应用矩阵方法

谢国瑞　编

应用矩阵方法

谢国瑞　编

化学工业出版社

本书主要为在职科技人员学习应用矩阵方法而编写。内容的选择和处理注重使读者理解掌握矩阵代数的主要基础知识和理论，培养用矩阵方法解决实际问题的能力。全书分六章：矩阵代数基础、线性代数方程组（唯一解）、线性代数方程组（一般情形）、线性规划、矩阵对角化和二次形式。前三章是基本概念、性质和运算等基础教程；后三章进一步深入阐述矩阵方法并介绍实际工作中常碰到的线性规划问题。

全书由华东化工学院谢国瑞编写。

应用矩阵方法
谢国瑞　编

责任编辑：李洪勋
封面设计：许　立

化学工业出版社出版发行
（北京和平里七区十六号楼）
化学工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销

开本850×1168 1/32 印张15 字数428千字
1988年6月第1版　1988年6月北京第1次印刷
印　数　1—3,500
ISBN　7-5025-0084-2/TQ·26
定　价 3.70 元

前言

近年来，笔者有幸为化工、石油、海洋等系统的在职科技人员讲过几次应用数学课。教学期间，积累了一些材料，其中的一部分，经过整理、扩充就成了目前奉献给读者的这本书。

科学技术的飞速发展，特别是电子计算机的普及，促使线性代数几乎成了每个科技人员数学武库中的必备工具之一。对于化工系统的科技人员来说，自然已经有了不少成功的著作[1]、[8]可供学习这个科目之用。但为读者尽快掌握这部分内容，我们还是编了这本题为“应用矩阵方法”的易读的培训教材。

全书内容分为六章，与多数线性代数教科书相比，本书把一些数值代数初步的材料编写进来。另外，同参考书目〔1〕、〔4〕、〔8〕等一样，包括了不算过于简略的线性规划一章当然也有一些省略之处，特别要提出的是，我们有意略去了关于约当标准形的讨论。书中的前三章是应该循序细读的基础内容，第三章的三、四两节对初学者可能是困难的。读者除了准备反复学习几遍外，还可配合参考书籍的相应章节（如〔8〕的§§1.5,1.6.6.1,等），或者等通读全书一遍后再重新细读。第四章线性规划，可以推迟到愿意的时候再去看它。要对矩阵方法在化学、化工中的应用有所理解，第五、六章的大部分也是必读材料，在这个基础上，读者就可能从参考书目〔2〕、〔3〕、〔4〕、〔6〕等了解到更多的矩阵方法的结果。

在这样一块已为无数作者耕耘过的园地里，自然很难找到什么首创的东西。但我们的宗旨是力图适应培训在职科技人员的要求，故在下述方面作过点滴努力：书中很少以定理的形式提出命题，一些结果的证明为解释条件、结论的意义所代替。依照管见，为能把数学方法用到各自的实际工作中去，对基本概念及命题意义的理解，是不可缺的；这里也注意对涉及的方法、应用与获取数字结果的技术作有联系

的处理；考虑到做一定数量的习题几乎是学习数学的必由之路，书中习题的安排，既使读者能从解题得以巩固所学知识，又不致遇到太大的困难；展示成功的应用实例，常可收到画龙点睛之功效，我们亦试图效法于斯，奈囿于笔者的见闻与能力，不敢说有细微的成功，只是期待读者的赐教，并望进一步阅读参考书目〔1〕、〔2〕、〔4〕、〔8〕、〔10〕及其他参考资料。

如果本书能在某种程度对读者有用，应当归功于陈敏恒教授的教导，更由于他多年来一贯倡导对在职科技人员的培训，我才有机会进行这一工作。前辈金径真总工程师和王邵飞先生曾给予很多鼓励和不少教益。在本书的教学实践，编写、定稿过程中，还多方得益于葛索音、谢声礼、郑汶玉、钱华、郑芝青、周金福等先生的帮助。在此谨一并致以诚挚的谢意。

由于本人水平所限，加之编写时间匆促，书中难免留存不少错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

谢国瑞

目 录

第一章　矩阵代数基础

第一节　基 本 概 念

1．定义

在矩阵方法中，最初的一步，是用单个字母表示一个由$m\times n$个元素排成m行n列的矩形阵列(表)。例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

称这个两边标以方括号（有时也用圆括号）的阵列为**矩阵**。用大写黑体拉丁字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、…等表示矩阵，也有文献用普通的大写拉丁字母表示矩阵。矩阵的元素，通常用同一个但为小写的拉丁字母表示，字母带有两个附标，指明元素在矩阵内的位置。第一个附标指出元素所在的行号(横的为行)，第二个附标是列号（纵的是列)它们分别是自上而下以及从左到右计其顺序的。例如，在(1.1) 的矩阵$\boldsymbol{A}$里，$a_{11}=1$，$a_{12}=7$，$a_{22}=-1$等，一般讲，用a_{ij}表示矩阵$\boldsymbol{A}$中，位于**第i行第j列**位置的那个元素，就说是$\boldsymbol{A}$的i-j元素。

具有m行n列的矩阵$\boldsymbol{A}$，称为是$m\times n$**维矩阵**，或简称为$m\times n$矩阵，一般可记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} & \longleftarrow \text{第}\ i\ \text{行} \\ \uparrow\ \text{第}\ j\ \text{列} & \end{array} \tag{1.2}$$

必要时，为强调指出矩阵的维，也把（1.2）的$\boldsymbol{A}$记为$\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}}$。于是(1.1)

的矩阵是2×3的（注意，切莫写成乘积6），而

$$\begin{bmatrix} 8 & 12 & 7 & 6 \\ 1 & 9 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 15 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 25 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

分别是3×4以及4×4矩阵。对于一般的$m\times n$矩阵（1.2），常简记为

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m; \\ j=1,2,\cdots,n; \end{matrix}$$

当$\boldsymbol{A}$的维，从前后文可以明确，或者叙述某些一般规律，维的数字无关紧要时，也直接记成

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$$

矩阵(1.2)的元素，可以是数字，也可以是其他什么对象。对于数字元素的矩阵，在全体元素皆为实数时，称为**实矩阵**，(1.1)及(1.3)中的矩阵都是实矩阵；在作为元素的数字中，出现有复数时，是**复矩阵**，如

$$\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

就是复矩阵，其中的$i=\sqrt{-1}$是虚单位。矩阵（1.2)的元素，本身也可以是矩阵，称这种以矩阵为元素的矩阵为**超矩阵**。本书主要讨论数字元素的矩阵，特别是实矩阵。

练习1 考虑矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

试问：(a)$\boldsymbol{B}$的维是什么；(b)元素b_{12}，b_{31}，b_{13}各等于什么？

练习2 写出（1.2）中的矩阵，当：（a）$m=2$，$n=3$，$a_{ij}=2i-j$；（b）$m=3$，$n=3$，$a_{ij}=|i-j|$。

2. 矩阵是怎样出现的

在人们的生活与工作中，常会涉及到矩阵。

例1　设在三家食品商店S_1，S_2，S_3里，均供应四类食品F_1，F_2，F_3,F_4。其单位量的价格(以某货币单位)见下表

$$\begin{array}{ccccc} & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ S_1 & 17 & 7 & 11 & 21 \\ S_2 & 15 & 9 & 13 & 19 \\ S_3 & 18 & 8 & 15 & 19 \end{array} \tag{1.4}$$

在顾客考虑选购食品时，就面临着要处理（价格）矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{pmatrix} \tag{1.4'}$$

这里，不同的行，是指不同的商店，而各个列则分别表示各类食品。现在的$a_{24}=19$，意即在商店S_2里，食品F_4的单价是19。在商店S_1里，每种食品各买单位量，总价为

$$17+7+11+21=56$$

等等。

例2　某小型工厂，能用一种原料制造三种产品X，Y，Z。对于每一种产品（单位量），所需的原料量及完成产品所需的时间，如下表所示

	X	Y	Z
原料（公斤）	2	3	5
时间（小时）	5	6	10

在工厂根据市场需要安排生产时，须顾及必要的条件，这就得考虑矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

例3　为了能乘座飞机，沿城市t_1，t_2，t_3，t_4旅行一周，需了解这些城市间是否有航线通航。而这种信息可从矩阵

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

获得。这里，$c_{ij}=1$或0，分别表示t_i与t_j之间是或否通航。

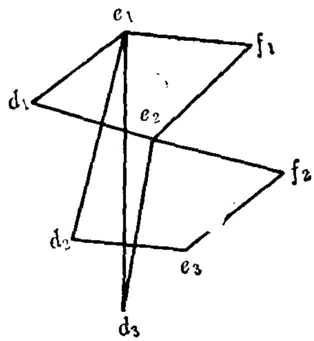

图 1.1

练习3　如图1.1所示的网络，表出了O国的三个城市与E国的三个城市，然后与F国的两个城市之间的通路情况。对D国与E国各城市的连接情况，可用矩阵

$$\begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

描述。试写出E国与F国的通路矩阵。

3. 一些特殊的矩阵

常要遇到一些特殊形式的矩阵。

在(1.2)中，$m=1$，或$n=1$的特殊情形，分别是$1\times n$矩阵

$$[a_{11}\ \ a_{12}\cdots a_{1n}]$$

及$m\times 1$矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

称这种只有一行或一列元素的矩阵为**行矩阵**或**列矩阵**．也称为**行向量**或**列向量**。或者更具体，把$1\times n$的行矩阵称为**n维行向量**，而$m\times 1$列

矩阵为**m维列向量**。作为向量的记号，常用小写黑体字母$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$等表示列向量，而把行向量记成$\boldsymbol{a}^T$，$\boldsymbol{b}^T,\cdots$等。

特别重要的是，（1.2）中$m=n$的情形。这时，称$\boldsymbol{A}$是n阶方阵或**n阶矩阵**，为强调其阶数，也记为$\boldsymbol{A}_n$。例3中出现的矩阵$\boldsymbol{C}$是4阶矩阵。

为方便起见，根据矩阵中一些元素是零的特征，可引进一些特定的名称。

首先，把元素全为零的矩阵，称为**零矩阵**，记作$\boldsymbol{O}$或$\underset{m\times n}{\boldsymbol{O}}$

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{O}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}}_{n\text{ 列}}m\text{行}$$

为进一步讨论，先定义矩阵的对角线。设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$$

这里的m可以等于n，也可以是与n不等的。把$\min\{m,n\}$记为k，即k是m与n中较小的那一个值。则称元素a_{11}，a_{22}，……a_{kk}位于$\boldsymbol{A}$的**对角线**上，称a_{ii}是$\boldsymbol{A}$的第i个**对角线元素**，有时也称对角线为**主对角线**。称a_{12}，a_{23}，等元素$a_{i,i+1}$位于$\boldsymbol{A}$的**上对角线**上，而a_{21}，a_{32}，等元素$a_{i,i-1}$位于$\boldsymbol{A}$的**下对角线**上。在下面的4×6矩阵中，现在$m=4$，$n=6$，所以$k=4$，记号δ标明了对角线元素的位置，而记号μ及λ分别指出上、下对角线元素的位置，x则是其它元素的位置

$$\begin{bmatrix}\delta&\mu&x&x&x&x\\\lambda&\delta&\mu&x&x&x\\x&\lambda&\delta&\mu&x&x\\x&x&\lambda&\delta&\mu&x\end{bmatrix}$$

如果$\boldsymbol{A}$是方阵，此时$k=m=n$，还称元素$a_{n1},a_{n-1,2},\cdots,a_{1n}$等$a_{n-i+1,i}$（$i=1,2,\cdots,n$）元素位于$\boldsymbol{A}$的**次对角线**上。容易看出，对方阵，

其左上角元素连到右下角元素的是主对角线；左下角元素连向右上角元素的是次对角线。

一个$m\times n$矩阵A，若在$i>j$时，必

$$a_{ij}=0$$

则称A是**上梯形阵**。例如，3×5的上梯形阵形如

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{pmatrix}$$

当然，位于标着x位置的那些元素，可以不是零，也可以是零。类似的，当$i<j$时必有$a_{ij}=0$，则称A是**下梯形阵**。容易看出，上（下）梯形阵是对角线以下（上）的元素全为零的矩阵。

对于方阵，上（下）梯形阵，成了**上（下）三角阵**。特别，称对角线元素全为1的上（下）三角阵为**单位上（下）三角阵**，又对角线元素全为零时是**严格上（下）三角阵**。下面示出3阶单位上三角阵及4阶严格下三角阵的一般形状

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

既是上三角阵又是下三角阵的矩阵，即只有对角线元素可能不是零，称为**对角（线）阵**，4阶的对角阵可写为

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{pmatrix}$$

为简便计，常将此对角阵记为

$$\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$$

这里的记号diag是diagonal（对角线的）一词的前4个字母。一般用

$$\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$$

表示对角线元素依次为$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$的$n$阶对角阵。如果一个对角阵的对角线元素全相等，就称之为**数量阵**或**纯量阵**。在纯量阵的对角线元素全为1时，称为**单位阵**或**么阵**，记作$\boldsymbol{I}$（也有记为$\boldsymbol{E}$的），在需要强调指出阶数n时，也记为$\boldsymbol{I}_n$。于是，

$$\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

对于方阵$\boldsymbol{A}$，若$i>j+1$时必$a_{ij}=0$，则称$\boldsymbol{A}$是**上海森堡阵**（Hessenberg），4阶上海森堡阵的一般形式为

$$\begin{pmatrix}x&x&x&x\\x&x&x&x\\0&x&x&x\\0&0&x&x\end{pmatrix}$$

若$i<j-1$时必$a_{ij}=0$，则称$\boldsymbol{A}$为**下海森堡阵**。容易看出，上海森堡的下对角线以下的元素全为零，而下海森堡阵的上对角线以上的元素全为零。如果$\boldsymbol{A}$既是上海森堡阵，又是下海森堡阵，则称$\boldsymbol{A}$是**三对角（线）矩阵**，这也是一类常会遇见的特殊形式的矩阵，其非零元素只能在三条对角线（即主对角线及上、下对角线）上出现。5阶三对角阵的一般形式为

$$\begin{pmatrix}x&x&0&0&0\\x&x&x&0&0\\0&x&x&x&0\\0&0&x&x&x\\0&0&0&x&x\end{pmatrix}$$

有一类重要的方阵，它们的对角线上方元素等于对角线以下对称位置上的元素，如

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\3&6&9&12\\4&8&12&16\end{pmatrix}$$

一般，称适合

$$a_{ij}=a_{ji} \quad (i, j=1,2,\cdots,n) \tag{1.5}$$

的 n 阶矩阵 A 为**对称阵**，通常讨论的是实矩阵，这就是**实对称阵**。对于复矩阵，可推广此定义，若适合

$$a_{ij}=\bar{a}_{ji} \quad (i, j=1,2,\cdots,n) \tag{1.6}$$

则称 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**埃尔米特阵**（Hermite），在（1.6）中元素上端的划是指取复共轭的运算。例如，下面给出的是 3 阶埃尔米特阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2i & 3+4i \\ 1+2i & 7 & 4-i \\ 3-4i & 4+i & 1 \end{pmatrix}$$

在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的元素间，适合

$$a_{ij}=-a_{ji} \tag{1.7}$$

时，称 $\boldsymbol{A}$ 为**斜对称阵**；而当 $\boldsymbol{A}$ 的元素间，满足

$$\bar{a}_{ij}=-a_{ji} \tag{1.8}$$

时，称 $\boldsymbol{A}$ 为**斜埃尔米特阵**。读者可自行写出这种矩阵的例子。按定义（1.6）与（1.8）可以看出，埃尔米特阵的对角线元素必为实数，而斜埃尔米特阵的对角线元素必为纯虚数。另外，也容易看出，斜对称矩阵的对角线元素一定是零。

练习4　对下面所列的两个矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -10/7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分别指出它们的前两个主对角线元素，说明它们是否为上或下梯形阵。

练习5　对下列矩阵，指出它们是否为上（下）海森堡阵？三对角阵？上（下）三角阵？对角阵？数量阵？单位阵？

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$