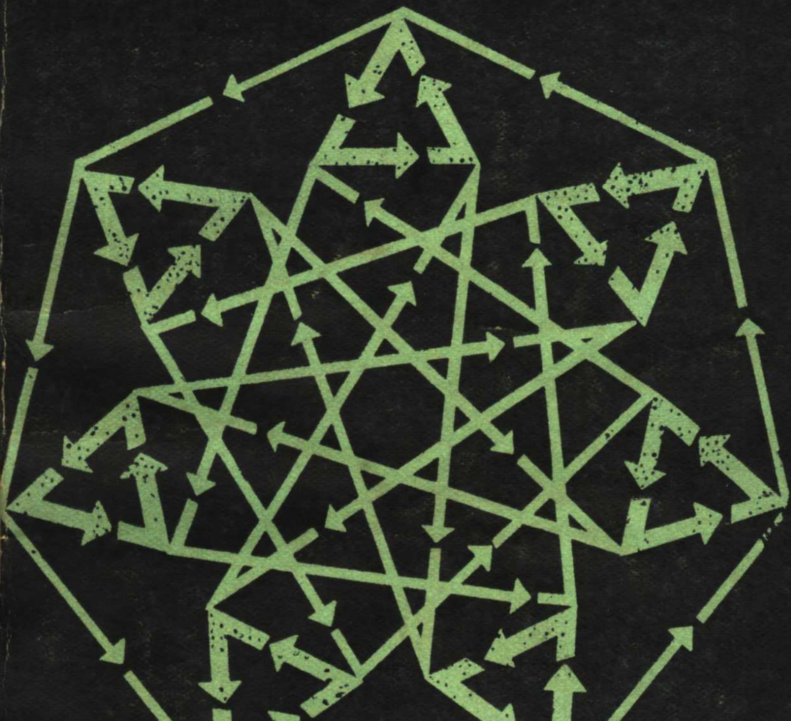
〔美〕 I. 格罗斯曼
W. 迈格努斯 著

群和它的图象表示



科学普及出版社

群和它的图象表示

〔美〕I. 格拉斯曼　W. 迈格努斯　著

胡　复　唐　松　译

科 学 普 及 出 版 社

内 容 提 要

群论是现代数学的一个重要分支，它是研究代数方程、几何变换以及拓扑学和数论问题的强有力工具；在物理学、化学、结晶学、图案设计等其他领域中都有应用. 但由于群论概念的高度抽象性以及它在其他研究领域的深刻应用，难以向群众作通俗介绍；本书由于引进了群的几何形象——群的图象，因而把抽象群具体化、形象化了，较为通俗，已被译成多种文字.

本书涉及群的几种定义法、子群、正规子群、四元数群、置换群、对称群、交代群、道路群等，可供高中及大学学生及有关研究人员参考.

GROUPS AND THEIR GRAPHS

by

I. GROSSMAN W. MAGNUS

* * *

群和它的图象表示

〔美〕I. 格拉斯曼 W. 迈格努斯 著

胡复 唐松 译

封面设计：窦桂芳

*

科学普及出版社 出版（北京白石桥紫竹院公园内）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国科学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：6 3/4 字数：154 千字

1981 年 2 月第 1 版 1981 年 2 月第 1 次印刷

印数：1—10,500 册 定价：0.58 元

统一书号：13051·1162 本社书号：0192

序　　　言

中小学学生常有这种观念，认为数学仅仅涉及数和测量．然而，数学不只是应用于象记账和换钱等活动的定量科学；它和逻辑及结构也有深刻的关系．

群论是数学中重要的非定量的分支之一．在数学发展过程中，群的概念虽然产生较晚，但已经获得许多成果．比如说，它已是研究代数方程和几何变换以及拓扑学和数论问题的强有力的工具．

群论有两个显著的特点，一个是它的概念的高度抽象性，另一个是它在其他研究领域中有着深刻的应用．由于只有在数学上相当成熟才能掌握这类抽象概念，只有在理论经过长时期的广泛发展之后才能看到这种实际应用，并且只有通晓其他领域的学生才能掌握这种应用，因此，群论的学习通常都要推迟到学生的数学教育的后期．

对于仅仅学过初等数学的学生，是否也可以学习一点群论的知识呢？也是可以的．本书的目的就在于对这类读者作一介绍．为了克服抽象化所带来的困难，我们引进了群的几何形象——群的图象．这样可以把抽象群具体化，变成对应于群的结构的可见模型．但是，这只不过是为了使读者便于理解我们讲述的定理和概念，而不是打算把它当成进一步阅读和学习的读者提供一个掌握有关数学概念的代用品．

我们承认，我们不能总是用“实际”应用来启发读者．归根到底，我们需要介绍的是数学内容本身．当然，学习的动力还是来自读者，这也是他们自已应该做的贡献．

目　　录

第一章　群　的　引　言

群论在十八世纪末始具雏型. 十九世纪初，它仍发展缓慢，没受到什么重视，其后，在1830年前后的几年里，通过伽罗华（Galois）和阿贝尔（Abel）关于代数方程的可解性的工作，群论向前大大跃进了，并对整个数学的发展作出了重大贡献.

从那时起，群论中的许多基本概念被精心提炼出来并且推广到许多数学分支. 群论在各种不同的领域(象量子力学、结晶学及纽结理论)中都有了应用.

本书主要讨论群及其图象表示. 我们的第一个任务就是要阐明“群”是什么意思.

通往群的概念的基本思想是结构(或范型). 下面读者就会看到，列举的一些例子和解释，定义和定理，都可以看成是一个基本主题的各种变化：群及其图象是如何体现并说明一种数学结构的.

虽然现在我们已经用了“群”这个字，却没有告诉读者它的意思是什么. 如果一下子就把完整的形式定义端出来，读者也许从一开始就会感到莫名其妙. 因此，我们一步一步慢慢来讲群的概念，先举两个例子.

群 A　所有整数的集合 $\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$，把它们看成彼此能够相加的数. 换句话说，群 A 的元素是整数，而我们感兴趣施行的唯一运算是集合中任意两个元素的加法；例如 $2+5=7$.

群 B　所有正有理数的集合，把它们看成彼此能够相乘

的数．在这种情形下，集合的元素就是所有能够表成 $\frac{a}{b}$ 形式的数，这里 a 和 b 是正整数，而我们感兴趣施行的唯一运算是集合中任意两个元素的乘法；例如 $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$.

现在在读者面前已经展示了群的例子，然而他在理解群是什么的大道上仍然没走多远，因为他可能不会立即认识到这些例子中的哪些特点在群的本质结构中是起主要作用的．在我们描述群 A 和群 B 时，有着重点的那些字就是为了强调在所有群中出现的基本结构范型．我们可以突出其中的两个特征：

1. 元素的集合 $\begin{cases}\text{群 A: 所有整数}\\ \text{群 B: 所有正有理数}\end{cases}$

2. 集合上的一种二元运算 $\begin{cases}\text{群 A: 任意两个整数的加法}\\ \text{群 B: 任意两个正有理数的乘法}\end{cases}$

我们把群 A 和群 B 的运算称为二元运算，是因为每次运算只涉及两个元素．

一个集合上的二元运算是一种对应，对于集合中的有次序的每一对元素它指定这个集合中的唯一确定的元素．因此在群 A 中，加法是在整数集合上的二元运算，这是因为，假如 r 与 s 是我们集合中的任意两个元素，则 $r+s$ 也是集合中的一个元素． 如果我们用符号 t 表示元素 $r+s$，我们可以把这段叙述这么说：如果 r 和 s 是我们集合中任意两个元素，则集合中有且仅有一个元素 t，使得 $r+s=t$. 例如，假使我们选 2 和 5 为我们的集合中的两个元素，那么就有集合中唯一的元素 7，使得 $2+5=7$.

群 B 的二元运算是乘法；这是由于，假如 r 及 s 是我们的（正有理数）集合的两个元素，则有且仅有一个集合中的元素 t，使得 $r\cdot s=t$.（为了得出元素 t 的唯一性，需把相等的有

理数，例如$\frac{4}{8}$与$\frac{1}{2}$，理解为表示同一个数.）假如我们选取$\frac{2}{3}$及$\frac{5}{8}$为我们集合中的两个元素，则存在集合中唯一的元素$\frac{5}{12}$使得$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$.

要注意，“二元运算”这个概念本身就包含一个相关的集合.这就是为什么我们用“在一个集合上的二元运算”这个词.一对元素以及通过二元运算所指定的对应元素必须全都是同一集合中的元素. 这样我们就看出，群的两个密切相关的特征是：(1)元素的集合，(2)这个集合上的二元运算. 这样两个特征是互相缠绕在一起不能分开的，虽然，我们可能有时候把注意力从一个特征转到另一个特征上较为方便.

刚才我们所考虑的群的二元运算的例子是通常整数的加法，用符号＋表示，以及正有理数的乘法，用·表示. 后面我们会看到，对于不同的群有许多不同的二元运算，有时把这些运算都用同一个符号表示较为方便. 我们就用符号$\otimes$来表示这种没有特殊指定的二元运算.

这个记号使得我们有可能把群A及群B所显示的结构特征(1)和(2)表述为：一个集合S以及S上的一个二元运算$\otimes$.假如r及s是S中任意两个元素，则S中存在唯一的元素t，使得

$$r\otimes s=t.$$

对于群A，$\otimes$表示“整数的加法”这种特殊运算；对于群B，$\otimes$表示“正有理数的乘法”.

为了强调二元运算是一种对应，我们再换一种方式来描述我们所讨论过的群. 在群A的情形，我们可以说，对应于任何一对整数r及s，存在唯一整数t. 我们能够用符号写成

$$(r,s)\rightarrow t,$$

其中箭头表示“对应于”. 在群B的情形，我们可以说，对应于任何一对正有理数 r 及 s，存在唯一的正有理数 t.

为了对一个集合上的二元运算有更广的观点，我们考虑这样的问题：是否一个集合上的二元运算也可以是一个子集上的二元运算？（如果 U 的每个元素也是 S 的元素，我们把集合 U 称为集合 S 的子集.）例如，假定 S 是所有正有理数的集合，U 是由所有正整数组成的子集. 首先让我们决定是否除法是 S 上的二元运算. 读者很容易证明除法是正有理数集合 S 上的二元运算. 如果 r 及 s 是任意两个正有理数，就存在唯一的正有理数 t，使得

$$r \div s = t.$$

现在让我们来考察一下集合 S 上的二元运算除法是否也是正整数子集 U 上的二元运算. 显然，如果在子集 U 中我们选择了二个元素比如说 2 和 3，则就不存在任何正整数 t 使得

$$2 \div 3 = t.$$

于是，除法并不是正整数子集 U 上的二元运算，因为存在正整数对，它不对应于第三个正整数.

与这种情况相反，让我们考虑所有整数的集合 S 及所有偶数的子集 U. 我们已经看到加法是所有整数的集合 S 上的二元运算. 在加法运算下，偶数子集会出现什么情况？当两个偶数相加时，得数也是偶数. 换句话说，加法是偶数子集上的二元运算，就象它是整数集合上的二元运算一样. 偶数子集 U 中的任意两个元素相加，其和总是 U 中的元素. 我们把这种性质说成：偶数子集 U 在加法二元运算下是封闭的. 读者能够验证，奇数子集在这个运算下不是封闭的.

我们可把子集在二元运算下的封闭性更一般地说法叙述为：如果 $\otimes$ 是集合 S 上的二元运算，U 是 S 的子集且具有如下性质：当 u 及 v 属于子集 U 时，$u \otimes v$ 就是 U 的元素，则我

们就说U在运算$\otimes$下是封闭的．“封闭”这词提示我们，当把运算$\otimes$限制在U中的元素对上时，运算结果不会弄到U的外面去；所以我们可以把$\otimes$看成是集合U上的二元运算.

第八章中我们将会看到，在讨论“子群”时，这种子集在二元运算下的封闭性质怎样起着关键的作用.

练习 1

(a) 加法是奇正整数的集合上的二元运算吗？

(b) 乘法是奇正整数的集合上的二元运算吗？

(c) 设集合的元素为 $1, i, -1, -i$ (其中 $i=\sqrt{-1}$). 加法是这个集合上的二元运算吗？

(d) 乘法是否是 (c) 中集合上的二元运算？

到现在为止，我们已经看到一个群是一个集合连同这集合上的一种二元运算．如果 r 及 s 是这集合上的任意两个元素，则存在这个集合的唯一元素 t 使得

$$r\otimes s = t \quad 或 \quad (r, s)\to t.$$

“如果 r 及 s 是这集合上任意两个元素”这段话并不排除 r 及 s 可能表示相同元素；它也没预先假定 r 及 s 的特殊次序．因此，假如 r 及 s 是这集合上任意两个元素，则

$$r\otimes s, \quad r\otimes r, \quad s\otimes s, \quad s\otimes r$$

也是这个集合的元素(它们不一定彼此完全不同).

现在就要问：一个群中，$r\otimes s$ 及 $s\otimes r$ 能够是集合中的不同的元素吗？在群 A 及群 B 中，显然 $r\otimes s = s\otimes r$ 总成立．例如，在群 A 中，我们有 $3+5=5+3$，在群 B 中我们有 $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3}$. 但是，在正有理数集合中以除法为二元运算时，我们就看到，比如 $\frac{2}{3}\div\frac{7}{2}\neq\frac{7}{2}\div\frac{2}{3}$．一般来说，这个

集合中，$r\otimes s\neq s\otimes r$. 因此，元素的次序很重要；在某些集合中，改变或交换元素的次序可以得出不同的结果，即有可能

$$(a,b)\to c \text{ 及 } (b,a)\to d,$$

其中 a,b,c,d 是一个群的元素且 $c\neq d$.

当 $r\otimes s=s\otimes r$ 时，我们就说元素 r 及 s（关于用$\otimes$表示的特殊运算）可交换；如果 $r\otimes s\neq s\otimes r$，我们就说元素 r 及 s（关于这个特殊运算）不可交换. 从现在起，我们事先并不保证在运算$\otimes$之下，有序对 (r,s) 与有序对 (s,r) 对应到相同的元素. 对于每一个情形，我们都要分别检查其可交换性.

考虑到一般我们有必要区别 $r\otimes s$ 及 $s\otimes r$，我们把一个集合及其相关的二元运算的刻划重述如下：对于集合中每个有序的元素对 r 及 s，存在集合中的唯一元素 t 使得

$$r\otimes s=t \text{ 或 } (r,s)\to t.$$

到现在为止，在所有集合及其相关的二元运算的例子中都把数作为元素，把我们熟知的一种算术运算当作二元运算. 但是，我们就会看到，群的元素也可以不是数，而是其他对象，例如运动，置换，函数，几何变换或者一组符号；在这些情形下，相关的二元运算就不具有算术性质.

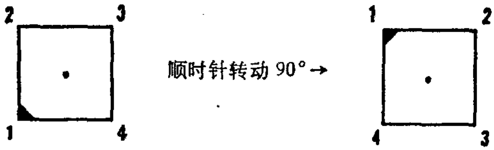


图 1.1

例如，考虑一个正方形可以在平面上围绕通过它的中心的轴自由转动，但是允许的转动只限于使这个正方形和自身重合的转动. 那么，一个允许的转动就是沿顺时针方向转动 90°（见图 1.1）. 让我们用 a 表示这个转动. 另外一些允许

的转动可以是：(1)顺时针转动 180°，我们用 b 表示；(2)顺时针转动 270°，我们用 c 表示.

我们可以把这些转动 a, b, c 看成一个群的元素. 是否我们能够定义一个二元运算使得 $a\otimes b=c$ 有意义呢？一个办法是按下列方式去思考：

顺时针转动 90°　接着　顺时针转动 180°

等价于

顺时针转动 270°，

或者

元素 a 接着元素 b 等于元素 c，

或者

$$a\otimes b=c.$$

把两个元素 a 与 b 同元素 c 联系起来的这个运算可以称为"接着"，也可称为"相继". 对于转动来说，相继这种运算是有意义的. 下面将会看到，对于其他各种可能的群的元素也可以使之有意义.

练习 2　把二元运算理解为"接着"或相继，$b\otimes c$ 表示正方形的转动的集合中的什么转动？$a\otimes c$ 又表示什么转动？

第二章 群 的 公 理

虽然到此为止我们都在讨论集合上的二元运算，但读者不应由此断定，它就是群的唯一特征．事实上，为了使得某个具有二元运算的集合构成一个群，还必须假设：这个二元运算还具有几个涉及这个集合元素的基本性质．刻划这些基本性质的假设，就是所谓的(群的)公理，我们将需要三个这样的公理．我们称它们为：(1) 结合性公理，(2) 单位元素(或恒等元素)公理，(3) 逆元素公理．

可结合性

可结合性是说，若 r, s, t 是集合的任意三个元素，则

$$r\otimes(s\otimes t) = (r\otimes s)\otimes t;$$

也就是说，若 $s\otimes t$ 是集合的元素 x，$r\otimes s$ 是元素 y，则 $r\otimes x = y\otimes t$．

让我们考察前面说过的群 A 和群 B (见第 1 页)．在群 A 中，可结合性就是，对任意三个整数 r, s, t，有

$$r + (s + t) = (r + s) + t.$$

例如，我们有

$$5 + (3 + 8) = 5 + 11 = 16$$

及

$$(5 + 3) + 8 = 8 + 8 = 16.$$

在群 B 的情况，我们将有

$$r\cdot(s\cdot t) = (r\cdot s)\cdot t.$$

例如，

$$\frac{3}{8}\cdot\left(4\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3}=1$$

及

$$\left(\frac{3}{8}\cdot 4\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1.$$

我们由初等代数的经验知道，群 A 和群 B 的二元运算是可结合的.

现在让我们把除法作为正有理数集合上的二元运算来考虑，看看这时结合性是否也成立. 我们有

$$\frac{3}{2}\div\left(3\div\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}\div 4=\frac{3}{8},$$

而

$$\left(\frac{3}{2}\div 3\right)\div\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3},$$

所以

$$r\div(s\div t)\neq(r\div s)\div t.$$

这就是说，除法不是正有理数集合上的可结合的二元运算.

那么，不加括号的表达式 $r\otimes s\otimes t$ 的含义是什么？如果$\otimes$表示一个集合上的二元运算，当包含这个集合的三个元素时我们又如何应用它？ 我们能给表达式 $r\otimes s\otimes t$ 一个确定的意义，就是或者按前两个加括号看待，或者按后两个加括号看待. 在第一种情况该表达式就好象 $(r\otimes s)\otimes t$，而在第二种情况则象 $r\otimes(s\otimes t)$. 因为$\otimes$是我们集合上的一个二元运算，所以 $y=(r\otimes s)$ 和 $x=(s\otimes t)$ 都是我们集合上的元素. 因此$(r\otimes s)\otimes t$ 和 $r\otimes(s\otimes t)$ 的每一个都可以作为仅涉及到这个集合的二个元素： 在第一种情况即 y 和 t；在第二种情况即 r 和 x.

若二元运算$\otimes$是不可结合的，则元素 $r\otimes x$ 与 $y\otimes t$ 通常是不同的，从而表达式 $r\otimes s\otimes t$ 没有唯一的意义. 例如，在正

有理数集合上的除法这种情况下，表达式 $\frac{3}{2} \div 3 \div \frac{3}{4}$ 的含义就是模棱两可的，这是因为

$$\left(\frac{3}{2} \div 3\right) \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3}, \text{而} \frac{3}{2} \div \left(3 \div \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}.$$

如果二元运算$\otimes$是可结合的，则元素 $r\otimes x$ 与 $y\otimes t$ 是相等的，所以我们所用的两种加括号方法并没有差别．在这两种情况下，我们得到的都是同一元素的表示．就是因为这种结合性，下面三个表达式

$$r\otimes s\otimes t,\quad r\otimes(s\otimes t),\quad (r\otimes s)\otimes t$$

显然也都是同一元素的表示．

公理 1（结合性公理） 在群中，一个二元运算是这样定义的：若 r，s 和 t 是任意三个元素，则

$$r\otimes(s\otimes t) = (r\otimes s)\otimes t.$$

用"接着"一词描述的运算是可结合的吗？为此，我们来考察一个象自行车轮子一样、能围绕通过它的中心的轴旋转的圆盘．假设 a，b，c 是这个圆盘的旋转的任意集合，若用$\otimes$表示"接着"运算（或旋转的相继），那么

$$(a\otimes b)\otimes c = a\otimes(b\otimes c)$$

总成立吗？容易看到，括号的用处仅仅在于破坏原有的那种 a 第一、b 第二、c 第三的次序．对于旋转或其他运动的任意集合，这个运算是可结合的，从而是一个许可的群运算．

单位元素或幺元

剩下的两个公理涉及到数 1 的概念的推广．如果我们想到用通常的乘法作为我们的二元运算，那么这些公理似乎是

非常自然的．首先我们检查一下数 1 在乘法中的性质．若 n 是一个数，则

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n;$$

这就是说，n 与 1 的乘积是 n．将这个观点推广到群的元素和群的运算，我们得到公理 2．

公理 2（单位元素公理） 对任意的群元素 a，存在唯一的群的元素 I，使得

$$a \otimes I = I \otimes a = a.$$

在二元运算中，任意元素与元素 I 配对（作二元运算）都对应于它自己．这个元素 I 叫做群的单位元素或么元．之所以采用字母 I 作单位元素，是由于它与普通算术中的数 1 相象．

练习 3 假设集合是由实数组成的集合，而二元运算是加法，那么（群的）单位元素是什么元素？

倒数或逆元素

与推广数 1 有关的第二个概念，是将倒数概念推广到群．若 u 和 v 是任意两个使 $uv = 1$ 的数，则我们说 u 与 v 互为倒数．下面这个公理是这个观点的一个推广．

公理 3（逆元素公理） 若 a 是一个群的任意元素，则这个群存在唯一的元素 a^{-1}，使得

$$a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = I.$$

元素 a^{-1} 叫做 a 的逆元素．显然 a^{-1} 的逆元素是 a：

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

之所以用 a^{-1} 作为 a 的逆元素的符号，是为了与普通代数相一致．在普通代数中，不等于 0 的 u 的倒数(即逆元素)是用 u^{-1} 表示的．

让我们来概括一下我们的群的定义．一个群是一个集合 G 及 G 上的一个二元运算 $\otimes$，且使得如下的公理都成立：

公理 1（结合性公理）　对 G 的任意元素 r, s, t, 都有

$$r\otimes(s\otimes t)=(r\otimes s)\otimes t.$$

公理 2（单位元素公理）　对 G 的每一个元素 r, 在 G 中都存在唯一的元素 I, 使得

$$r\otimes I=I\otimes r=r.$$

公理 3（逆元素公理）　对 G 的任意元素 r, 都存在 G 的唯一的元素 r^{-1}, 使得

$$r\otimes r^{-1}=r^{-1}\otimes r=I.$$

读者不应设想，这个群的公理化定义是从某一个数学家的头脑中一下子蹦出来的．数学概念常常是许多数学家以一种非常没有规律的方式发展起来的，一阵高一阵低，有时走到死胡同，有时却作出革命性的发现．实际上构成群的基础的正式的公理，在群论工作中大约经一个世纪之久才表述清楚．

早在 1771 年拉格朗日(Lagrange)就已提出并证明了第一个重要的定理（在稍后一点的章节中我们将考虑这个定理）．但到 1815 年柯西[1]（Cauchy）开始写群论方面的著作时，考

[1] 奥古斯丁-路易斯·柯西，(1789—1857)，他强调数学分析的严格性而对数学的发展作出巨大贡献．他提出的“极限”，“连续性”及“收敛性”现在仍然是现代数学分析概念的基础．柯西是使群论(特别是置换群论)得到系统发展的先驱者之一．他还以他的单复变函数论的基本定理而知名．