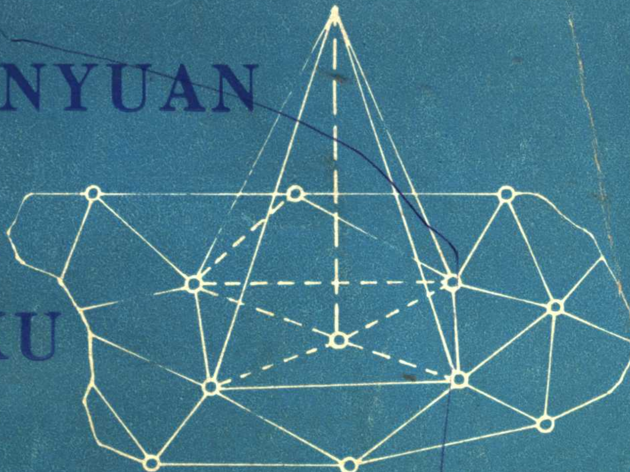
YOUXIANYUAN
JISHU
YU
CHENGXU



甘舜仙 编著

北京理工大学出版社

有限元
技术与程序

有限元技术与程序

甘舜仙　编著

北 京 理 工 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是一本供初学者掌握有限元技术及其在固体力学、传热学和流体力学中应用的参考书，内容完整、易懂，阐述透彻，推导思路清晰，并有一些实例说明。

全书共十章。第一章以通俗的方式介绍变分原理和插值函数，为以后各章打下初步的理论基础。第二至七章以固体力学为背景，系统介绍有限元原理和方法，包括静力分析和动力分析。第八、九章分别介绍传热学和流体力学中的有限元技术。第十章介绍有限元程序，并列有应力分析、温度场分析和流场分析统一的有限元源程序。每章都有思考与练习题。

本书可供高等工科院校热工、机械类专业高年级学生学习有限元技术与程序之用；也可供有关专业研究生和工程技术人员参考。

有限元技术与程序

甘舜仙 编著

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168毫米　32开本　14.75印张　382千字

1988年12月第一版　　1988年12月第一次印刷

ISBN 7-81013-075-7/TH·15

印数1-5000册　　　定价：3.45元

前　言

有限单元法是一种工程数值计算的方法。工程师们长期以来在寻找计算复杂结构问题的方法，过去的力学方法不能直接面向复杂结构。差分法用直交网格，也不能完全适应几何形状以及场变量的变化，边界条件不易处理，难于编制通用程序。而有限单元法直接面向实际复杂结构，把任一形状和不同材料组成的物体划分成许多简单几何形状的单元，在单元内假设近似函数，这些单元的大小可随场变量变化的剧烈程度随意调整。原则上，随着网格的加密或近似函数阶次的提高，有限元的工程数值解将收敛到精确解。不仅如此，有限单元法还有易于处理边界条件、易于编制通用程序等优点。

有限元的发展有赖于计算机的发展。有限元思想可追朔到1943年数学家Courant的工作。他利用三角形单元和最小势能原理研究了St. Venant扭转问题。由于当时计算机尚未出现，他的思想没有结出丰硕果实。直到1956年计算机开始应用，美国Turner、Clough、Martin、Topp等工程师和他们的顾问才将这一思想发展成为矩阵位移法。1960年加利福尼亚大学伯克利分校的Clough把这个新的工程计算法由航空结构工程扩展到土木工程，并正式命名为Finite Element Method。我国冯康教授等把理论和实际结合起来，从1960年前后开始，也独立的创立了系统化的有限元算法，编出了程序，解决了国防上和经济中一些重大的计算课题，并逐步奠定了数学理论基础。从有限元出现的第一天起就立刻受到工程技术界的热烈欢迎。在这个力量的推动下，随着计算机工业的发展，七十年代世界上出现了许多大型通用有限元程序，有限元的应用也逐步扩展到了几乎所有的工程技

术领域。这是有限元发展史上的一个高潮，随后，便处于一个稳步发展的阶段。面对这个形势，英国已故的工程科学家Bruce Irons教授在1980年出版的《Technigies of Finite Element》一书中，高瞻远瞩地指出："Computation is in its infancy"。接着他进一步描述了在计算机高度发展和普及的条件下，未来的数值计算所起的巨大作用。的确，从科学技术发展的长河来看，数值计算还处在幼年时期。事物总是发展的。近些年来有限元发展也证明，位移法有限元还存在不少局限性。麻省理工学院卞学璜教授针对这些问题，从六十年代中期开始，长期坚韧不拔地研究，到八十年代初，终于创造了杂交/混合有限元。我国唐立民教授创造了拟协调元，周天孝高级工程师创造了混合刚度有限元。目前，许多学者在利用有限元的思想进一步创造新的数值计算方法，科学计算已成了和理论、实验并列的第三手段。

现在，我国有限元领域的研究遍地开花，人才济济，许多研究处于世界前列。在有限元通用程序方面，由于我国计算机发展条件的制约，和西方世界比较，还有一段差距。随着我国经济势力的增长，科学技术现代化的迫切需要，这种局面正在逐步改变。

本书在原有教学讲义基础上作了较大的修改和补充，是为初学有限元的高等工科院校有关专业学生和工程技术人员而写的。本书从工程实际的角度出发，以虚功原理、伽辽金法为基础，以有限元法的步骤作为引线，在固体力学有限元法中按单元讲述。首先将杆单元和有限元法的步骤结合在一起；然后把有限元的一些基本内容通过三角形常应变单元来说明；再将其他单元集中在等参数单元一章；并用C^0阶单元和单元积分作了总结和推广。C^0阶单元是有限元的基础，是本书重点，因此作了详细地论述。将梁板壳单元集中在一章，以便说明C^1阶问题。鉴于板壳问题的复杂性，方法很多，目前仍有一些问题没有彻底解决，所以，本书从实用的角度出发只作了概要介绍。上面所述的内容安排避免了完全按结构力学、弹性力学体系论述有限元法带来的重复性。

作者的意图是使读者易于形成有限元法本身的完整概念。作者利用这个思路不仅介绍了大型通用有限元程序中的各种单元，而且便于对有限元法中较深入的问题进行讨论，如降阶积分等；也便于将形函数的讨论逐步深入，最后统一概括；还便于将有限元法推广到动力分析、传热分析和流动分析。本书最后一章用固体、传热和流体统一在一起的二维程序作为全书的结束。这一方面概述了有限元程序，指出了有限元通用程序发展的一个方面；另一方面也是全书有限元系统性的一个有机部分。为了使初学者对有限元的基本原理和方法有较深入的理解，作者编写了适当的例题，每章都有思考与练习。

对于已经学过高等数学、线性代数和有关力学课程的读者，阅读本书将不会遇到困难。要了解本书第十章，必须具备FORTRAN语言知识。

限于作者水平，书中的谬误望读者不吝指教。

本书得以出版要感谢宋国枢高级工程师认真细致地审阅；感谢机械电子部飞行器工程专业指导委员会余超志付教授的热心指导和帮助；感谢责任编辑边淑英同志和原兵器部教材编审组的姚康年同志。

目　录

第一章　变分原理　插值函数

第二章　杆单元——有限元法步骤

第三章　三角形常应变单元

第四章 等参数单元

第五章 C^0 阶单元 单元积分

第六章 梁板壳单元

第七章　动力学问题的有限单元法

第八章　热传导问题的有限单元法

第九章　流动问题有限单元法

第十章　有限元程序

第一章　变分原理　插值函数

变分原理是有限元法的理论基础，分片插值的思想是构造有限元法的思想核心。本章从两种描述法入手，介绍积分的描述方法，引出泛函及其变分；介绍变分问题的直接解法——里兹法；介绍由微分方程建立近似的变分（弱形式）方法的加权余量法，其中伽辽金法普遍适用，精度最高，在传热和流动问题的有限元法中，主要用这种方法来建立变分公式。拉格朗日乘子法和罚函数法是将具有约束条件的变分问题化成无条件变分问题的方法；分部积分在近似的变分方法中起了降低连续性要求的作用，这两方面都设有专节介绍。最后，从数学的角度介绍插值函数。里兹法是全区域插值的方法，有限单元法虽是在里兹法基础上发展的，但是，这种发展是带根本性的。由于它是在小单元上进行插值，因而使复杂几何形状的场问题便易于解决了。有限元的插值函数还有更丰富的内容，将在以后各章详细阐述。

§1.1　两种描述方法

在数学上描述场问题一般有两种方法，一种是微分的方法，另一种是积分的方法。微分描述法中，取微元体描述一点的性态，建立微分方程。这一点的性态适用于除了边界以外的全区域。边界条件一般分三类：第一类规定场变量本身；第二类规定场变量梯度；第三类属于混合型。微分方程进行积分求解，代入这三类边界条件可得到定解。实际上，由于代入边界条件后，很多问题无法求解，因此，发展了积分描述法。在积分描述法中，从全区域出发，建立以积分形式表示的方程，这种方程在力学中多代表

全区域的能量。对这类积分形式的方程进行变分(和微分相当)取它的平稳值，即得问题的解。人们把寻求变分形式的方程，并通过变分求解的原理称为变分原理。变分原理通常是针对积分形式的方程本身来说的。变分原理有两类边界条件：一类称为本质性边界条件，或加强边界条件，这就是微分方程的第一类边界条件，积分形式的方程进行变分后需要另外强加上去；另一类称为自然边界条件，这类边界条件与微分方程的第二、三类边界条件相当，但它可以自然地包含在积分形式的方程中，变分后无需另外加上去。

有限单元法就是建立在积分描述法的基础上。本章从这种描述法出发来阐述有限元法的理论基础——变分原理。

§1.2 泛函及其变分

一、泛函的定义

积分描述法的基本概念是泛函。泛函也是一种"函数"，但它是一种比通常所说的函数有更深内涵的"函数"，这种"函数"的独立变量一般不是通常函数的自变量，而是通常函数本身。这种以函数作为它的独立变量的"函数"称为泛函。为了说明泛函的具体含义，现举三个实例。

例1 如图 1-1(a)所示，在 xy 平面上，AB 两个定点间可以连接出很多条曲线 $y=y(x)$，x 是自变量，y 是独立函数。曲线的长度 L 是随不同的曲线 y 而变的，所以 L 是 y 的"函数"，而 y 又是自变量 x 的函数，所以 L 是一个泛函。由于曲线长度是弧长的积分，所以上述泛函 $L[y]$ 为

$$L[y]=\int_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} ds=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (1-1)$$

这是一种积分的描述法。

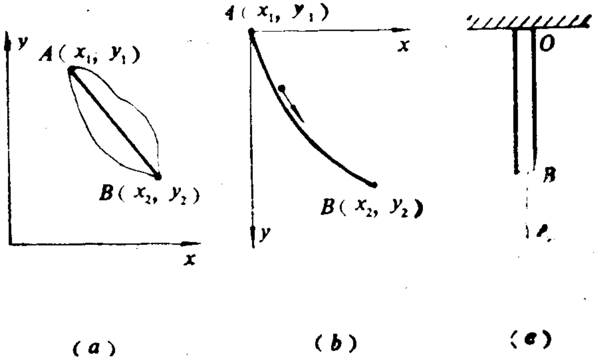


图1-1

例 2 如图 1-1(b)所示，假设在 AB 两定点连成的曲线上有一质点，此质点在重力的作用下，无摩擦地从 A 滑到 B 需要一定的时间 T。T 是随不同的曲线 $y(x)$ 而变的，所以，T 是 y 的"函数"，即 $T=T[y]$，而 y 又是自变量 x 的函数，所以 T 是一个泛函。

设 A 在原点，故质点由 A 滑行到 B 的速度 v 可用 $v=\sqrt{2gy}$ 表示。则滑行弧段长 ds 所需时间 dT 可用下式表示：

$$\mathrm{d}T=\frac{\mathrm{d}s}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

故需要的总时间 $T[y]$ 这样一个泛函为

$$T[y]=\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1-2}$$

这也是一种积分的描述法。

例 3 如图 1-1(c)所示。假设有一根不计自重的弹性杆 OB，长度为 l，断面积为 A、弹性模量为 E，O 端固定在原点，x 轴沿杆的轴线向下，B 端受拉力 p 作用，杆内各点会产生随 x 变化的位移 $u(x)$，因而产生应变 ε 和应力 σ。在线弹性范围内，

定义杆内某点处单位体积的应变能为应变能密度U_0，从0到某个应变ε的$U_0=\int_0^{\varepsilon}\sigma d\varepsilon$。由于$\sigma=E\varepsilon$，所以，应变能密度$U_0=\frac{1}{2}E\varepsilon^2$。又由于$\varepsilon=\frac{du(x)}{dx}$，故杆内总应变能$\pi_0$为

$$\pi_0=\int_V\frac{E}{2}\varepsilon^2 dV=\int_0^l\frac{AE}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

如果考虑到杆的B端（$x=l$）作用力p所作的功$W=(pu)_{x=l}$，则杆的总势能π等于总应变能π_0减去外力功W

$$\pi=\pi_0-W=\int_0^l\frac{AE}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx-(pu)_{x=l} \qquad (1\text{-}3)$$

杆的总势能π是位移u的导数的函数，而u又是自变量x的函数，所以总势能$\pi[u']$是一种泛函。这仍是一种积分的描述法。

这类例子不胜枚举。泛函广泛地存在于数学、物理、力学问题之中。

由上面三个例子可以看出，一个函数对应着泛函的一个数值；另一个函数对应着泛函的另一个数值。这种建立在函数与数值之间的对应关系叫做泛函关系。所以泛函的定义为：

设$\{y(x)\}$是已给的函数集，如果对于这个集合中任一函数$y(x)$恒有某个确定的数与之对应，记为$\pi[y]$，则说$\pi[y]$是定义于集合$\{y(x)\}$上的一个泛函。从这个定义可以看出，泛函有两个基本点：

（1）泛函有它的定义域，这个定义域是指满足一定条件的函数集。这个一定条件是指边界条件、初始条件和函数的连续程度。人们把定义域内的这种函数称为可取函数或容许函数。

（2）泛函$\pi[y]$与可取函数$y(x)$有明确的对应关系。泛函的值是由一条可取曲线的整体性质决定的，它表现在“积分”上。在固体力学中，这种积分往往具有能量性质，所以有时称为能量泛函，如例3所述。

若对泛函提出某种要求，如要求例1中AB曲线长度最短，

要求例 2 中质点从 A 滑到 B 所需时间最短；要求例 3 中杆的总势能最小或在外力作用下平衡，那么，就要对泛函取极值，这时，就要用到泛函的变分 δ。这个变分算符 δ 和微分算符 d 可以进行类比。取函数的微分 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0$，由于 $\mathrm{d}x\neq 0$，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$，便得极值点。类似地，上面三个例子的变分提法为：例 1 是曲线在两端点固定的边界条件下，通过取曲线长度(泛函)的变分为零，即 $\delta L=0$，可求得最短曲线；例 2 是在两端点固定的边界条件下，通过取质点滑过曲线所需时间（泛函）的变分为零，即 $\delta T=0$，可求得最速降线；例 3 是在 O 端固定，B 端受 p 力作用的边界条件下，取杆的总势能（泛函）的变分为零，即 $\delta\pi=0$，可得平衡态下的位移函数。

二、泛函的极值　欧拉方程

假设一个自变量 x，一个独立函数 y 的一般泛函形式如下：

$$\pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{1-4}$$

如图 1-2 所示，若存在过 A、B 两点其一阶导数是连续的极值曲线使上述泛函取极值，求此极值曲线。

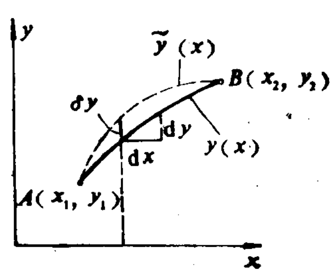


图1-2

设 $y(x)$ 就是欲求的极值曲线，在 $y(x)$ 的近旁构造一类可

取函数 $\tilde{y}(x)$

$$\tilde{y}(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x) \tag{1-5}$$

式中，ε 为与 x 无关的微小参变量；$\eta(x)$为定义在$[x_1, x_2]$闭区间的可微函数，则

$$\tilde{y}'(x)=y'(x)+\varepsilon\eta'(x) \tag{1-6}$$

而且，$\eta(x)$具有下述边界条件

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0 \tag{1-7}$$

这样构造的可取函数 $\tilde{y}(x)$具有三个特点：

（1）由于$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$，所以，在 x_1、x_2 处 $\tilde{y}(x_1)=y(x_1)=y_1$，$\tilde{y}(x_2)=y(x_2)=y_2$，可取函数 $\tilde{y}(x)$都满足边界约束条件，即可取曲线都通过端点。

（2）当 $\varepsilon=0$ 时，由（1-5）式可得 $\tilde{y}(x)=y(x)$，这条可取曲线就是极值曲线。

（3）$\dfrac{d\tilde{y}(x)}{d\varepsilon}=\eta(x)$，通过调整微小参变量 ε 而形成无限多条可取曲线，而 $\tilde{y}(x)$对 ε 的斜率就是 $\eta(x)$，$\eta(x)$便可以任意选定。

由于采用（1-5）式作为可取函数，将此函数代入（1-4）式后，便得以 ε 为参变量的泛函

$$\begin{aligned}\pi(\varepsilon)&=\int_{x_1}^{x_2}F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\,dx\\&=\int_{x_1}^{x_2}F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')dx\end{aligned} \tag{1-8}$$

按照函数展成台劳级数的方法，在 $\varepsilon=0$ 的邻域展开这个泛函

$$\begin{aligned}\pi(\varepsilon)-\pi(0)=&\left(\frac{d\pi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\varepsilon\\&+\left(\frac{d^2\pi(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0}\frac{\varepsilon^2}{2!}+\cdots\end{aligned} \tag{1-9}$$

根据函数取极值的条件，也有泛函的极值条件，即

$$\left(\frac{d\pi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0 \tag{1-10}$$

这个条件也就是

$$\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\ \frac{d\tilde{y}}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\ \frac{d\tilde{y}'}{d\varepsilon}\right)dx\right]_{\varepsilon=0}=0$$

式中，F代表式（1-8）或式（1-4）的被积函数。

由于 $d\tilde{y}/d\varepsilon=\eta$，$d\tilde{y}'/d\varepsilon=\eta'$，且 $\varepsilon=0$ 时，$\tilde{y}=y$，所以上式变成

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx=0 \qquad (1\text{-}10\,a)$$

将此式第二项进行分部积分(关于分部积分见§1.7)，式(1-10 a)变为

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)dx+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2}$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)dx=0$$

由式（1-7）得

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)dx=0 \qquad (1\text{-}10\,b)$$

因为$\eta(x)$在两端点间为任意函数，所以根据变分法中的基本引理[7]，由式（1-10 b）得

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (1\text{-}11)$$

这就是著名的欧拉-拉格朗日方程，简称欧拉方程。将式(1-4)中的被积函数F代入此方程，可得比F中的一阶导数高一阶的二阶常微分方程。解此方程可得极值函数$y(x)$。

定义 $$\delta y=\tilde{y}(x)-y(x) \qquad (1\text{-}12\,a)$$

δy为y的变分。

应特别指出，δy是在$\delta x=0$，即x一定的条件下，两条函数曲线上，两点函数值之差，如图 1-2 所示。它和 dy 不同，dy 是在不同x处，同一函数曲线上，两点函数值之差。由此也可以知道 $\delta x=0$。这是变分和微分在概念上的不同之处。但在运算上和微分类似。变分有下列运算法则：

$$
\left.\begin{aligned}
&\delta(xy)=x\delta y\\
&\delta(uv)=u\delta v+v\delta u\\
&\delta(y')=(\delta y)'\\
&\delta y^{(n)}=ny^{(n-1)}\delta y\\
&\delta\int F\mathrm{d}x=\int\delta F\mathrm{d}x
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}12\,b)
$$

利用 δy 也可以导出欧拉方程（1-11）式。因为 $\delta y=\tilde{y}-y$，$\delta y'=\tilde{y}'-y'$，所以式（1-4）的被积函数可写成 $F(x,y+\delta y,y'+\delta y')$。在任一 x 处，将被积函数 F 展成台劳级数，得

$$
F(x,y+\delta y,y'+\delta y')
=F(x,y,y')+\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\cdots\right]
$$

所以

$$
\delta F(x,y,y')=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\cdots
$$

由
$$
\delta\pi=\delta\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\delta F(x,y,y')\mathrm{d}x
$$

得
$$
\delta\pi=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\cdots\right)\mathrm{d}x
$$

忽略高阶小量，并将第二项进行分部积分得

$$
\delta\pi=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{x_1}^{x_2}
$$

由于在 x_1、x_2 处 $\delta y=0$，所以

$$
\delta\pi=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x
$$

根据泛函取极值的必要条件 $\delta\pi=0$，以及 δy 的任意性，同样可得欧拉方程式(1-11)

$$
\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0
$$

这也说明了式(1-10)的 $\left[\frac{\mathrm{d}\pi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=0$ 和 $\delta\pi=0$ 是一致的。