大学数学复习指导丛书

名校 名师 名作

高等数学复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯 黄先开
曹显兵 施明存 编著

清华大学出版社

大学数学复习指导丛书

高等数学复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯　黄先开
曹显兵　施明存　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书的宗旨是帮助读者全面、系统地复习高等数学的内容，深入理解基本概念和基本理论，学习和掌握解题方法及解题技巧；追求的目标是通过对解题方法和技巧的分析，使读者能举一反三、触类旁通。本书每章均有一些读者想掌握、易掌握但尚未掌握或根本不知道的方法和技巧，例如，一些类型的极限的求法；有关微分中值定理命题的证明；定积分、重积分有关命题的证明；不等式的证明；无穷级数求和的方法；常微分方程中积分因子的求法等，均介绍了读者见所未见的新方法和新技巧。按当前考试特点及命题的发展趋势修订的本书，将更适合广大读者，尤其是考研应试者的需要。

本书可作为本科生、大专生、电大、夜大、职大生的参考书，也可作为青年教师和科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学复习指导：思路、方法与技巧/陈文灯等编著.—北京：清华大学出版社，2003
(大学数学复习指导丛书/陈文灯主编)
ISBN 7-302-06547-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 027071 号

出 版 者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑：陈仕云
印 刷 者：北京大中印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×1092　1/16　**印张**：39.5　**字数**：905 千字
版　　次：2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-06547-0/O・294
印　　数：0001～5000
定　　价：48.00 元

前　言

高等数学是理工科高等学校最重要的基础理论课之一。本课程注重使学生系统地获得微积分、级数及常微分方程的基础理论知识和常用的运算方法，培养学生具有比较熟练的分析问题和解决问题的能力，为学习后继课程奠定必要的数学基础。

本书对高等数学中普遍存在的疑难问题指出了解题思路、方法和规律，注重对解题的思路、方法进行分析和介绍，旨在指导读者掌握各种解题技巧和规律，从而做到快速轻松解题。本书自 1992 年 3 月问世以来，深受广大读者的欢迎和支持。根据读者的要求及多年来我们教学经验的积累，这次再版新增加了多种最新的解题思路和方法。

本节的特点：

(1) 对重要的概念、定理、公式进行剖析，增强了读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性及错用公式、定理的错误。同时通过一些概念题的错误与正确的两种解法的比较和对照，加深读者对概念的理解和记忆。

(2) 各章内容从基本概念、基本理论、基本方法的介绍入手，同时以大量题型为例，进行错解分析和难题解题技巧分析，指导读者在正确理解概念的基础上掌握各种解题方法和技巧。

(3) 以题型为纲深入分析探究，总结出解题方法与技巧，使读者胸有成竹，有“法”可依，有“路”可循。

(4) 用“举题型讲方法”的格式代替各书普遍采用的“讲方法套题型”的方法，使读者做题时思路畅通、有的放矢。

(5) 广泛采用表格法，使读者对要点一目了然，记忆深刻。

本书主要针对高等院校在读本科生，对于电大、夜大生，专科生也很有参考价值，尤其对参加考研和参加专升本的考生具有“指点江山”的作用。

本书由陈文灯主编，黄先开、施明存、曹显兵、殷先军、寇业富参与编写部分章节。

由于作者的水平有限，书中不当之处在所难免，敬请读者和数学同仁批评指正。

作者

2003.6

目　　录

第1章　函　　数

1.1　基本概念

1.1.1　函数的定义

设有两个变量 x 和 y，x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的规律都有一个确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

并称 x 为自变量，y 为因变量，变域 D 为函数的定义域，而称因变量的变域为函数的值域.

函数概念的两个要素：定义域和对应关系.

两个函数当且仅当定义域和对应关系均相同时才表示同一函数，否则，它们表示两个不同的函数.

例 1.1　在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

(1) $y=x^0$ 与 $y=1$　　(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

(3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$　　(4) $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$

[解]　(1) $y=x^0$ 的定义域为 $x\neq 0$；$y=1$ 的定义域为 $(-\infty,\infty)$，故该组的两个函数不等价.

(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $x\geqslant 0$；$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为全数轴，故该组的两个函数也不等价.

(3) 所给两个函数的定义域均为 $x\neq 0$，且对应关系也相同，故该组的两个函数等价.

(4) $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为 $\begin{cases} x-3\geqslant 0 \\ x-2>0 \end{cases}$ 即 $x\geqslant 3$

而 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$ 的定义域为 $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-2}\geqslant 0 \\ x-2\neq 0 \end{cases}$ 即 $x\geqslant 3$ 或 $x<2$

故两函数不等价.

例 1.2　在下列各组函数中，找出两函数等价的一组：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$　$(x\neq 1)$

(2) $y=\log_2(x-1)+\log_2(x-2)$ 与 $y=\log_2(x-1)(x-2)$

(3) $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

(4) $y=x$ 与 $y=\sin(\arcsin x)$

读者经思考后可作出明确回答.

评注 函数的表示只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，这个性质很重要(参看1.4节有关内容).

1.1.2 函数的定义域与值域

1. 定义域

根据实际问题建立的函数的定义域，就是具有实际意义的实自变量值的集合；由解析式子表示的函数的定义域，就是使运算有意义的实自变量值的集合.

2. 定义域的求法

首先要熟悉下列简单函数的定义域：

$y=\dfrac{1}{x}$，定义域为 $x\neq 0$；

$y=\sqrt[2n]{x}$，定义域为 $x\geqslant 0$；

$y=\log_a x$，定义域为 $x>0$；

$y=\sin x$ 或 $\cos x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

$y=\tan x$，定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in z$；

$y=\cot x$，定义域为 $x\neq k\pi,k\in z$；

$y=\arcsin x$ 或 $\arccos x$，定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

例 1.3 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$

(2) $y=\sqrt{\arcsin x+\dfrac{\pi}{4}}$

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\lg(16-x^2)$

(4) $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$

[解]

(1) $\begin{cases}16-x^2>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4<x<4\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases} \Rightarrow 1<x<2$ 及 $2<x<4$

(2) $\begin{cases}\arcsin x+\dfrac{\pi}{4}\geqslant 0\\ |x|\leqslant 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1$

(3) $\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\ 16-x^2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2n\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi+\pi\\ -4<x<4\end{cases} \quad (n=0,\pm 1,\cdots)$

$\Rightarrow -4<x\leqslant -\pi$ 及 $0\leqslant x\leqslant \pi$

(4) $\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0\\ 2x-1>0\\ \lg(2x-1)\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ x>\dfrac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{2}<x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$

3. 函数值域的求法

配方法，这是一种主要方法，比较常用；判别式法；通过求反函数的定义域借以达到求原函数的值域；利用微积分法；利用三角函数的性质.

例 1.4 求下列函数的值域：

(1) $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+17$　　(2) $y=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$

(3) $y=2-\sqrt{3x^2-10x+9}$　　(4) $y=\dfrac{x+1}{x+2}$

(5) $y=3-2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(6) $y=\arcsin\dfrac{2}{x-3}$

(7) $y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x+3}$　　(8) $y=2^x-2^{2x}+1$

[解]　(1)应用配方法,则

$$\begin{aligned}y&=[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]+17\\&=(x^2-5x+5-1)(x^2-5x+5+1)+17\\&=(x^2-5x+5)^2+16\end{aligned}$$

故 $y\in\left[\dfrac{281}{16},+\infty\right)$

(2)应用配方法或判别式法,将原式改写为

$$2yx^2-4yx+3y-5=0$$

而 $$\Delta=(-4y)^2-8y(3y-5)\geqslant 0$$

故 $$y(y-5)\leqslant 0,\text{即 } 0\leqslant y\leqslant 5$$

显然 $y\neq 0$,可知 $y\in(0,5]$.

(3)应用配方法,则

由于 $$y=2-\sqrt{3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}$$

故 $$y\in\left(-\infty,2-\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$$

(4)应用反函数法,当 $x\neq -2$ 时,由原式可知

$$xy+2y=x+1,\text{即 } x=\frac{1-2y}{y-1},\quad y\neq 1$$

由此得 $$y\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

(5)应用反函数法,由原式可知　$x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3-y}{2}+\dfrac{\pi}{12}$

其定义域为 $$\left|\frac{3-y}{2}\right|\leqslant 1\quad\text{或}\quad |y-3|\leqslant 2$$

故 $$y\in[1,5]$$

(6)应用反函数法,由原式可知　$x=3+\dfrac{2}{\sin y}$

其定义域为 $$y\neq n\pi,\quad n\in z$$

又因 $$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$$

故 $$y\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

(7)利用三角函数的性质,则原式 $=1-\dfrac{6}{\sin x+3}$

由于　$-1\leqslant\sin x\leqslant 1,\quad 2\leqslant\sin x+3\leqslant 4$

于是 $\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{\sin x+3}\leqslant\frac{1}{2}$

故 $1-\frac{6}{2}\leqslant y\leqslant 1-\frac{6}{4}$， 即 $y\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$

(8)原式 $=\frac{5}{4}-\left(2^x-\frac{1}{2}\right)^2$

故
$$y\in\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$$

例 1.5 已知 $f(x)=\frac{4x-a}{x^2+1}$，a 为实常数.

(1)当 $f(x)$的极大值为 1 时，问 a 的值如何?

(2)当 a 取(1)所确定的值时，求 $f(x)$的值域.

［解］ (1)$f'(x)=-\frac{4x^2-2ax-4}{(x^2+1)^2}$

令 $f'(x)=0$，得
$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+16}}{4}$$

故
$$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4},\quad x_2=\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4}$$

又
$$f''(x)=\frac{2(4x^3-3ax^2-12x+a)}{(x^2+1)^3}$$

经计算得
$$f''(x_1)<0,\quad f''(x_2)>0$$

故
$$f(x_1)=\frac{4x_1-a}{x_1^2+1}$$

为极大值，由此可得 $\frac{4x_1-a}{x_1^2+1}=1$， 即 $4x_1-a=x_1^2+1$

将 $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}$代入，可知 $a=3$.

(2)当 $a=3$ 时，$f(x)=\frac{4x-3}{x^2+1}$

将 $a=3$ 代入 x_1,x_2 的表达式，可知当 $x=2$ 时，$f(x)$有极大值 1. 当 $x=-1/2$ 时，$f(x)$有极小值 -4.

又因 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{x^2+1}=0$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{x^2+1}=0$

故 $f(2)=1$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$ 分别是 $f(x)$的最大值和最小值，因此 $f(x)\in[-4,1]$.

例 1.6 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$，求其值域.

［解］ 因为$|\sin t|$是以 π 为周期的连续函数，
所以 $f(x)$可能也是以 π 为周期的函数.

事实上
$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=u+\pi} \int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(\pi+u)|\,\mathrm{d}u$$
$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u=f(x)$$

因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数,故只需讨论在$[0,\pi]$上的情况(如图 1-1 所示).

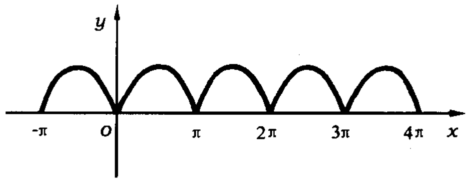


图 1-1

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$$

令　　$f'(x)=0$,得驻点 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t\xlongequal{\text{由图像知}}2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}$$

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=1$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t\xlongequal{\text{由图像知}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=1$$

由此可知,$f(x)$ 的最大值为$\sqrt{2}$, 最小值为 $2-\sqrt{2}$,故

$$f(x)\in[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

1.1.3　反函数的定义

设给定一个函数 $y=f(x)$,其值域为 $\mathbf{R}$,如果对于一个 $y\in\mathbf{R}$,由方程 $y=f(x)$可惟一确定一个 x 值,则称变量 x 为变量y 的函数,记作

$$x=\varphi(y)$$

称为 $y=f(x)$的反函数.

习惯上,$y=f(x)$的反函数通常记作

$$y=f^{-1}(x)\quad\text{或}\quad y=\varphi(x)$$

评注

(1)$y=f(x)$的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$的图像重合;而 $y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2)只有一一对应的函数才有反函数.例如 $y=x^2$ 没有反函数;但当 $x\geqslant0$ 时,$y=x^2$ 有反函数$y=\sqrt{x}$.

反函数的求法步骤:

第一步:把 x 从方程$y=f(x)$中解出;

第二步:把从第一步得到的表达式中的 x 与 y 对换,所得结果就是要求的$y=f(x)$的反函数.

例 1.7　求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$　　(2) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$　　(3) $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$

［解］ (1)当 $x\neq 0$ 时,将原式变形为

$$y(10^{2x}-1)=10^{2x}+1+(10^{2x}-1)\quad 即\quad (y-2)10^{2x}=y$$

解得
$$x=\frac{1}{2}\lg\frac{y}{y-2}$$

故反函数为
$$y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{x-2}$$

(2)当 $x\neq -1$ 时,将原式变形为

$$\frac{y-1}{2}=\sin\frac{x-1}{x+1}\quad 即\quad \frac{x-1}{x+1}=\arcsin\frac{y-1}{2}$$

解得
$$x=\frac{\arcsin\dfrac{y-1}{2}+1}{1-\arcsin\dfrac{y-1}{2}}$$

故反函数为
$$y=\frac{\arcsin\dfrac{x-1}{2}+1}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}$$

(3)当 $x\geqslant -\dfrac{1}{4}$ 时,将原式变形为

$$y(1+\sqrt{1+4x})=1-\sqrt{1+4x}\quad 即\quad \sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y}$$

解得
$$x=-\frac{y}{(1+y)^2}$$

故反函数为
$$y=-\frac{x}{(1+x)^2}$$

1.1.4 分段函数的定义

在定义域内,如果对应于不同的区间,函数有着不同的表达形式,则称这样的函数为分段函数.一般来讲,分段函数不是初等函数,但也有个别例外,例如

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

既可看作分段函数,又可看作初等函数.

常见的几个分段函数:

(1) y 是 x 的最大整数部分,记为　$y=[x]$

(2)符号函数　$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当\ x>0\\ 0, & 当\ x=0\\ -1, & 当\ x<0\end{cases}$

两个函数的图形如图 1-2、1-3 所示.

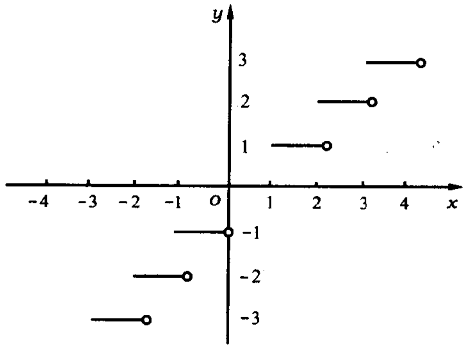


图 1-2

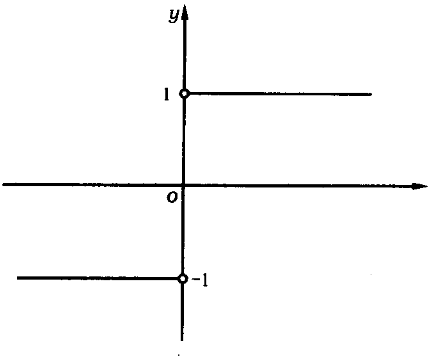


图 1-3

(3)狄利克莱(Dirichlet)函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

① 该函数虽难以画出,但有如下特征:它是偶函数.事实上,当 x 为有理数时,$-x$ 也是有理数,故 x 和 $-x$ 所对应的函数值都为1,两者相等,即 $f(x)=f(-x)$;而当 x 为无理数时,$-x$ 也是无理数,且 $f(x)=0=f(-x)$,故该函数为偶函数.

② 任何有理数 l 皆为其周期.事实上,当 x 为有理数时,$x+l$ 也是有理数,故 $f(x)=1=f(x+l)$;当 x 为无理数时,$x+l$ 也是无理数,故 $f(x)=0=f(x+l)$.可见 l 为 $f(x)$ 的周期.

例 1.8 求下列函数的反函数:

(1) $f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$;

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$

[解] (1)由 $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -(1+x^2), & x<0\end{cases}$

解得
$$x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1\\ 0, & y=0\\ -\sqrt{-(y+1)}, & y<-1\end{cases}$$

故反函数为
$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1\\ 0, & x=0\\ -\sqrt{-(x+1)}, & x<-1\end{cases}$$

(2)由 $y=\begin{cases}x^2-1, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$

解得
$$x=\begin{cases}\sqrt{1+y}, & \text{当 } -1\leqslant y\leqslant 0\\ -\sqrt{y}, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

故反函数为
$$y=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 0\\ -\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

1.1.5 复合函数的定义

设函数 $y=f(u)$，其定义域为 U，而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 D. 如果 $D\subseteq U$，则对于 X 内的每一个 x 值经过中间变量 u，相应地得到惟一确定的一个 y 值. 则称变量 y 通过中间变量 u 而成为 x 的复合函数. 记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

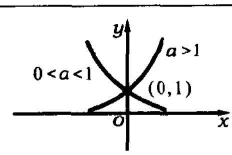
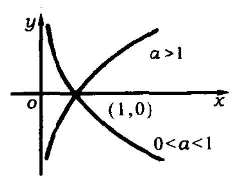
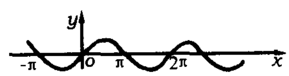
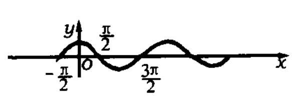
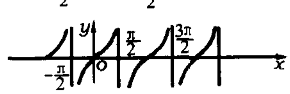
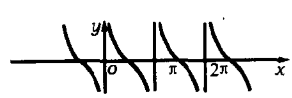
评注 中间变量 u 作为函数时的值域 D 应包含在它作为自变量时的定义域 U 内，这一条件是必不可少的.

例如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$，就不能构成复合函数 $y=\arcsin(x^2+2)$，这是因为 $D=\{u\mid 2\leqslant u<+\infty\}$ 不包含于 $U=\{u\mid -1\leqslant u\leqslant 1\}$ 之中.

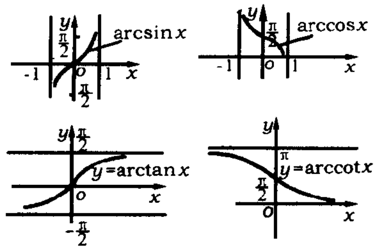
1.1.6 五个基本初等函数

如表 1－1 所示.

表 1－1

函数名称	定义域	值 域	图 像	基本关系式
幂函数 $y=x^{\mu}$	随 μ 的不同而不同	随 μ 的不同而不同		
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$		
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$		
三角函数 $y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		$\sin(\arcsin x)=x$ $(\lvert x\rvert\leqslant1)$
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		$\cos(\arccos x)=x$ $(\lvert x\rvert\leqslant1)$
$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $n\in z$	$(-\infty,+\infty)$		$\tan(\arctan x)=x$ $x\in\mathbf{R}$
$y=\cot x$	$x\neq n\pi$ $n\in z$	$(-\infty,+\infty)$		$\cot(\mathrm{arccot}\, x)=x$ $x\in\mathbf{R}$

续表

函数名称	定义域	值　域	图　像	基本关系式
反三角函数				
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		$\arcsin(\sin x)=x$ $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$		$\arccos(\cos x)=x$ $x\in[0,\pi]$
$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		$\arctan(\tan x)=x$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\mathrm{arccot}\,x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$		$\mathrm{arccot}(\cot x)=x$ $x\in(0,\pi)$
三个恒等式	$a^{\log_a x}=x$,	$\arcsin x+\arccos=\frac{\pi}{2}$,	$\arctan x+\mathrm{arccot}\,x=\frac{\pi}{2}$	

1.2　函数的基本性质

1.2.1　函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在 X 上有定义,如果$\exists M>0$,使得对于一切 $x\in X$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 X 上有界,否则称 $f(x)$无界.例如 $y=\sin x,\cos x,\arctan x,\mathrm{arccot}\,x$ 均为有界函数.事实上,

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2},\quad |\mathrm{arccot}\,x|\leqslant\pi,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

评注　函数 $f(x)$的有界与无界是相对于某个区间而言的.例如 $y=f(x)=1/x$ 相对于区间$(0,1)$是无界的,而相对于区间$[0.001,2]$却是有界的.

1.2.2　函数的单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 X 上有定义,如果对于$\forall x_1,x_2\in X$,不妨设 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$在 X 上是单调增加的(或单调减少的);若恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$或$(f(x_1)\geqslant f(x_2))$,则称 $f(x)$在 X 上是单调不减的(或单调不增的).

1.2.3　函数的奇偶性

设函数 $f(x)$在 X 上有定义,如果对于$\forall x\in X$,恒有 $f(x)=f(-x)$,则称 $f(x)$为偶函数;如果对于$\forall x\in X$,恒有 $f(x)=-f(-x)$,则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数 $f(x)$的图像关于 y 轴对称;奇函数 $f(x)$的图像关于坐标原点对称.

评注

(1)判别给定函数的奇偶性,主要是根据奇偶性的定义.

(2)记住关系式 $f(x)+f(-x)=0$,是判别 $f(x)$为奇函数的一种有效方法.

(3)函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数必不是奇、偶函数.例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

就不具有奇偶性.

(4)常见的偶函数有 $\cos x$,x^{2n}(n 为正整数);奇函数有 $\sin x$,$\tan x$,$1/x$,x^{2n+1}(n 为正整数).

(5)判别函数的奇偶性常用的一些性质:

①两偶函数之和是偶函数;两奇函数之和是奇函数.

②两奇(或偶)函数之积(当分母不为零时之商)是偶函数.

③一奇函数与一偶函数之积(当分母不为零时之商)是奇函数.

例 1.9 判别下列函数的奇偶性:

(1)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　(2)$y=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$　$(a>0)$

(3)$y=\begin{cases}x(1-x), & x\geqslant 0\\ x(1+x), & x<0\end{cases}$　　(4)$y=F(x)\left[\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right]$

其中 $a>0,a\neq 1,F(x)$为奇函数.

[解] (1)令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,则

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln(-x^2+x^2+1)=0\end{aligned}$$

故该函数为奇函数.

(2)令 $f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$,则

$$f(-x)=(-x)\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\frac{1-a^x}{1+a^x}=x\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x)$$

故该函数为偶函数.

(3)令 $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x\geqslant 0\\ x^2+x, & x<0\end{cases}$

当 $x\geqslant 0$ 时　$f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x=-f(x)$

当 $x<0$ 时　$f(-x)=-(-x)^2-x=-x^2-x=-f(x)$

故该函数为奇函数.

(4)令 $f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,则

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{a^x-1}-\frac{a^x}{a^x-1}+1=0$$

可知 $f(x)$为奇函数,又因 $F(x)$为奇函数,故 $y=F(x)f(x)$为偶函数.

例 1.10 设函数 $f(x)$连续,则在下列函数中,必为偶函数的是 [　　].