半导体数字集成电路

成都电讯工程学院

沈　铎　编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书包括双极型电路和MOS型电路。书中，对这两类门电路的工作原理、参数、工艺和版图设计等基础知识作了全面介绍。对于触发器、全加器、寄存器、计数器、存贮器……等侧重于逻辑结构的分析。此外，还介绍了I^2L、C^2L、CCD等新型器件。

本书是职工业余大学半导体专业的教材，也可供有关工程技术人员和大专院校师生参考。

半导体数字集成电路

成都电讯工程学院 沈 铎 编

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张13 3/4　317千字

1980年11月第一版　1980年11月第一次印刷　印数：0,001— 8,700册

统一书号：15034·2003　定价：1.45元

前　言

为满足电子工业职工业余大学半导体器件及相近专业的教学需要，编写了《半导体数字集成电路》一书。

近年来半导体集成电路发展迅速。随着集成电路的发展，集成度的提高，中、大规模集成电路的出现，不但早已打破了器件与线路之间的传统界线，而且也打破了器件与整机之间的界线。一块集成电路往往既是一个器件，又是一个整机或者是整机的一个大部件。因此，半导体集成电路课程涉及的内容也越来越宽，就以数字集成电路方面来说，它不仅涉及到半导体工艺、电路原理，还需涉及系统的逻辑设计。

半导体集成电路有各种分类方法，如以结构和制造上的特点为依据，常常分为双极型集成电路和MOS型集成电路二大类，它们各有特点。在中、小规模集成电路方面以双极型集成电路居多，在大规模集成电路方面，则MOS集成电路显得更为活跃。因此作为半导体集成电路的课程内容，似乎两者都不可偏废。作为一门专业基础课程，又必需侧重于基本原理和基本分析方法。鉴于上述原因，本书的内容具体安排如下：

第一章介绍各种计数的进位制、逻辑代数和卡诺图。这是逻辑分析和逻辑设计的基础知识。

第二章讲述双极型集成电路基础。TTL逻辑门是最成熟、最有代表性的门电路，所以本章以分析TTL电路为主，并介绍门电路的基本工作原理、参数指标以及版图设计。

第三章讲述MOS集成电路基础。在MOS集成电路方面，MOS晶体管几乎是电路中的唯一元件。MOS集成电路与MOS晶体管之间的关系极为紧密，对于MOS集成电路的设计和分析无不建立在MOS晶体管的基础之上。另一方面，在单个晶体管的产品中，MOS晶体管比较少见，它似乎成了MOS集成电路中的专用元件。因此，本章的内容以MOS晶体管作为起点，介绍了MOS晶体管的基本工作原理和特性。在此基础上对MOS集成电路的基本单元电路——各种MOS倒相器，作了比较详细的讨论。最后，介绍MOS集成电路工艺概况，同时引出了新型的MOS器件C^2MOS（或称闭合环互补逻辑电路C^2L）。

第四章讲述集成触发器和其它功能器件。内容是以前三章为基础，转向逻辑结构方面的分析。因此，将双极型集成触发器和MOS集成触发器汇集在同一章中。本章首先从逻辑结构方面较详尽地介绍各种类型的触发器；然后，分别讨论MOS型和双极型触发器的一些具体电路；最后，介绍一些其它功能器件。这些功能器件是以门电路和触发器为基础的，因此在讨论中以门电路和触发器为基本单元而过渡到逻辑设计方面的内容。

第五章讲述大规模集成电路。在大规模集成电路领域中，MOS集成电路显得更为活跃。所以，本章的内容也侧重于MOS集成电路。首先介绍了MOS动态电路和移位寄存器，然后介绍随机存取存贮器（RAM）和只读存贮器（ROM）。在ROM一节中还介绍了ROM的应用。ROM的应用和ROM的逻辑设计之间有着紧密的联系，某些内容，名义上

是应用，实际上已属 ROM 的逻辑设计范畴。本章最后，介绍了二种新型半导体器件，I^2L 和 CCD 器件，对 CCD 器件还列举了出现不久的 CCD 存贮器。

在编写过程中，程瑞禧同志做了大量的校对和整理工作。由于编者水平低，编写时间仓促，错误和不妥之处一定不少，敬请读者批评指正。

编　　者

目　录

第一章　计数制和逻辑函数 ………… 1
§1-1　各种进位制的计数方法及相互转换 ………… 1
一、二进制计数法 ………… 1
二、十进制和二进制的互相转化 ………… 1
三、其它进位制的表示法 ………… 3
§1-2　逻辑代数 ………… 3
一、"与"、"或"、"非"运算规则 ………… 3
二、逻辑代数的基本定理 ………… 5
§1-3　真值表、最小项表达式和卡诺图 ………… 7
一、真值表 ………… 7
二、最小项表达式 ………… 7
三、卡诺图 ………… 8
四、逻辑符号 ………… 10
第二章　双极型集成电路基础 ………… 12
§2-1　双极型集成电路的常规工艺流程及其基本结构 ………… 12
一、工艺流程 ………… 12
二、集成电路的特点 ………… 14
§2-2　二极管-晶体管逻辑电路 ………… 15
一、DTL"与非"门的基本原理 ………… 15
二、DTL的电压传输特性 ………… 18
三、门电路的参数 ………… 19
四、改进的DTL ………… 25
五、DTL驱动器 ………… 27
六、高阈值逻辑电路（HTL） ………… 30
§2-3　晶体管-晶体管逻辑电路 ………… 31
一、TTL的工作原理 ………… 31
二、典型的TTL"与非"门 ………… 33
三、TTL的改进形式 ………… 44
四、TTL逻辑功能的扩展 ………… 49
§2-4　版图设计 ………… 56
一、某些工艺参数的选定 ………… 56
二、元件的图形设计 ………… 57
三、版图实例 ………… 74
§2-5　发射极耦合逻辑门 ………… 78
一、ECL的基本电路 ………… 78
二、ECL的输出级及定偏电源电路 ………… 80
三、ECL的电压传输特性及其它基本性能 ………… 81
第三章　MOS集成电路 ………… 84
§3-1　MOS晶体管 ………… 84
一、MOS晶体管的一般介绍 ………… 84
二、对MOS器件阈值电压V_T的分析 ………… 86
三、MOS晶体管的特性曲线 ………… 91

四、MOS晶体管的跨导（g_m）和通导电阻（R_{on}）……95
五、MOS晶体管的源-漏击穿电压、栅击穿电压和栅保护……97
六、MOS晶体管的衬底偏压效应……99
§3-2 MOS集成电路中的基本单元电路……101
一、MOS集成电路中的倒相器……101
二、MOS集成电路中的基本门电路……118
§3-3 MOS集成电路的工艺概况……123
一、铝栅p-MOS工艺……123
二、n-MOS硅栅工艺……126
三、C-MOS工艺和C^2L器件……127
第四章 触发器及其它功能器件……131
§4-1 触发器……131
一、触发器的逻辑结构和功能……131
二、MOS触发器电路……145
三、双极型TTL触发器……149
§4-2 其它功能器件……154
一、全加器……154
二、寄存器和移位寄存器……155
三、计数器和数码显示……157
四、译码器和数据选通器……161
第五章 大规模集成电路……165
§5-1 动态MOS基本电路……166
一、动态有比电路……167
二、动态无比电路……169
§5-2 MOS移位寄存器……171
一、移位寄存器的基本单元……171
二、移位寄存器的应用……176
§5-3 随机存取存贮器（RAM）……178
一、存贮单元……179
二、RAM的结构……182
§5-4 只读存贮器（ROM）……189
一、二极管（ROM）……189
二、MOS只读存贮器（MOS-ROM）……190
三、双极型ROM……191
四、可编程序只读存贮器（PROM）……192
五、只读存贮器的应用……193
§5-5 集成注入逻辑（I^2L）……202
一、I^2L的基本结构和工作原理……202
二、I^2L的基本逻辑电路……204
§5-6 电荷耦合器件（CCD）……207
一、CCD的基本工作原理……207
二、CCD的基本参数以及结构上的改进……210
三、CCD存贮器……212

第一章　计数制和逻辑函数

在逻辑系统中只用二个符号，即“1”和“0”，分别称为“真值”和“伪值”。“1”和“0”这两个符号可对应于二进计数制的两个数符，因此逻辑系统中常采用二进计数制。本章开始先介绍二进计数制以及由二进计数制引出的其它进位的计数制；第二部分是介绍逻辑系统中的常用分析手段——布尔代数及卡诺图；最后，介绍一些逻辑符号。

§1-1　各种进位制的计数方法及相互转换

一、二进制计数法

在日常生活中，我们常用的计数方法是十进计数制，即用十个符号（0、1、2、…、9）来计数。如果用一位不够，则用二位（10、11、…、99）；二位不够，则用三位(100、101、…、999)……。这种计数的原则是逢十进一，即先用一位数来计数，计到九时，如再加一，则为十，写为10，也就是进入高位；当高一位的计到九时，如再增加，则进入更高一位，变成三位数；……依此类推。这种计数方法，我们在日常生活中已很习惯。但是，在数字系统中，因为是用“开”和“关”（或“高”和“低”）二个状态来计数，所以只能对应于二个计数符号，即一个对应于“0”，另一个对应于“1”。用“0”和“1”二个数符来计数时，其规律自然地就变为逢二进一。当用一位数计到1时，如再加一，则为10；用二位数计到11时，如再加一，则写为100；……依此类推。下面列出了从零到十六的两种计数方法。

表1-1　十进位计数和二进位计数的表示法

数目 \ 计数制	十进制	二进制	数目 \ 计数制	十进制	二进制
零	0	0	九	9	1001
一	1	1	十	10	1010
二	2	10	十一	11	1011
三	3	11	十二	12	1100
四	4	100	十三	13	1101
五	5	101	十四	14	1110
六	6	110	十五	15	1111
七	7	111	十六	16	10000
八	8	1000			

二、十进制和二进制的互相转化

对于一个十进制数，如7893_{10}（脚注10表示用十进位计数）。它实际上为

$$7893_{10}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{千位数}}}{7(10)^3}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{百位数}}}{8(10)^2}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{十位数}}}{9(10)^1}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{个位数}}}{3(10)^0}$$

即由千位数、百位数、十位数和个位数相加而得。每位都是以10为基数，从右向左，

幂次从 0 开始，依次递增，每位再乘上其相应的系数，即为该位的数。所以，对于一个 n 位的十进数 N_{10}，便可写为

$$N_{10}=a_{n-1}(10)^{n-1}+a_{n-2}(10)^{n-2}+\cdots+a_3(10)^3+a_2(10)^2+a_1(10)^1+a_0(10)^0$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(10)^i$$

其中 a_i 是相应 i 位（即 10^i）的系数。如果我们略去加号和 10 的幂次项，则便简化为常用的表示形式

$$N_{10}=a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_3a_2a_1a_0$$

对于一个二进数 N_2，也可作类似的表达

$$N_2=a_{n-1}(2)^{n-1}+a_{n-2}\underset{\substack{\uparrow\\(2)^{n-2}\text{位数}}}{(2)^{n-2}}+\cdots+a_3\underset{\substack{\uparrow\\8\text{位数}}}{(2)^3}+a_2\underset{\substack{\uparrow\\4\text{位数}}}{(2)^2}+a_1\underset{\substack{\uparrow\\2\text{位数}}}{(2)^1}+a_0\underset{\substack{\uparrow\\1\text{位数}}}{(2)^0}$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(2)^i$$

它与十进制数相比，仅仅将基数改为 2，系数 a_i 只有二个数符，即 0 或 1。如果略去加号和 2 的幂次项，只写出各项的系数，则便写为

$$N_2=a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_3a_2a_1a_0$$

根据上述二种计数法的分析，便很容易得到它们转化的规律。下面用几个实例来表明转化的方法：

例 1．二进转十进　将二进数 $N_2=110101_2$ 转化为十进数。该数由 6 位组成，即 $n=6$，它分解为

$$110101_2=1(2)^5+1(2)^4+0(2)^3+1(2)^2+0(2)^1+1(2)^0$$
$$=32+16+0+4+0+1$$
$$=53_{10}$$

例 2．十进转二进　将十进数 56_{10} 转为二进数。

方法 I：

（i）观察 56 中可包括的 2 最高次幂为 $2^5=32$，再求出差值 $56-32=24$；

（ii）观察 24 中可包括的 2 最高次幂为 $2^4=16$，再求出差值 $24-16=8$；

（iii）观察 8 中可包括的 2 最高次幂为 $2^3=8$。

结果：

$$56_{10}=1(2)^5+1(2)^4+1(2)^3+0(2)^2+0(2)^1+0(2)^0=111000_2$$

方法 II：

56 除 2，得商和余数记入表中。再将其商除 2，又得商和余数再记入表中。依次重复处理，直到所得商为 0，余数相应记入表中，即得表 1-2。

表中的余数就是相应各项的系数，由表 1-2 的运算结果便可直接写出 56_{10} 的二进制表示法

$$56_{10}=1(2)^5+1(2)^4+1(2)^3+0(2)^2+0(2)^1+0(2)^0=111000_2$$

表1-2　十-二进制转换计算表

求　　商	余数（对应于系数）	位　　数
$56\div2=28$	0	2^0（二进制的最低位）
$28\div2=14$	0	2^1
$14\div2=7$	0	2^2
$7\div2=3$	1	2^3
$3\div2=1$	1	2^4
$1\div2=0$	1	2^5（二进制的最高位）

三、其它进位制的表示法

在数字系统中，除了用二进制和十进制以外，还有八进制和十六进制。在八进制中，用0、1、2、…、7八个数符来计数，它的基数为8；十六进制的数符除0、1、2、…、9的十个数符外再加A、B、C、D、E、F等六个数符，共计十六个数符。这种计数方法主要是和二进制数的关系简单，而且用这种计数方法时不像二进制那么冗长，如要将某二进数$N_2=10011001_2$转为八进制数时，只要将此数自低位向高位三位一组撇开，即可直接写出，如

$$N_2=10,011,001_2$$
$$=231_8$$

如转为十六进数，则将二进制数四位一组撇开，便可直接写为十六进数。如

$$N_2=1101,\ 1001_2=D9_{16}$$

另外，在数字系统中常遇到所谓用二进制代码表示的十进制数，简称为（BCD）数。它是将二进制数四位作为一组，每组表示一位十进制数，但因十进制的数符只有十个，用8421码来计数时，每一组数只要从0000到1001即够，从1010到1111是不出现的。用这种计数方法时，虽然不能充分利用四位数组所能表达的全部数值，但转换时很方便，所以应用极为普遍。

§1-2　逻辑代数

逻辑代数是十九世纪的一位数学家布尔（Boole）提出的，所以又称布尔代数。早期是用于分析开关网络和继电器网络，所以又称开关代数。目前已普遍用于逻辑系统的设计和计算机的设计中。逻辑代数和普通代数有点类似，也是先根据一些简单的事实引出一些公理，再用公理引证出一些定理。利用这些定理便于进一步分析更复杂的运算问题。逻辑代数的特点是变量只可能取二者之一，即真或伪，分别用1或0二个数符来表示。因此它只适合处理二种状态的事物。例如，在开关电路中，每个开关只能处于“开”或“关”，开关电路的状态也只能是“通”或“不通”。在逻辑电路中，每个输入端状态和输出端状态用电平的“高”或“低”二种状态来表示，所以也可用逻辑代数来分析。下面，我们就以简单的开关网络为例，先说明逻辑代数的一些最基本的运算，然后再介绍逻辑代数的基本定理以及逻辑函数的表达方法。

一、“与”、“或”、“非”运算规则

1. “与”运算

图 1-1 是二个开关 A、B 串联的电路，电路的状态用灯泡来描述。设电路联通，灯亮为“1”；电路不通，灯暗为“0”。对开关的状态是：开关合上为 1；开关断开为“0”。则我们说电路的状态受着开关 A、B 的“与”控制作用，或说灯 Q 和开关 A、B 之间存在“与”的逻辑关系。用逻辑语言表达为：A“与”B（合闸）的条件都满足时，Q(亮）的目的实现，用表达式写为

$$Q = A \cdot B$$

逻辑“与”又称逻辑乘，它的运算符号除用“·”外也有用“×”或省略不用，即写为

$$Q = A \cdot B = A \times B = AB$$

参考图 1-1 的具体电路，“与”运算的规则如下

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

由此可以推出

$$A \cdot 0 = 0$$
$$A \cdot 1 = A$$
$$A \cdot A = A$$

2. “或”运算

图 1-2 是二个开关并联的电路，灯泡 Q 的状态和开关 A、B 之间具有“或”的逻辑关系，用逻辑语言表达为：只要 A“或”B（合闸）的条件满足，灯（亮）的目的就实现。“或”逻辑的表达式为

$$Q = A + B$$

“或”逻辑又称逻辑加。

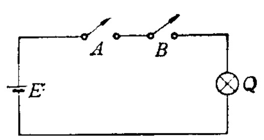


图1-1 “与”控制

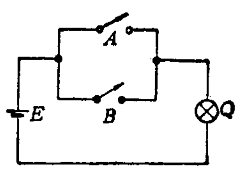


图1-2 “或”控制

参考图 1-2 的电路，“或”运算的规则如下

$$0 + 0 = 0$$
$$1 + 0 = 1$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

由此可以推出

$$A + 0 = A$$
$$A + 1 = 1$$
$$A + A = A$$

3. “非”运算

图 1-3 是对应于“非”逻辑运算的开关电路。当开关 A 合上时，灯暗；当开关 A 断开时，灯亮。也就是 $A=1$ 时，$Q=0$；$A=0$ 时，$Q=1$。对于这种情况，我们说：负载（输出）状态与开关 A 的状态之间具有“非”的逻辑关系，逻辑表达式写为

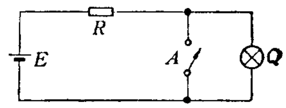


图1-3 “非”控制

$$Q=\overline{A}$$

或

$$\overline{Q}=A$$

在字母上加一横，表示相反的状态。如 $A=1$，则 $\overline{A}=0$；如 $A=0$，则 $\overline{A}=1$。也就是开关的“开”和“关”是互为相反状态。逻辑“非”有时称为逻辑“反”或逻辑“补”。例如 $\overline{A}$ 读作“A 非”、“A 反”或“A 补”。

参考图 1-3 的负载状态和开关 A 状态之间的关系，“非”运算规则如下

$$\overline{1}=0$$

$$\overline{0}=1$$

由此可以推出

$$\overline{\overline{A}}=A$$

$$A+\overline{A}=1$$

$$A\cdot\overline{A}=0$$

二、逻辑代数的基本定理

在逻辑运算中，有十条基本定理，现归纳并命名于下：

定理 1．交换律

1a．$A\cdot B=B\cdot A$

1b．$A+B=B+A$

定理 2．结合律

2a．$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

2b．$A+(B+C)=(A+B)+C$

定理 3．分配律

3a．$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

3b．$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$

定理 4．自等律

4a．$A\cdot 1=A$

4b．$A+0=A$

定理 5．0－1 律

5a．$A\cdot 0=0$

5b．$A+1=1$

定理 6．互补律

6a．$A\cdot\overline{A}=0$

6b．$A+\overline{A}=$

定理 7．重叠律

7a．$A\cdot A=A$

7b. $A+A=A$

定理8. 吸收律

8a. $A+AB=A$

8b. $A\cdot(A+B)=A$

定理9. 非非律

$\overline{\overline{A}}=A$

定理10. 摩根定理

10a. $\overline{A\cdot B\cdot C\cdots}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\cdots$

10b. $\overline{A+B+C+\cdots}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdots$

这些定律的验证可以将变量的二种可能状态分别代入关系式两边，再运用"与"、"或"、"非"的运算规则，便可证实等号左右是恒等的。也可以将等式左右分别划出它们的开关控制电路，从电路状态的一致性来验证。

上面的定律是成对出现的，它反映出逻辑"与"和逻辑"或"存在着对偶性，即将等式中的"与"全部换成"或"，将"或"全部换成"与"，则等式仍成立。记住这个规律，有时会对逻辑运算带来很大的方便。

下面再列举一些函数简化的实例，它们的结论也可作定理引用。

例1.

1a. $A+AB=A$

证明：$A+AB=A(1+B)=A\cdot 1=A$

1b. $A(A+B)=A$

证明：$A(A+B)=AA+AB=A+AB=A(1+B)=A$

例2.

2a. $A+\overline{A}B=A+B$

证明：$A+\overline{A}B=A(1+B)+\overline{A}B=A+AB+\overline{A}B=A+(A+\overline{A})B=A+B$

2b. $A(\overline{A}+B)=AB$

证明：$A(\overline{A}+B)=A\overline{A}+AB=0+AB=AB$

例3.

3a. $AB+A\overline{B}=A$

证明：$AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A\cdot 1=A$

3b. $(A+B)(A+\overline{B})=A$

证明：$(A+B)(A+\overline{B})=AA+AB+A\overline{B}+B\overline{B}=A+A(B+\overline{B})+0$

$=A+A\cdot 1=A$

例4.

4a. $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$

证明：$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$

$=AB(1+C)+\overline{A}C(1+B)=AB+\overline{A}C$

4b. $(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$

证明：（利用例4a的结果）

等式左边：$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A\overline{A}+AC+\overline{A}B+BC)(B+C)$

$$=(AC+\overline{A}B)(B+C)=ACB+ACC+\overline{A}BB+\overline{A}BC$$
$$=ABC+AC+\overline{A}B+\overline{A}BC=AC+\overline{A}B$$

等式右边：$(A+B)(\overline{A}+C)=A\overline{A}+B\overline{A}+AC+BC=B\overline{A}+AC+BC$

$$=AC+\overline{A}B$$

例5．对逻辑函数 $f(A,B,C)=A(B\overline{C}+D+\overline{E})$ 求补。

$$\overline{f}(A,B,C)=\overline{A(B\overline{C}+D+\overline{E})}=\overline{A}+\overline{B\overline{C}+D+\overline{E}}$$
$$=\overline{A}+(\overline{B}+C)\cdot\overline{D}\cdot E$$

在上面的函数转化中，用了三次摩根定理。

§1-3　真值表、最小项表达式和卡诺图

描述一个开关函数，除用逻辑式表示外，还可用图表的形式来表达。常用的图表法有真值表和卡诺图。每一种表示方法都有它的独到之处，用真值表表达时，根据变量状态便可直接查得函数值。用卡诺图表达时，便于简化逻辑式，给逻辑设计工作带来极大的方便。

一、真值表

真值表是由二部分组成：第一部分是将变量的可能组合情况有系统地罗列出来；第二部分是函数的结果，也就是变量的各种组合所对应的函数值，它们都是以真、伪（即1、0）二状态来表示。

图 1-4(*a*)、(*b*)、(*c*) 分别表示“与”、“或”、“非”的真值表。任何逻辑函数都可用真值表表示。

AB	$Q=A\cdot B$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

(*a*)“与”

AB	$Q=A+B$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

(*b*)“或”

A	$Q=\overline{A}$
0	1
1	0

(*c*)“非”

图1-4 “与”、“或”、“非”的真值表

二、最小项表达式

对于任何开关函数，都可以写成二种标准形式，一种是“乘积之和”标准式，又称最小项表达式，它的每个乘积项中包含所有的变量元素，但每个变量在一个“乘积”项中只出现一次。另一种是“和之乘积”标准式，又称最大项表达式，它的每个和项中也都包含所有的变量元素，每个变量元素在一个“和项”中也只出现一次。下面我们只对最小项表达式进行讨论。最大项表达式与它有对偶关系，因为下面没有直接用到，所以不作讨论。

下面用一个实例来表明“乘积之和”标准式。

例．求三变量函数 $f(A,B,C)=AB+AC$ 的最小项表达式(即“乘积之和”标准式)。

在上面的函数式中，二个乘积项都没有包含全部变量，为使每个乘积项中都能包含所有的变量元素，可利用 $A+\overline{A}=1$ 的关系乘入各项，便可补齐所缺的变量，即

$$
\begin{aligned}
AB+AC &= AB(C+\overline{C})+AC(B+\overline{B})\\
&= ABC+AB\overline{C}+ACB+AC\overline{B}\\
&= ABC+AB\overline{C}+AC\overline{B}
\end{aligned}
$$

式中的三个乘积项都包括A、B、C三个变量，这就是该函数的最小项表达式，或称“乘积之和”标准式，式中的每个乘积项都称为最小项。

任何一个逻辑函数用最小项表达时，它的表达式是唯一的，也就是说，如果两函数相等，则它们转化为最小项表达式后，其形式完全相同。因为一个n变量的任何逻辑函数，都可用通式来表示，它包括所有可能的最小项之和（即2^n个最小项之和）。不同的n变量函数，仅仅是各最小项是否存在的问题。现以三变量函数为例，它的最小项表达式的通式写为

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= a_1(ABC)+a_2(AB\overline{C})+a_3(A\overline{B}C)\\
&\quad +a_4(A\overline{B}\,\overline{C})+a_5(\overline{A}BC)+a_6(\overline{A}B\overline{C})\\
&\quad +a_7(\overline{A}\,\overline{B}C)+a_8(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) \qquad (1\text{-}1)
\end{aligned}
$$

共有$2^n=2^3=8$项，它包括了所有可能的组合。式中a_i是各最小项的系数，它可以等于0或1。不同的函数就对应于不同的a_i值。如a_i为1，则该最小项存在；如$a_i=0$，则该最小项被消去。在式（1-1）中，因为它包括了所有可能的最小项，所以任何三变量函数的最小项表达式可视为由式（1-1）消去系数项而来的，同一函数的对应项系数a_i必然相等。所以，一个函数用最小项表达式时，它的形式是唯一的。

三、卡诺图

用卡诺图表示函数的方法是根据最小项表达式，将各最小项的系数a_i填入表格的相应位置中，也就是对不存在的最小项，在其对应方格内填0，在有该最小项的对应位置上填1。现以二变量函数$f(A,B)=\overline{A}B+AB+A\overline{B}$为例，它的卡诺图如图1-5所示。

图1-5(a)、(b)的表示方法是：变量B对应于行；变量A对应于列。图1-5(c)和(d)的表示方法，则是变量A、B都对应于列，因为变量AB的可能状态有四组，所以对应于四列。图1-5(b)与(a)的表示形式是一致的，在图(b)中只不过用1和0来表示变量的真值和伪值，并在左上角注明所对应的变量。图1-5(d)和(c)的形式也基本相同，即用00对应于$\overline{A}\,\overline{B}$，01对应于$\overline{A}B$，……等等。几种表示方法，都是同一函数的卡诺图。

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	0	1
B	1	1

(a)

$B\backslash A$	0	1
0	0	1
1	1	1

(b)

$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
0	1	1	1

(c)

AB	00	01	11	10
	0	1	1	1

(d)

图1-5　$f(A,B)=\overline{A}B+AB+A\overline{B}$的卡诺图

画卡诺图的关键问题是掌握邻近项的特点，就是两个相邻项总有一个变量存在互补关系，而且也仅仅只有一个变量存在互补关系。在图1-5(a)和(b)中，第一列和第二列分别对应于$\overline{A}$和A，第一行和第二行分别对应于$\overline{B}$和B，也存在互补关系。在图1-5

（c）和（d）中，它的变量排列方式也是按照有一个变量存在互补的原则，而且第四列和第一列也是有一个变量互补，第一列是 $\overline{A}\overline{B}$，第四列是 $A\overline{B}$，其中，变量 A 满足互补条件，所以它们也具有邻近项的特点，也称邻近项。这种变量排列的方式主要是有利于简化函数，便于求得最简函数式。

卡诺图的主要用途之一是简化逻辑函数，求得最简函数式。利用卡诺图求最简函数式的方法是：先画出函数对应的卡诺图，然后在图上将邻近项为“1”的单元圈为一组，表示可消去其中的互补变量，然后将圈为一组的元素用一个乘积项写出来，这样就可直接写出最简函数式。

现以函数 $f(A,B)=\overline{A}B+A\overline{B}+AB$ 为例，其卡诺图如图 1-6 所示。

在图 1-6(a) 中 $A\overline{B}$ 和 AB 都为 1，将它们圈在一起，表示可消去 B 得到 A（因为 $A\overline{B}+AB=A(\overline{B}+B)=A$）。同样，$\overline{A}B$ 和 AB 项可消去 A 得 B（因为 $\overline{A}B+AB=(\overline{A}+A)B=B$）。也就是将圈成一组的二项简化为一项，写成逻辑式时，就可直接得到最简式。在图 1-6 中，根据圈组的情况，便可直接写出 $f(A,B)=A+B$。在画圈过程中，每个方格元素可以重复圈用，像图 1-6 中的 AB 元素，圈用了二次，因为开关函数具有 $AB+AB=AB$ 的特性。

图1-6 $f(A,B)=\overline{A}B+AB+A\overline{B}$ 的卡诺图

对于三变量和四变量函数的卡诺图也可按上述原则处理。但在作图时必须注意相邻项中保持一个变量互补的原则。图 1-7(a)、(b) 是某三变量函数 $f(A,B,C)=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}BC+ABC+A\overline{B}\overline{C}$ 的卡诺图。在000（即 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$）项和 100（即 $A\overline{B}\overline{C}$）项中。因为分别有 $\overline{A}$ 和 A，所以圈为一组，简化为一项 $\overline{B}\overline{C}$；在 011（即 $\overline{A}BC$）项和 111（即 ABC）项中，因为有 $\overline{A}$ 和 A，所以简化为一项 BC。结果，函数的最简式为

$$f(A,B,C)=\overline{B}\overline{C}+BC$$

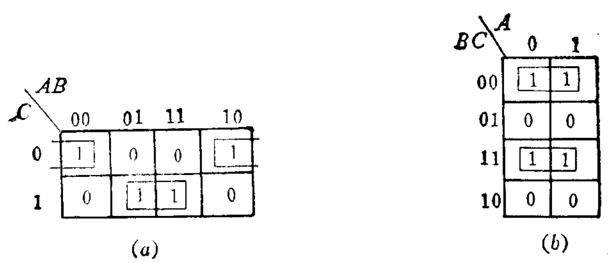


图1-7 三变量函数的卡诺图 $f(A,B,C)=\overline{B}\overline{C}+BC$

图 1-8 是四变量函数的卡诺图。它有四个邻近项在一起，如按上述的简化方法，将二个邻近项圈在一起，它可圈成二种形式，如图 1-8(a) 和 (b) 所示。将它们写成逻辑式时，分别为

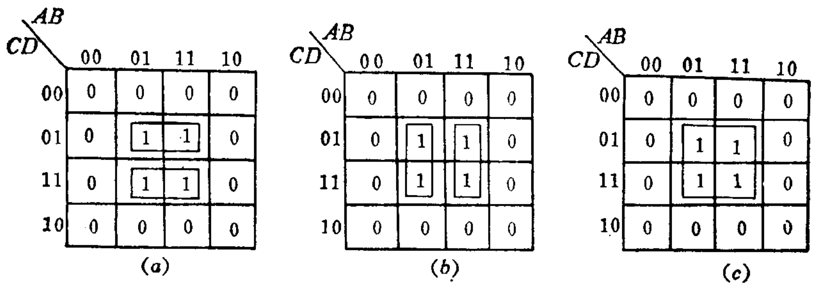


图1-8　四变量函数的卡诺图 $f(A, B, C, D)=BD$

$$f_a(A,B,C,D)=B\overline{C}D+BCD=BD(\overline{C}+C)=BD$$

和
$$f_b(A,B,C,D)=\overline{A}BD+ABD=(\overline{A}+A)BD=BD$$

结果完全相同。如果将四项圈在一起，如图 1-8(*c*) 所示：圈在一起的四项中，B和D没有对应的互补元素，不能消去；A和C都有对应的互补元素，可以消去。结果便可直接写出最简函数式

$$f_c(A,B,C,D)=BD$$

圈为一组的几个元素便简化为一个乘积项，该乘积项中只包括没有互补的变量元素。

图 1-9 也是一个四变量的卡诺图。它有八个邻近项可圈在一起，图中除元素 $\overline{D}$ 外，其它元素都有对应的互补元素，因此八个邻近项就合而为一，得最简式

$$f(A,B,C,D)=\overline{D}$$

对于更多变量的卡诺图及其简化函数的方法都可按上述原则处理，但因实际工作中用得较少，所以不再讨论。

四、逻辑符号

逻辑代数和普通代数一样，是抽象化了的数学，即抽去了具体内容后的数学方法。它可以描述任何事物，前面我们是从简单的开关概念入手，引出逻辑运算的一些规律和方法，这些规律和方法完全可用于其它事物，反过来也一样。如果一个电路，输出电平与输入电平之间存在“与”的关系，则称“与”逻辑电路，简称“与”门；存在“或”逻辑关系的电路称“或”门；存在“非”逻辑关系的电路称“非”门。这些基本门的符号分别如图1-10(*a*)、(*b*)、(*c*) 所示。

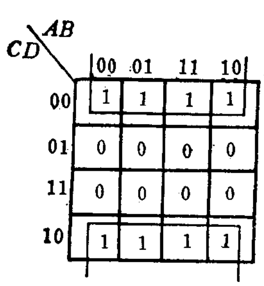


图1-9　四变量函数的卡诺图 $f(A, B, C, D)=\overline{D}$

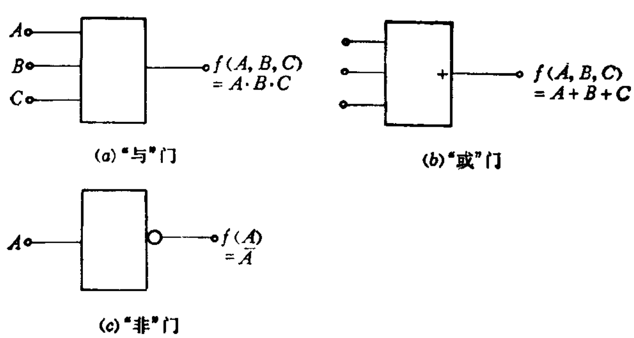
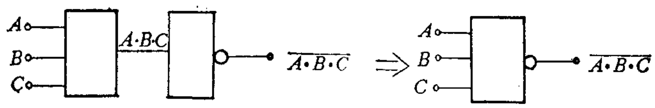
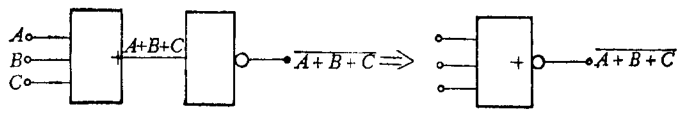


图1-10　“与”、“或”、“非”门的逻辑符号

如果把“与”门和“非”门串接起来，如图 1-11(a) 所示，它就是“与非”门；把“或”门和“非”门串接在一起，终端输出电平与输入端电平之间的关系就是“或非”门，其逻辑符号如图 1-11(b) 所示。



(a)“与非”门



(b)“或非”门

图1-11 “与非”门和“或非”门符号
(a)“与非”门；(b)“或非”门。

如果将“与”门和“或非”门联在一起，如图 1-12 所示，它的输出电平与输入 电 平之间就具有“与或非”的逻辑关系，称“与或非”门。

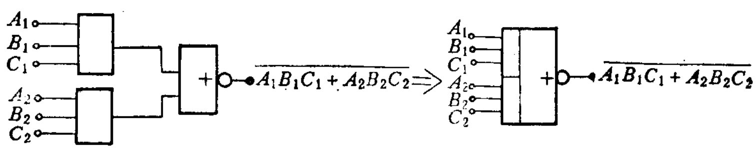


图1-12 “与或非”门符号

图 1-13 是“异或”门的符号，用三个“与非”门和二个“非”门所组成的“异或”门，它实现 $f=\overline{A}B+\overline{B}A$ 的功能。只要二个输入端的状态相反，输出就为“1”。

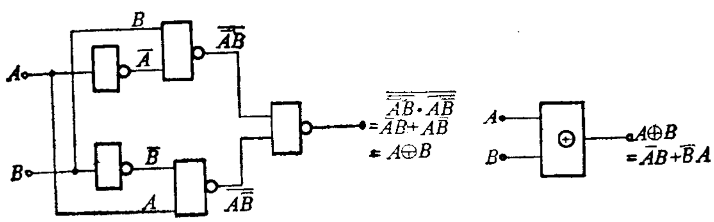


图1-13 “异或”门符号

图 1-14 是“异或非”门的符号，也就是同门，因为$\overline{A\oplus B}=\overline{\overline{A}B+\overline{B}A}=\overline{\overline{A}B}\cdot\overline{\overline{B}A}$

$$=(A+\overline{B})\cdot(B+\overline{A})$$

$$=AB+\overline{A}\,\overline{B}=A\odot B$$

只要二输入端的状态相同，输出就为 1。

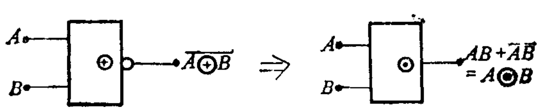


图1-14 “异或非”门——“同”门