学数学解题方法

解析法

董安冬

四川教育出版社

解　析　法

董　安　东

四川教育出版社
1990·成都

责任编辑：刘　玲

封面设计：何一兵

中学数学解题方法　　　　解析法

四川教育出版社出版发行　　　　（成都盐道街三号）

四川省新华书店经销　　　成都前进印刷厂激光照排印刷

开本 787×960 毫米　1/32　印张　3.25 字数　50 千

1990 年 2 月第一版　　　1991 年 8 月第二次印刷

印数：5151—12150 册

ISBN7—5408—1214—1/G·1183　　定价：0.97 元

内容提要

本书介绍了中学数学中常用的解题方法——解析法，包括其基本内容，解析法的各种应用（平面几何、解析几何中的应用），并通过大量实例说明了运用解析法解题的一般思路。

本书主要供中学生课外阅读，也可作为广大教师和青年的参考读物。

前　言

《中学数学解题方法》丛书是根据目前中学数学教学的实际而组织编写的，旨在帮助中学生扩大数学知识面，增强深广度，掌握好解题的"钥匙"。

这套丛书将系统介绍中学数学中基本的解题方法，包括《数学归纳法》、《几何变换法》、《待定系数法》、《判别式法》、《反证法》、《分析法》、《换元法》、《复数法》、《递推法》、《解析法》、《参数法》、《图解法》等十二种。

就全书体系和结构而言，丛书是以"方法"为主线，以近现代数学的基本思想为指导，纵向贯穿中学数学的主要内容，横向总揽各方法中的典型实例，力求在纵横有机结合的基础上帮助读者拓宽解题思路，培养分析和运用方法的能力，从而提高数学思维的素质。

该丛书的编写注意突出了以下几点：

1. 以方法成书。每册书全面系统地介绍了一种

方法的基本理论及各种具体的运用，着重阐述了一种方法常用于解决哪几类问题，在什么情况下使用这种方法，以及一般采用的思维方式，等等。

2. 方法的介绍力求科学性与趣味性的统一。定义、定理、公理的表述，一是符合近现代数学的基本理论，二是与全国统编教材基本吻合。对方法的理论依据均作了较为浅显的说明，并将生动性和趣味性融合于实例中，以达深入浅出，事半功倍效果。

3. 例题的选择注重了典型性、灵活性、启发性，有助于培养逻辑思维，抽象思维以及发散思维，求同、求异思维等。

这套丛书的作者均是高级数学教师，有着丰富的教学和科研经验，作为他们多年来辛勤劳动的结晶奉献给广大中学师生和数学爱好者，将使他们感到最大的欣慰。

编辑出版这套丛书，是我社根据教育体制改革及教学实际要求进行的尝试探索，不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编　者

1988.10

目录

解析法的意义

随着数学的演变和发展，现今我们解答几何问题，除了用传统的几何方法外，还可用解析法. 掌握解析法，就会如虎添翼，使几何问题得到更合理、更简捷的解答. 为了说明问题，还是从一个熟知的定理谈起.

切割线定理　从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项.

已知：如图 1 所示，点 P 是⊙O 外一点，PT 是切线，T 是切点，PA 是割线，点 A、B 是它与⊙O 的交点.

求证：$PT^2=PA\cdot PB$.

证明：连结 TA、TB.

$$\left.\begin{array}{l}\angle BPT=\angle TPA\\ \angle BTP=\angle A\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow\triangle BPT\backsim\triangle TPA$

$\Rightarrow PB:PT=PT:PA$

$\Rightarrow PT^2=PA\cdot PB.$

图 1

另证：以⊙O为原点，切点T与O的连线为y轴，$TP \parallel Ox$如图2建立直角坐标系.

设圆的方程为$x^2+y^2=r^2$. ……………………………… (1)

设P点的坐标为(m,r).

过P点的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=m+t\cos\theta, \\ y=r+t\sin\theta. \end{cases} \qquad (2)$$

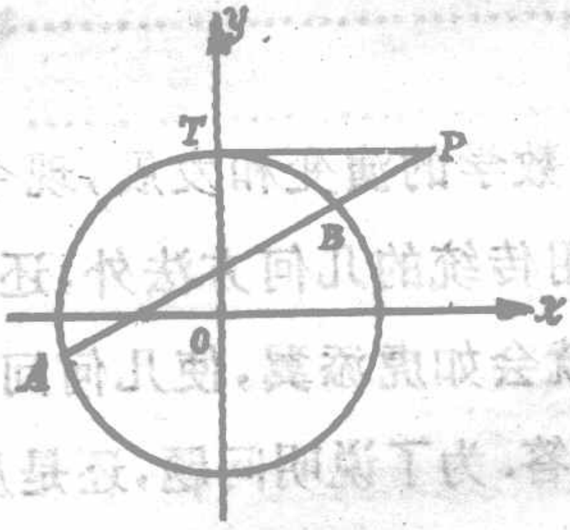

图 2

将(2)代入(1)得

$$(m+t\cos\theta)^2+(r+t\sin\theta)^2=r^2.$$

整理，得 $t^2+2t(m\cos\theta+r\sin\theta)+m^2=0.$

由t的几何意义和韦达定理得：

$$|PB|\cdot|PA|=|t_1||t_2|=|t_1\cdot t_2|=m^2=|PT|^2.$$

故定理得证.

通过以上两种证法，我们可以看出，第一种证法就是传统的证明方法，但需添加辅助线. 第二种证法则是通过坐标系的建立，把几何图形的有关问题，转化为有关点的坐标以及有关曲线的方程的数量关系问题，然后用代数方法加以解决. 后者可不添(或少添)辅助线. 这种方法实际上架设了几何与代数之间的桥梁，使"数"和"形"在一定条件下互相转化，使许

多几何方面的问题可以用代数的方法来解决，这就是17世纪法国数学家笛卡尔创设的解析法. 本书将对此方法进行深入细致的研究，从而使一些有关平面图形的问题得以简便解决.

所谓“解析法”，就是坐标法. 它是通过引进适当的坐标系（直角坐标系、极坐标系等），把几何图形的有关问题，化为关于点的坐标的数量关系问题，再用代数方法来解决.

平面几何的内容是研究线段和圆的问题，所以，我们完全可以用解析法来研究平面几何中的问题. 运用解析法的关键是选择坐标系，这直接影响到解题的繁简. 一般说来，选定的坐标系总是要使图形上点的坐标尽量简单以及此后代数式的运算简便.

通常使用的坐标系是平面直角坐标系和极坐标系. 此外还要善于利用平面解析几何的基本公式：两点间的距离公式，定比分点公式，三角形与四边形面积公式，斜率公式，直线方程，圆方程及椭圆、双曲线、抛物线的方程和性质等.

解析法的应用(一)
——平面直角坐标系

一、证线段相等

用解析法证线段相等，应首先选择恰当的平面直角坐标系，然后求出有关点的坐标，再利用两点间的距离公式、点到直线的距离等知识.

例1 证明：三角形中位线等于底边的一半.

已知：$\triangle ABC$ 中，D、E 分别为 AB、AC 的中点.

求证：$DE=\frac{1}{2}BC$.

分析：用解析法证明本题，首先应建立平面直角坐标系. 对于选择坐标系，有如下几种思考方法：

(1)可以在平面上任取一点，过这一点作互相垂

直的直线为坐标轴，建立直角坐标系；

(2)可以以$\triangle ABC$的任一顶点为坐标原点，其一边所在的直线为x轴，建立直角坐标系，这样可以简化两个点的坐标(x轴上的纵坐标为零，y轴上的横坐标为零)；

(3)可以取$\triangle ABC$的某一边的中点为坐标原点，这一边所在直线为x轴(或y轴)建立直角坐标系。这样可以使$\triangle ABC$的两个顶点为对称点，即这两个顶点的横(纵)坐标互为相反数；

(4)以$\triangle ABC$的某一边及这边上的高为坐标轴(垂足为原点)，建立直角坐标系。

我们选择坐标系的目的，是使数和形对应起来，并且使坐标简化，这样才会使证明过程简捷。

本题以$\triangle ABC$的一个顶点为原点，一边所在直线为x轴建立直角坐标系。则$\triangle ABC$各顶点的坐标可表示出来。利用两点间的距离公式，本题即可得证。

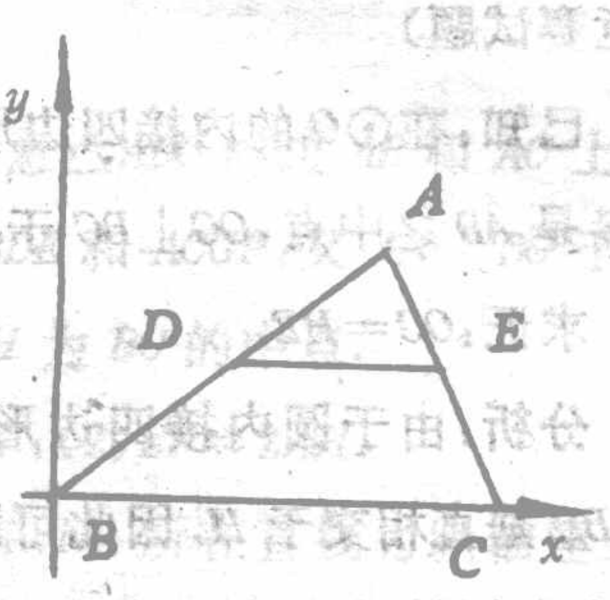

图 3

证明：以B为原点，BC所在直线为x轴建立直

角坐标系(图 3). 设 $C(c,0)$、$A(m,n)$，则 D、E 的坐标分别为 $D(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$，$E(\frac{c+m}{2},\frac{n}{2})$，且 $B(0,0)$.

$$\therefore |DE|=\sqrt{\left(\frac{c+m}{2}-\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\right)^2}=\frac{c}{2}.$$

又 $|BC|=c$，　　$\therefore |DE|=\frac{1}{2}|BC|$.

评注：本题若用几何法证明，则需添加辅助线，不仅加大难度，而且增加运算量(参见全国统编教材初中平几一册 P_{195} 三角形中位线定理). 本题也可以按(3)、(4)种方法选择坐标系加以证明. 请读者自己完成.

例 2　求证：若圆内接四边形两条对角线互相垂直，则从对角线的交点到一边中点的线段长等于从圆心到这一边的对边的距离.(上海市 1978 年数学竞赛试题)

已知：在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$ 于 H，E 是 AD 之中点，$OG\perp BC$ 于 G.

求证：$OG=HE$.

分析：由于圆内接四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 垂直相交于 H. 因此可以 H 为坐标原点，BD、AC 为坐标轴建立直角坐标系(如图 4). 写出 $ABCD$ 各顶点的坐标，求出 O、E 的坐标. 由中点坐标、垂径定理和两点间距离公式，本题即可得证.

证明：如前所述，记 A、B、C、D 的坐标为 $A(a,0)$、$B(0,b)$、$C(c,0)$、$D(0,d)$，则 $E\left(\frac{a}{2},\frac{d}{2}\right)$、$O\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right)$.

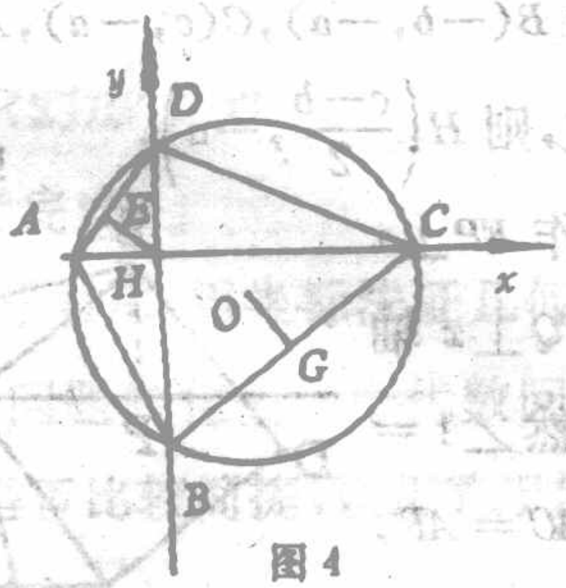

图 4

又 $OG\perp BC$ 于 G，则 $G\left(\frac{c}{2},\frac{b}{2}\right)$.

$$\therefore |OG|=\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}-\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2},$$

$$|HE|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

$\therefore OG=HE$.

例 3　已知：在任意$\triangle ABC$的边 AB 和 AC 上，分别向形外作正方形 $ABDE$ 和 $ACGF$，又 $AN\perp BC$ 于 N，延长 NA 交 EF 于 M，H 为 BC 的中点.

求证：(1)$EM=MF$；(2)$EF=2AH$.

分析：以 A 为原点，NA 所在直线为纵轴建立直角坐标系. 由 B、C 的坐标求出 E、F 的坐标，本题即可得证.

证明：如图 5 建立直角坐标系. 记 B、C、A 的坐

标分别为 $B(-b,-a)$,$C(c,-a)$,$A(0,0)$,其中 a、b、c 均为正数,则 $H\left(\frac{c-b}{2},-a\right)$.

(1)作 $EP\perp x$ 轴于 P,$FQ\perp x$ 轴于 Q. 显然 $\angle 1=\angle 2$,又 $AC=AF$,所以 $Rt\triangle AFQ\cong Rt\triangle ACN$.

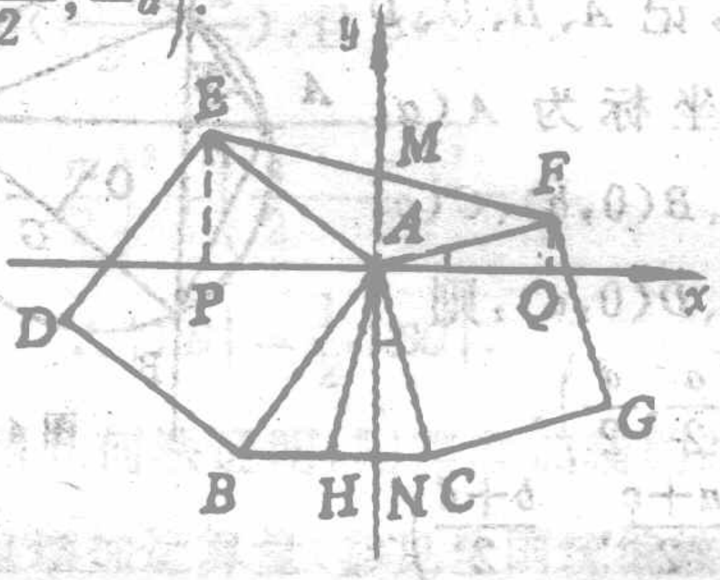

图 5

$\therefore\ |NC|=|FQ|=c$, $|AQ|=|AN|=a$.

同理可证,$Rt\triangle AEP\cong Rt\triangle ABN$,则

$|EP|=|BN|=b$, $|AP|=|AN|=|AQ|=a$,

$\therefore E(-a,b)$,$F(a,c)$.

故 EF 的中点坐标为$\left(0,\frac{b+c}{2}\right)$,即 y 轴要经过 EF 的中点. 所以

$EM=MF$.

(2)由 $A(0,0)$,$H\left(\frac{c-b}{2},-a\right)$,$F(a,c)$,得

$$|AH|=\sqrt{\left(\frac{c-b}{2}\right)^2+a^2},$$

$$|EF|=\sqrt{4a^2+(c-b)^2}.$$

$\therefore EF=2AH$.

评注:若题目条件不变,只改变结论,以下结论

仍然成立：

(1)$BF=EC$； (2)$BF\perp EC$.

(证明留给读者完成)

从上面几个例子看出，用坐标法证几何题，关键是设法把一个几何问题转化为一个代数问题，确定解题思路，但运算是否比较简捷，还依赖于坐标系的选择.

二、 证角相等

用解析法证角的相等(含一个角是另一个角的和、差、倍、分等问题)主要是利用直线斜率的定义. 首先，分别求出夹这两个角的边所在直线的斜率，再利用直线夹角公式得到这两个角的正切值相等，最后在某一单调区间内加以判断. 证明一个角是另一个角的和、差、倍、分，需要利用和(差)角的正(余)切及倍角公式.

例 4 已知 D 为等腰直角三角形的腰 AC 的中点，$CE\perp BD$，交 BD、BA 于 E、F. 求证：$\angle ADF=\angle CDB$.

分析：以 CA、CB 为坐标轴建立平面直角坐标系. $\triangle ABC$ 各顶点的坐标为已知. 由中点公式求出点 D 的坐标，通过求出 BD、DF 的斜率即可得证.