迭代制导方法、最优控制的各种控制方案,并简单介绍了多弹头的制导方法。可以作为自动控制、飞行力学专业本科和研究生教材,可供航天飞行器总体设计、控制系统、航天动力学和飞行试验的科技工作者参考。

弹道导弹制导方法与最优控制

程 国 采 编 著

责任编辑 王金荣

装帧设计 侯 云

国防科技大学出版社 出版

湖南省新华书店发行

国防科技大学印刷厂印装

开本: 787×1092 1/16 印张: 19³/₈ 字数: 442千字

1987年9月第1版 1987年9月第1次印刷 印数: 1—2 500册

统一书号: 15415·021

ISBN 7-81024-005-6

TP·3

定价: 3.25 元

序 言

飞行器制导方法是飞行器控制系统的核心问题，是保证人造卫星、航天飞机进入预定轨道和导弹完成战斗任务的最根本的技术措施。它是在飞行力学、现代控制理论和计算机技术的基础上发展起来的。

本书综合了近 20 年来国内外的有关资料，企图从导弹制导方法的发展过程，从理论上研究导弹的制导方法。作者根据国内外飞行器的特点，研究了各种制导方法以及各种制导方法的特色和相互之间的关联，为航天飞行器总体设计提供了重要的参考资料和理论基础，是航天技术科学工作者，航天控制和航天动力学专业本科和研究生的一本理论性和系统性较强的一本教材。

书中首先叙述了摄动制导理论和摄动制导方法，综合了弹道修正理论和卫星摄动理论，介绍了已经实现的几种制导方法，对各种干扰因素的分析计算方法，中、近程导弹的射表编制，各种摄动制导方法的优缺点及其实现方法都提供了重要的理论基础。

其次综合介绍了几种显式制导方法，论述了各种方法的理论依据、计算方法和物理实质。

最后介绍了现代控制理论的基本理论——庞特里亚金极小原理。介绍了近年来国内外的一个重要技术成果，其目的在于通过此书将运载火箭制导方法的研究向前推进一步，从目前了解的情况来看，系统而全面的叙述飞行器制导方法，本书还是第一次。

本书大量引用了国内外的最新成果，特别是刘衡同志、余梦伦同志、任萱同志等的有关著作，在此表示感谢。

贾沛然副教授和赵汉元副教授认真细致的审阅了全部内容，亦在此表示感谢。

弹道导弹制导方法初次编写成书，书中叙述不当之处，在所难免，希读者不吝赐教，非常感激。

作 者

1987年4月

目 录

第一章 弹道摄动理论

1.1	摄动法的基本思想	1
1.2	用摄动法研究扰动因素对导弹落点偏差的影响	8
1.3	弹道导弹主动段摄动方程的建立	13
1.4	弹体结构参数偏差对主动段弹道的影响	20
1.5	再入段摄动方程及扰动因素的影响	24
1.6	自由飞行段摄动方程的研究	28
1.7	在当地直角坐标系上建立自由飞行段的摄动方程	47

第二章 弹道导弹摄动制导方法

2.1	弹头落点偏差控制的任务及其控制方法	59
2.2	按速度关机的射程控制方案的研究	62
2.3	弹上惯性测速定位原理	64
2.4	按弹纵轴方向视速度关机的射程控制	67
2.5	用补偿方法满足 $\Delta L = 0$ 关机的射程控制	72
2.6	利用共振方程建立 $\Delta L = 0$ 的全补偿关机方程	75
2.7	横向导引和法向导引	80
2.8	惯性平台系统的导航计算	83
2.9	采用惯性平台系统时,按 $\Delta L = 0$ 关机的射程控制	90
2.10	考虑引力加速度的等时偏差时,利用共振方程建立关机方程	96
2.11	捷联系统的综合研究—— P 矩阵制导	99
2.12	完全补偿外干扰的制导系统的研究	105
2.13	再入机动弹头平飞和俯冲段的制导方法的研究	111
2.14	多弹头分导制导方法的研究	116

第三章 显式制导方法

3.1	显式制导的基本思想	124
3.2	远程弹道导弹的显式制导方法介绍	125
3.3	需要速度的概念及其制导方法	132
3.4	远程弹道导弹闭环制导方法研究	134
3.5	地球扁率和再入段空气动力影响的计算和补偿	141
3.6	落点偏差的修正	151
3.7	迭代制导法	155
3.8	E 制导法介绍	164

第四章 最优控制理论及其应用

4.1	引 言	169
4.2	最优控制理论概述——庞特里亚金极小原理简介	170
4.3	大气层外飞行器的拦截、变轨与交会	186
4.4	特征矢量 $\bar{\lambda}_0$ 沿轨道变化特性的研究	191
4.5	脉冲推力作用下的轨道机动	203
4.6	在有限推力作用下空间拦截的最优控制	217

4.7	在有限推力作用下, 两邻近圆轨道交会问题	224
4.8	与沿椭圆轨道运行的卫星交会问题	228
4.9	人造卫星运载火箭推力程序的选择	246
4.10	再入机动弹道的最优设计	252
4.11	动力系统的能控性和能观测性	256
4.12	线性动力系统的能控性和能观测性的基本定理	258
4.13	二次型性能指标的最优控制	262
4.14	再入机动飞行弹的最佳制导	274
4.15	奇异最优控制	280
附录 线性变系数微分方程的补充知识		287
参考文献		302

第一章 弹道摄动理论

1.1 摄动法的基本思想

弹道学介绍了弹的运动特性,给出了在飞行中弹的运动方程和弹道计算方法。从理论上说,如果知道了发射条件,也就是给定了运动方程的一组起始条件,则可以唯一的确定一条弹道。实际上,影响导弹运动的因素是很多的,诸如导弹运动时的环境条件、弹本身的特征参数、发动机和控制系统的特性,都会影响弹的运动特性,所以即使在相同的起始条件下,如果运动时的环境条件(气温、气压、风速等)和导弹本身的特征参数(几何尺寸、重量、外形等的微小偏差)以及发动机和控制系统参数不同,则导弹的运动弹道也不相同。因为:

- (1) 环境气象条件是在不断地发生变化,且是无法预先确定的。
- (2) 由于制造原因,各发弹的弹体特性参数都是不完全相同的,在允许的公差范围内,都有一定的偏差。
- (3) 在进行弹道设计时,空气动力系数是利用模型吹风试验和理论计算的结果,对实际值存在一定的偏差,这些偏差也是无法预知的。
- (4) 发动机推力曲线是根据实验和理论的计算结果,对实际值有偏差,而且在安装发动机时,还会产生安装偏差。
- (5) 控制系统、程序装置等的参数变化,都会偏离设计值。
- (6) 在建立弹道计算方程时,必不可免地要作某些近似假设。

由于这些原因,即使给定了发射条件,也无法预先准确的确定弹的实际运动弹道,事先我们只能给出运动的某些平均规律,设法使实际运动规律对这些平均运动规律的偏差是微小量,那么我们就可以在平均运动规律的基础上,利用小偏差理论来研究这些偏差对弹的运动特性的影响,在炮兵中称这种方法为弹道修正理论,有时也称之为弹道摄动理论。

为了能反映出导弹质心运动的“平均”运动情况,需要作出标准条件和标准弹道方程的假设,利用标准弹道方程在标准条件下计算出来的弹道叫标准弹道。标准条件和标准弹道方程是随着研究问题的内容和性质不同而有所不同。不同的研究内容,可以有不同的标准条件和标准弹道方程,目的在于能保证实际运动弹道对标准弹道保持小偏差。例如,对于近程导弹的标准弹道计算,通常可以不考虑地球旋转和扁率的影响,而对于远程导弹来说,则必须加以考虑。

标准条件可以概括为下面三个方面:

- (1) 地理条件

- 地球形状 (认为是半径为 R 的圆球还是认为是均质椭球体) ;
- 地球旋转 (可以认为不旋转, 或认为以常角速度 $\Omega = 7.2921 \times 10^{-5}$ 弧度/秒旋转);
- 重力加速度 (可以简化为有心力场, 其大小与到地心距离平方成反比, 或将引力势看成是正常引力势函数, 考虑到 J_2 或高于 J_2 的某些项)。

(2) 气象条件

- 认为大气相对地球是静止的 (即认为风速为零);
- 地面气温 (取平均气温, 或取为 15°C);
- 地面大气压力 $p_0 = 10200$ 公斤/米²;
- 地面空气密度 $\rho_0 = 0.125$ 公斤·秒²/米⁴。

(3) 弹道条件

• 弹的几何尺寸、空气动力系数、重量、发动机系统的推力和秒流量、控制系统的放大系数都取实验的平均值;

- 落点和发射点同位于海平面上。

规定了标准条件之后, 还需根据研究问题的内容和性质, 选择某些方程组作为标准弹道方程。例如对近程导弹来说, 标准弹道方程中可以不包括地球旋转项, 而远程导弹, 则必须考虑地球旋转的影响。

在标准条件下, 利用标准弹道方程解出的弹道, 称为“标准弹道”。它反映导弹飞行的“平均运动规律”。对有些问题, 例如导弹初步设计时, 弹体结构参数和控制系统结构参数选择需要提供的运动参量, 只要计算出标准弹道就行了。但对另一些问题, 不仅要知道标准弹道, 而且要比准确地掌握导弹的实际运动规律。例如, 对目标进行射击, 对每发导弹而言, 实际飞行条件与标准飞行条件之间总存在着偏差, 在这些偏差中, 有些在发射之前是已知的, 如果标准条件和标准弹道方程选择得比较恰当, 往往可以使这些偏差是比较小的量, 但即使偏差较小, 在这些偏差影响下, 实际弹道将偏离标准弹道而引起落点偏差, 如果落点偏差大于战斗部杀伤半径, 则达不到摧毁目标的目的。为此需要研究由这些偏差所引起的射程偏差, 并设法在发射之前加以修正或消除, 这就是弹道摄动理论所需要研究的问题。

我们把实际弹道飞行条件和标准弹道飞行条件的偏差叫做“摄动”或称“扰动”。这里所谓的扰动, 与弹在实际飞行中作用在弹上的干扰不同, 这里既包含一些事先无法预知的量, 也包含由于发射条件对所规定的标准条件的偏差。对某一发弹来说, 后者是已知的系统偏差。

以后我们说的“实际弹道”是指在实际的飞行条件下, 利用所选择的标准弹道方程进行积分所确定的弹道。由于运动方程的建立不可避免地有所简化, 故所确定的弹道对弹的实际飞行弹道还是有偏差的。

可以用各种方法来研究“扰动”对弹道偏差的关系。

方法之一是“求差法”。建立两组微分方程, 一组是在实际条件下建立的, 另一组则是在标准条件下建立的, 分别对两组方程求解, 就可获得实际弹道参数和标准弹道参数, 用前者减去后者就得到弹道偏差。此法的优点是不论干扰大小, 都可以这样做, 没有运动稳定性问题。缺点是:

(1) 计算工作量大。

(2) 当扰动比较小时, 用求差法计算, 往往是两个相近的大数相减, 因而会带来较大的计算误差, 要求计算机有较长的字长。

(3) 不便于分析干扰与弹道偏差之间的关系, 在制导问题上, 不便于应用。

方法之二是“摄动法”亦即微分法, 因为在一般情况下, 如果标准条件选择适当, 扰动都比较小, 可以将实际弹道在标准弹道附近展开, 取到一阶项来进行研究, 摄动法实际上也就是线性化法。所以存在有运动稳定性问题^[16]。关于运动稳定性问题可参看文献^[16]。

1.2 用摄动法研究扰动因素对导弹落点偏差的影响

如上所述, 在给定发射条件下的标准弹道应通过目标, 在实际情况下, 由于各种扰动因素的影响, 实际弹道将偏离标准弹道而产生落点偏差。

如图 1.1 所示, O 为发射点, C 为目标点, OKC 为标准弹道, $OK'C'$ 为实际弹道, 其落点为 C' 。则截痕 $\widehat{CC'}$ 为实际弹道的落点偏差。如果近似认为地球是大圆球, 过实际落点 C' 作垂直于标准弹道截痕 OC 的大圆弧 $C'C_1$ 交 OC 于 C_1 , 我们定义

射程偏差 $\Delta L = \widehat{CC_1}$

横程偏差 $\Delta H = \widehat{C_1C'}$

可以看出射程偏差 ΔL 和横程偏差 ΔH 都是等高偏差。

在导弹飞行过程中, 引起落点偏差的扰动因素是很多的, 总的说来可分为两类。

(1) 随机扰动

这一类扰动是由于在飞行过程中飞行条件的随机变化引起的, 在发射之前是无法预先确定的, 由此而引起落点对目标的散布。

(2) 系统扰动

这一类扰动是非随机的, 理论上讲, 在每发导弹发射之前, 应该是可以预先确定的, 但受各种条件的限制, 有时不能确切地掌握扰动的精确值。例如, 起飞重量对标准值的偏差, 从理论上讲是可以预知的, 但由于在野战条件下不可能有庞大的称量装置, 在发射时, 无法测量。又例如从发动机启动到导弹飞离发射台这一段时间内要消耗燃料, 消耗燃料的数量与发动机在非额定工作状态时的工作过程有关, 目前也还不能精确

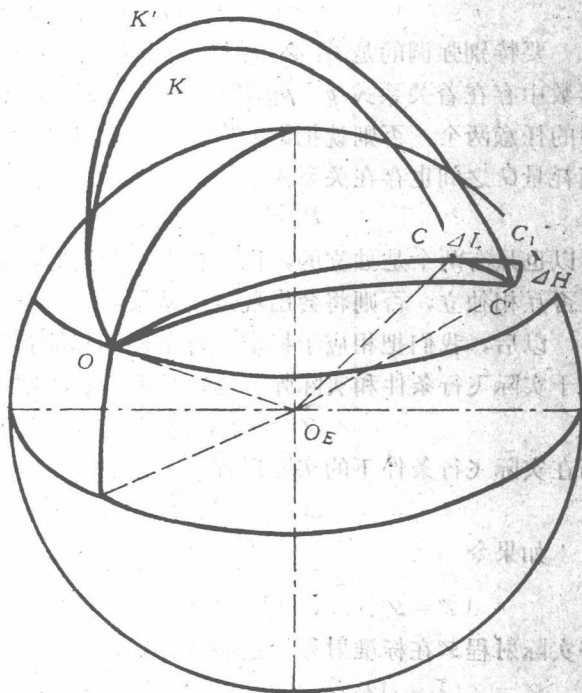


图 1.1 落点偏差示意图

确定在这一段过程中所消耗燃料的重量。虽然有些系统扰动无法精确的在发射前确定,但是我们应创造条件,尽量在发射之前在某一允许的精度范围之内来确定它。例如在发射之前,进行必要的气象测量,测出每发导弹主动段实际飞行时可能的气温、气压、风等气象条件。从而确定它们对标准条件的偏差及由这些扰动因素所引起的落点偏差,并设法加以补偿和修正,其补偿不足部份,作为随机误差来处理。

随机扰动是随机量或随机函数,如果能掌握其统计规律,则可以用数理统计的方法来研究其散布特性,本书不进行研究,可参看文献[5]。

系统扰动的大小与所选择的标准条件有关,在适当选择标准条件时,扰动为小量,可以用摄动法来进行研究。

由于实际射程(包含射程偏差 ΔL 和横程偏差 ΔH) 是实际飞行条件的函数,也就是发射时的实际气温、气压、重力加速度、发动机推力、空气动力系数等一系列参数的函数,如果我们用 λ_i ($i=1,2,3,\dots,n$) 来表示这些参数,用 $\mathcal{L}$ 来表示全射程,则

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (1.1)$$

要特别强调的是 λ_i 必须是互相独立的。例如气温 T 、气压 p 、大气密度 ρ 这三个参数中存在着关系式 $p = \rho g R T$, 因此只有两个是独立的,在 λ_i 中只能包含这三个参数中的任意两个,否则就把影响射程的因素弄重复了。又例如推力 P_0 、比推力 p_{sp_0} 和秒消耗量 $\dot{G}$ 之间也存在关系式

$$P_0 = \dot{G} p_{sp_0}$$

所以也只有两个是独立的,因此在考虑参数时,要特别小心,既要防止遗漏,又要注意是否互相独立,否则将会出现错误结果。

以后,我们把相应于标准飞行条件和标准弹道的参数上面加“ $\sim$ ”号来表示,而相应于实际飞行条件和实际弹道的参数则不加,则在标准条件下的标准射程为

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n) \quad (1.2)$$

而在实际飞行条件下的实际射程为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

如果令

$$\Delta \mathcal{L} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}, \quad \Delta \lambda_1 = \lambda_1 - \tilde{\lambda}_1, \quad \Delta \lambda_2 = \lambda_2 - \tilde{\lambda}_2, \dots, \Delta \lambda_n = \lambda_n - \tilde{\lambda}_n \quad (1.3)$$

将实际射程 $\mathcal{L}$ 在标准射程附近展开, 则

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\tilde{\lambda}_1 + \Delta \lambda_1, \tilde{\lambda}_2 + \Delta \lambda_2, \dots, \tilde{\lambda}_n + \Delta \lambda_n) \quad (1.4)$$

$$= \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \Delta \lambda_i \Delta \lambda_j + \dots$$

故

$$\Delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \Delta \lambda_i \Delta \lambda_j + \dots \quad (1.5)$$

如果标准条件选择恰当, 则 $\Delta \lambda_i$ 是一阶微量, 如果将二阶以上的项略去, 则得

$$\Delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i \quad (1.6)$$

用这样的方法来研究由扰动 $\Delta \lambda_i$ 而引起的射程偏差 $\Delta \mathcal{L}$ 的方法就是摄动法。所以摄动法的实质就是用线性函数来逼近非线性函数, 或者用线性微分方程来逼近非线性微分方程。这就牵涉到运动稳定性问题, 关于运动稳定性问题, 可参看[16], 这里不作介绍。

将非线性问题线性化以后, 有关线性关系的叠加性、放大性就可以得到充分的应用, 给计算带来很大的方便。

摄动法只适用于小干扰的情况, 因此通常要将标准条件和标准弹道方程选择得接近于实际飞行情况, 使扰动量总是保持为微小量, 这样获得的结果才比较精确。

误差系数 $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda_i$ 表示当参数 λ_i 变化一单位时所引起的射程的变化。由于在不同弹道段弹的运动情况不同, 扰动因素也不同, 故可将射程写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{主}}(G_0, \dot{G}, p_{sp0}, \frac{1}{2}\rho s, i, \sigma_a p, \varphi_{pr}, h_0, \dots) + \\ & + \mathcal{L}_{\text{自}}(x_k, y_k, z_k, v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}, t_k) \\ & + \mathcal{L}_{\text{再}}(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda, v_{x\lambda}, v_{y\lambda}, v_{z\lambda}, \frac{1}{2}\rho s, i, \dots) \end{aligned} \quad (1.7)$$

式中 G_0 为起飞重量, $\dot{G}$ 为秒消耗量, p_{sp0} 为真空比推力, ρ 为大气密度, p 为大气压力, s 为弹的特征面, i 为弹形系数, σ_a 为发动机喷管出口端面面积, φ_{pr} 为程序角, h_0 为发射点高度, $x_k, y_k, z_k, x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$ 为关机点和再入点的坐标分量。

$v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}, v_{x\lambda}, v_{y\lambda}, v_{z\lambda}$ 为关机点和再入点的速度分量, t_k 为关机时间。

由于各弹道段是相互连接的, 故各段中扰动因素所引起的射程偏差, 并不是简单的叠加关系。

弹道学中介绍了自由飞行段误差系数及其计算方法。由于在自由飞行段, 弹在飞行中只受重力影响, 故其射程只与主动段终点运动参数有关。

$$\mathcal{L}_{\text{自}} = \mathcal{L}_{\text{自}}(v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}, x_k, y_k, z_k) \quad (1.8)$$

再入段除受重力作用外, 还受空气动力的影响, 因此其射程不仅与起始条件有关, 而且是空气动力系数 (主要是阻力系数), 气象条件和弹头特征参数的函数。但是考虑到再入段起始速度很大, 再入弹道为零攻角弹道, 且再入段的落程在整个被动段的射程中所占比例很小, 故可近似的将再入段弹道看成是自由飞行段弹道的继续, 其射程偏数统一起来计算。

主动段情况比较复杂, 影响弹道的因素很多, 而且运动方程也比较复杂, 其误差系数不能写成解析形式, 只可利用摄动理论或求差法进行计算。主动段各扰动因素影响的结果是引起主动段终点坐标和速度的偏差, 在进行摄动制导方法的研究时, 我们感兴趣的在于主动段终点弹道参数的偏差, 会引起多大的射程偏差。在考虑地球旋转影响时, 可将全射程 $\mathcal{L}$ 写成

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}, x_k, y_k, z_k, t_k) \quad (1.9)$$

将 $\mathcal{L}$ 在标准射程 $\mathcal{L}$ 附近展开, 取第一项, 则

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{xk}} \Delta v_{xk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{yk}} \Delta v_{yk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{zk}} \Delta v_{zk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_k} \Delta y_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_k} \Delta z_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_k} \Delta t_k \quad (1.10)$$

这里的偏导数是全射程偏导数, 包含扰动引起的主动段射程偏差。

如果将落点偏差分解成射程偏差 ΔL 和横程偏差 ΔH , 则

$$\begin{cases} \Delta L = \frac{\partial L}{\partial v_{xk}} \Delta v_{xk} + \frac{\partial L}{\partial v_{yk}} \Delta v_{yk} + \frac{\partial L}{\partial v_{zk}} \Delta v_{zk} + \frac{\partial L}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial L}{\partial y_k} \Delta y_k + \frac{\partial L}{\partial z_k} \Delta z_k + \frac{\partial L}{\partial t_k} \Delta t_k \\ \Delta H = \frac{\partial H}{\partial v_{xk}} \Delta v_{xk} + \frac{\partial H}{\partial v_{yk}} \Delta v_{yk} + \frac{\partial H}{\partial v_{zk}} \Delta v_{zk} + \frac{\partial H}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial H}{\partial y_k} \Delta y_k + \frac{\partial H}{\partial z_k} \Delta z_k + \frac{\partial H}{\partial t_k} \Delta t_k \end{cases} \quad (1.11)$$

注意这里的 L 指在标准弹道射击平面内的射程, 而 (1.9) 式中的 $\mathcal{L}$ 则表示实际射程。

为了研究考虑地球旋转时的全射程偏导数, 如图 1.2, 引入一个不随地球一起旋转的同心球 M , 先研究弹对不动球壳的运动, 然后再将其转换到旋转的地球上。对于不动球壳来讲, 其被动段射程偏导数可直接引用弹道学 (参考文献 [1]) 的结果, 只要进一步找出对旋转地球的射程偏导数和对不动球壳的射程偏导数的关系就行了。

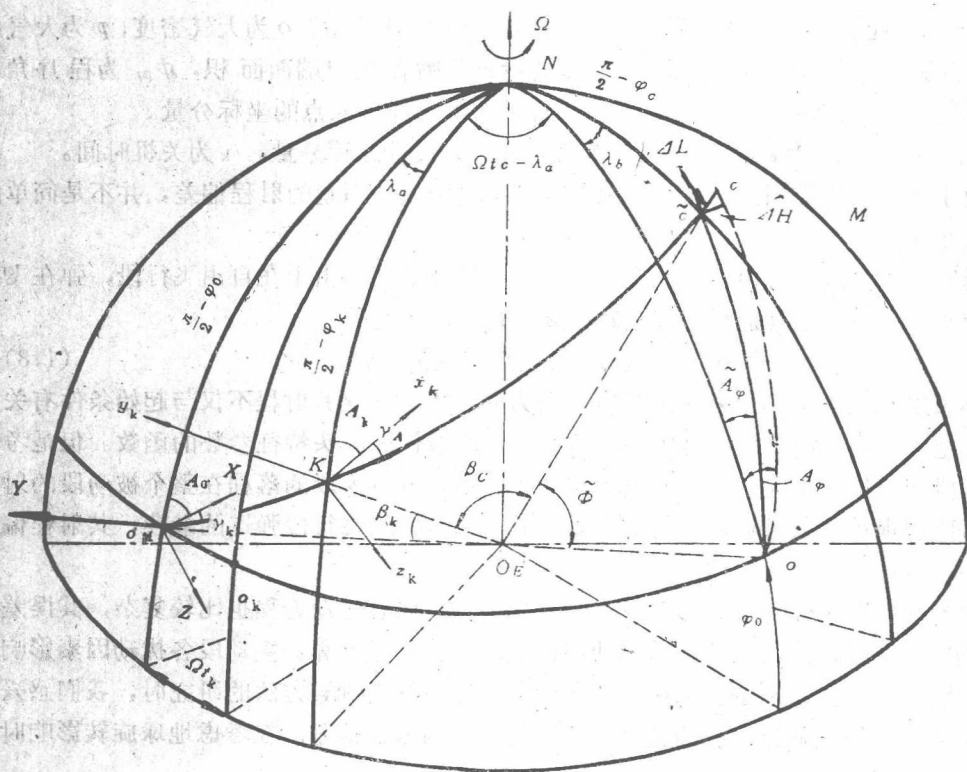


图 1.2 相对弹道和绝对弹道示意图

如图 1.2 选择适当的 R 作半径, 作不随地球旋转的同心球 M , O_M 为在发射瞬间发射点在不动球壳 M 上的投影。 $\bar{c}$ 为在命中瞬间地面目标 (即标准弹道的落点) 在不动球壳上的投影。过 O_M 作发射惯性坐标系 O_MXYZ , 此惯性坐标系起始方位角为 A_0 , O_MY 轴为 O_EO_M 的延长线, O_MX 轴在通过目标 $\bar{c}$ 的绝对弹道平面内垂直于 O_MY , O_MZ 与 O_MX 、 O_MY

成右手坐标系。 K 为标准弹道主动段终点时间 t_k 瞬间主动段终点在不动球壳上的投影。联大圆弧 $O_M K$ ，则 $O_M K$ 为标准弹道主动段的绝对弹道在不动球壳上的投影。设 t_k 瞬间弹在发射惯性坐标系的位置分量为 x_k, y_k, z_k ，速度分量为 v_{xk}, v_{yk}, v_{zk} ， $O_M X$ 与主动段绝对弹道之间夹角为 γ_k 。如果过 k 作当地惯性坐标系 $K x_k y_k z_k$ ， $K y_k$ 为 $O_M K$ 的延长线， $K x_k$ 轴在以 K 点和目标 $\bar{C}$ 所确定的铅垂平面内（即当地射向），方位角为 A_k ，垂直于 $K y_k$ ， $K z_k$ 与 $K x_k, K y_k$ 成右手坐标系。如果设主动段绝对弹道射程角为 β_k ，则 $O_M XYZ$ 与 $K x_k y_k z_k$ 之间的关系如图1.3(a)所示：则

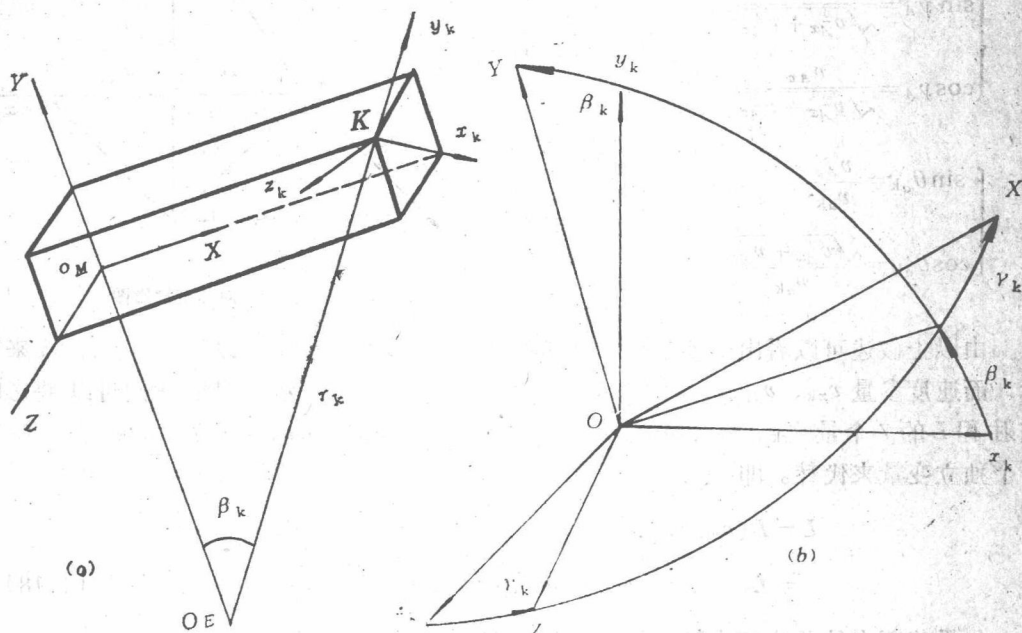


图 1.3 发射惯性坐标系与关机点惯性坐标系关系

$$\begin{cases} \sin \beta_k = \frac{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}}{r_k} \\ \cos \beta_k = \frac{R + y_k}{r_k} \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} \sin \gamma_k = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \\ \cos \gamma_k = \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \end{cases} \quad (1.13)$$

将 K 重合于 O_M 则两坐标系关系如图1.3(b)所示。如果用 $\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k$ ； $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 分别表示两坐标系各轴单位矢量，则

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{y}_k \\ \bar{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_k \cos \gamma_k & -\sin \beta_k & \cos \beta_k \sin \gamma_k \\ \sin \beta_k \cos \gamma_k & \cos \beta_k & \sin \beta_k \sin \gamma_k \\ -\sin \gamma_k & 0 & \cos \gamma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

设 v_{ak} 在当地惯性坐标系 $Kx_k y_k z_k$ 上的分量为 v_{Ax} 、 v_{Ay} 、 v_{Az} 则它们和发射惯性坐标系上的分量 v_{xk} 、 v_{yk} 、 v_{zk} 的关系为

$$\begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ v_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xk} \\ v_{yk} \\ v_{zk} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

设绝对速度 v_{ak} 与当地射击平面的夹角为 γ_A ，由图 1.4 知

$$\begin{cases} \sin \gamma_A = \frac{v_{Az}}{\sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Az}^2}} \\ \cos \gamma_A = \frac{v_{Ax}}{\sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Az}^2}} \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} \sin \theta_{ak} = \frac{v_{Ay}}{v_{ak}} \\ \cos \theta_{ak} = \frac{\sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Az}^2}}{v_{ak}} \end{cases} \quad (1.17)$$

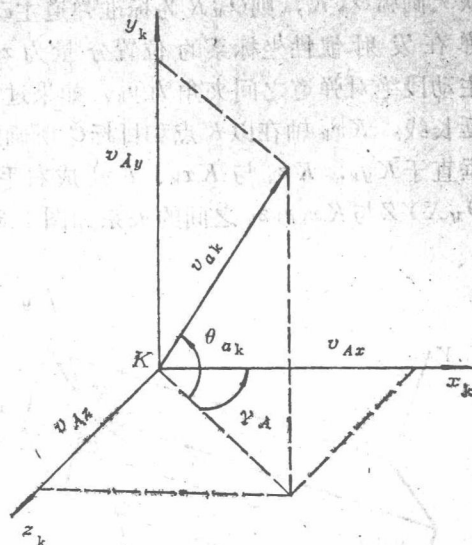


图 1.4 绝对速度投影图

由以上叙述可以看出主动段终点坐标参量 x_k 、 y_k 、 z_k 完全可以用 r_k 、 β_k 、 γ_k 来表示，而速度参量 v_{xk} 、 v_{yk} 、 v_{zk} 完全可以用 v_{ak} 、 θ_{ak} 、 γ_A 来表示，因此我们可以将影响全射程 L 的 7 个量 v_{xk} 、 v_{yk} 、 v_{zk} 、 x_k 、 y_k 、 z_k 、 t_k 用 v_{ak} 、 θ_{ak} 、 r_k 、 β_k 、 γ_k 、 γ_A 、 t_k 等 7 个独立变量来代替。即

$$\begin{aligned} L &= L(v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}, x_k, y_k, z_k, t_k) \\ &= L(v_{ak}, \theta_{ak}, r_k, \beta_k, \gamma_k, \gamma_A, t_k) \end{aligned} \quad (1.18)$$

如果将落点偏差分解成射程偏差 ΔL 和横程偏差 ΔH ，则

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta H \end{bmatrix} &= \frac{\partial [L, H]^T}{\partial v_{xk}} \Delta v_{xk} + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial v_{yk}} \Delta v_{yk} + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial v_{zk}} \Delta v_{zk} + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial x_k} \Delta x_k \\ &\quad + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial y_k} \Delta y_k + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial z_k} \Delta z_k + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial t_k} \Delta t_k \\ &= \frac{\partial [L, H]^T}{\partial v_{ak}} \Delta v_{ak} + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial \theta_{ak}} \Delta \theta_{ak} + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial r_k} \Delta r_k + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial \beta_k} \Delta \beta_k \\ &\quad + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial \gamma_k} \Delta \gamma_k + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial \gamma_A} \Delta \gamma_A + \frac{\partial [L, H]^T}{\partial t_k} \Delta t_k \end{aligned} \quad (1.19)$$

可以利用坐标变换雅可比公式来建立两类射程偏导数之间的关系。

$$\frac{\partial [L, H]^T}{\partial [v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}, x_k, y_k, z_k, t_k]} = \frac{\partial [L, H]^T}{\partial [v_{ak}, \theta_{ak}, r_k, \beta_k, \gamma_k, \gamma_A, t_k]} \cdot M \quad (1.20)$$

$$M = \frac{\partial [v_{ak}, \theta_{ak}, r_k, \beta_k, \gamma_k, \gamma_A, t_k]^T}{\partial [v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}, x_k, y_k, z_k, t_k]} \quad (1.21)$$

为雅可比阵, 由 49 个偏导数组成, 由于其中速度参数 v_{ak} 、 v_{xk} 、 v_{yk} 、 v_{zk} 与坐标参数 x_k 、 y_k 、 z_k 、 r_k 、 β_k 、 γ_k 是线性无关的, 互相间偏导数为零, 故

$$\frac{\partial v_{ak}}{\partial x_k} = \frac{\partial v_{ak}}{\partial y_k} = \frac{\partial v_{ak}}{\partial z_k} = \frac{\partial r_k}{\partial v_{xk}} = \frac{\partial r_k}{\partial v_{yk}} = \frac{\partial r_k}{\partial v_{zk}} = 0$$

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial v_{xk}} = \frac{\partial \beta_k}{\partial v_{yk}} = \frac{\partial \beta_k}{\partial v_{zk}} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial v_{xk}} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial v_{yk}} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial v_{zk}} = 0$$

t_k 与其他运动参数无关, 故

$$\frac{\partial v_{ak}}{\partial t_k} = \frac{\partial \theta_{ak}}{\partial t_k} = \frac{\partial r_k}{\partial t_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial t_k} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial t_k} = \frac{\partial \gamma_A}{\partial t_k} = 0$$

$$\frac{\partial t_k}{\partial v_{xk}} = \frac{\partial t_k}{\partial v_{yk}} = \frac{\partial t_k}{\partial v_{zk}} = \frac{\partial t_k}{\partial x_k} = \frac{\partial t_k}{\partial y_k} = \frac{\partial t_k}{\partial z_k} = 0$$

而 $\frac{\partial t_k}{\partial t_k} = 1$, 其余的 24 个偏导数, 可由 (1.12) 式 ~ (1.17) 式微分求出, 此时

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{ak}}{\partial v_{xk}} & \frac{\partial v_{ak}}{\partial v_{yk}} & \frac{\partial v_{ak}}{\partial v_{zk}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \theta_{ak}}{\partial v_{xk}} & \frac{\partial \theta_{ak}}{\partial v_{yk}} & \frac{\partial \theta_{ak}}{\partial v_{zk}} & \frac{\partial \theta_{ak}}{\partial x_k} & \frac{\partial \theta_{ak}}{\partial y_k} & \frac{\partial \theta_{ak}}{\partial z_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial r_k}{\partial x_k} & \frac{\partial r_k}{\partial y_k} & \frac{\partial r_k}{\partial z_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} & \frac{\partial \beta_k}{\partial y_k} & \frac{\partial \beta_k}{\partial z_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_k} & \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_k} & \frac{\partial \gamma_k}{\partial z_k} & 0 \\ \frac{\partial \gamma_A}{\partial v_{xk}} & \frac{\partial \gamma_A}{\partial v_{yk}} & \frac{\partial \gamma_A}{\partial v_{zk}} & \frac{\partial \gamma_A}{\partial x_k} & \frac{\partial \gamma_A}{\partial y_k} & \frac{\partial \gamma_A}{\partial z_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

其次研究 $N = \frac{\partial [L, H]^T}{\partial [v_{ak}, \theta_{ak}, r_k, \beta_k, \gamma_k, \gamma_A, t_k]}$, 仍然回到图 1.2, 设被动段飞行时间

为 t_o , 则在命中瞬间在地球上的发射点在不动球壳上的投影为 o , 大圆弧 $o\bar{c}$ 是弹在旋转地球上的射程在不动球壳上的投影, 射程角为 Φ 。

此时绝对弹道在不动球壳上的投影为 $O_M \widehat{K} \bar{c}$, 其射程角为 $(\beta_k + \beta_o)$ 。如果适当选择不球壳的半径 R , 则可将弹的射程表示成

$$L = R\Phi \quad (1.23)$$

如果实际弹道落点为 c , 则 $\widehat{c\bar{c}}$ 为落点偏差, 将其分解成 ΔL 和 ΔH , 则

$$\begin{cases} \Delta L \approx R(\Phi - \tilde{\Phi}) \\ \Delta H \approx R \sin \tilde{\Phi} \sin(A_\varphi - \tilde{A}_\varphi) \end{cases} \quad (1.24)$$

由球面三角形 $No\tilde{c}$ (如图 1.5);

$$\begin{cases} \sin \tilde{A}_\varphi = \frac{\cos \varphi_c \sin \lambda_b}{\sin \Phi} \\ \cos \tilde{A}_\varphi = \frac{\sin \varphi_c - \cos \Phi \sin \varphi_0}{\sin \Phi \cos \varphi_0} \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\cos \Phi = \sin \varphi_0 \sin \varphi_c + \cos \varphi_0 \cos \varphi_c \cos \lambda_b \quad (1.26)$$

因为发射点纬度 φ_0 为已知常数, 故

$$\Phi = \Phi(\varphi_c, \lambda_b) \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{\partial [L, H]^T}{\partial [\varphi_c, \lambda_b]} \frac{\partial [\varphi_c, \lambda_b]^T}{\partial [v_{ak}, \theta_{ak}, r_k, \beta_k, \gamma_k, \gamma_A, t_k]} \\ &= \frac{\partial [L, H]^T}{\partial [\varphi_c, \lambda_b]} \cdot N_1 \end{aligned} \quad (1.28)$$

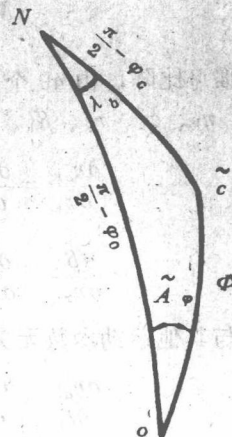


图 1.5 球面三角形 $No\tilde{c}$

式中
$$N_1 = \frac{\partial [\varphi_c, \lambda_b]^T}{\partial [v_{ak}, \theta_{ak}, r_k, \beta_k, \gamma_k, \gamma_A, t_k]} \quad (1.29)$$

由于摄动法是在标准弹道附近展开的, 故其参数均为标准弹道参数, 不再加“~”标号。

由 (1.24), (1.25) 和 (1.26) 式

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial [\varphi_c, \lambda_b]} = \frac{R \partial \Phi}{\partial [\varphi_c, \lambda_b]} = R \left[\frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi_c \cos \lambda_b - \sin \varphi_0 \cos \varphi_c}{\sin \Phi}, \frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi_c \sin \lambda_b}{\sin \Phi} \right] \\ \frac{\partial H}{\partial [\varphi_c, \lambda_b]} = \frac{R \sin \Phi \partial A_\varphi}{\partial [\varphi_c, \lambda_b]} \end{cases} \\ = R \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_c}, \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_b} \right] \\ = \begin{bmatrix} -R \sin \lambda_b \left(\frac{\sin \varphi_c}{\cos A_\varphi} + \frac{\cos \Phi \cos \varphi_c}{\sin \Phi \cos A_\varphi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_c} \right), \\ R \left(\frac{\cos \varphi_c \cos \lambda_b}{\cos A_\varphi} - \frac{\cos \Phi \cos \varphi_c \sin \lambda_b}{\sin \Phi \cos A_\varphi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_b} \right) \end{bmatrix} \\ = R \sin \Phi \begin{bmatrix} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi_c}, \frac{\partial A_\varphi}{\partial \lambda_b} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.30)$$

为了求雅可比阵 N_1 , 需进一步找出落点参数与关机点参数之间的关系, 由图 1.2 上球面三角形 $N\tilde{c}k$ (图 1.6), 令

$$\psi_{\beta c} = A_k + \gamma_A$$

则

$$\sin \varphi_c = \sin \varphi_k \cos \beta_c + \cos \varphi_k \sin \beta_c \cos \psi_{\beta c} \quad |\varphi_c| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \sin(\lambda_b - \lambda_a + \Omega t_o) = \frac{\sin \beta_o \sin \psi_{\beta_o}}{\cos \varphi_o} \\ \cos(\lambda_b - \lambda_a + \Omega t_o) = \frac{\cos \beta_o \cos \varphi_k - \sin \beta_o \sin \varphi_k \cos \psi_{\beta_o}}{\cos \varphi_o} \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\text{故} \begin{cases} \varphi_o = \varphi_o(\beta_o, \psi_{\beta_o}, \varphi_k) \\ \lambda_b = \lambda_b(\beta_o, \psi_{\beta_o}, t_o, \lambda_a, \varphi_o) \end{cases} \quad (1.32)$$

故可令

图 1.6 球面三角形 Nck

$$N_1 = \frac{\partial [\varphi_o, \lambda_b]^T}{\partial [v_{ak}, \theta_{ak}, r_k, \beta_k, \gamma_k, \gamma_A, t_k]} = \frac{\partial [\varphi_o, \lambda_b]^T}{\partial [\beta_o, \psi_{\beta_o}, t_o, \lambda_a, \varphi_k]} \cdot N_2 \quad (1.33)$$

$$\text{式中} \quad N_2 = \frac{\partial [\beta_o, \psi_{\beta_o}, t_o, \lambda_a, \varphi_k]^T}{\partial [v_{ak}, \theta_{ak}, r_k, \beta_k, \gamma_k, \gamma_A, t_k]} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\varphi_o, \lambda_b)^T}{\partial (\beta_o, \psi_{\beta_o}, t_o, \lambda_a, \varphi_k)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \beta_o} & \frac{\partial \varphi_o}{\partial \psi_{\beta_o}} & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_o}{\partial \varphi_k} \\ \frac{\partial \lambda_b}{\partial \beta_o} + \frac{\partial \lambda_b}{\partial \varphi_o} \cdot \frac{\partial \varphi_o}{\partial \beta_o} & \frac{\partial \lambda_b}{\partial \psi_{\beta_o}} + \frac{\partial \lambda_b}{\partial \varphi_o} \cdot \frac{\partial \varphi_o}{\partial \psi_{\beta_o}} & \frac{\partial \lambda_b}{\partial t_o} & \frac{\partial \lambda_b}{\partial \lambda_a} & \frac{\partial \lambda_b}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial \lambda_b}{\partial \varphi_o} \cdot \frac{\partial \varphi_o}{\partial \varphi_k} \end{bmatrix} \quad (1.35) \end{aligned}$$

其中各偏导数可微分 (1.31) 式求得如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \beta_o} = \frac{1}{\cos \varphi_o} (-\sin \varphi_k \sin \beta_o + \cos \varphi_k \cos \beta_o \cos \psi_{\beta_o}) \\ \frac{\partial \varphi_o}{\partial \psi_{\beta_o}} = -\frac{\cos \varphi_k \sin \beta_o \sin \psi_{\beta_o}}{\cos \varphi_o} \\ \frac{\partial \varphi_o}{\partial \varphi_k} = \frac{1}{\cos \varphi_o} (\cos \varphi_k \cos \beta_o - \sin \varphi_k \sin \beta_o \cos \psi_{\beta_o}) \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_b}{\partial \beta_o} + \frac{\partial \lambda_b}{\partial \varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \beta_o} = \frac{1}{\cos(\lambda_b - \lambda_a + \Omega t_o)} \left(\frac{\cos \beta_o \sin \psi_{\beta_o}}{\cos \varphi_o} + \frac{\sin \beta_o \sin \psi_{\beta_o} \sin \varphi_o}{\cos^2 \varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \beta_o} \right) \\ \frac{\partial \lambda_b}{\partial \psi_{\beta_o}} + \frac{\partial \lambda_b}{\partial \varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \psi_{\beta_o}} = \frac{1}{\cos(\lambda_b - \lambda_a + \Omega t_o)} \left(\frac{\sin \beta_o \cos \psi_{\beta_o}}{\cos \varphi_o} + \frac{\sin \beta_o \sin \psi_{\beta_o} \sin \varphi_o}{\cos^2 \varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \psi_{\beta_o}} \right) \\ \frac{\partial \lambda_b}{\partial t_o} = -\Omega \\ \frac{\partial \lambda_b}{\partial \lambda_a} = 1 \\ \frac{\partial \lambda_b}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial \lambda_b}{\partial \varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \varphi_k} = \frac{1}{\cos(\lambda_b - \lambda_a + \Omega t_o)} \frac{\sin \beta_o \sin \psi_{\beta_o} \sin \varphi_o}{\cos^2 \varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \varphi_k} \end{cases} \quad (1.37)$$

