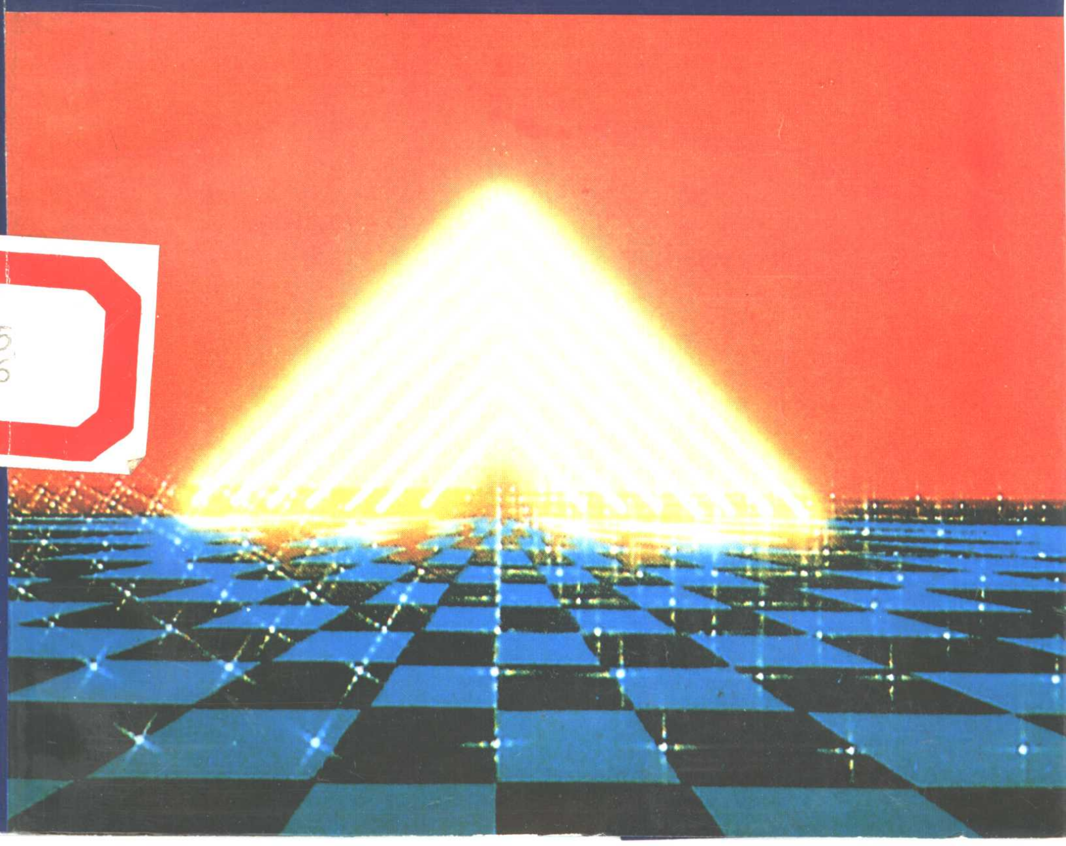
当代数学园地 1

Kac-Moody 代数导引

21 数学天元基金

万哲先 著

科学出版社



当代数学园地 1

Kac-Moody 代数导引

万哲先 著

科学出版社

1993

(京)新登字092号

内 容 简 介

Kac-Moody 代数是近代数学中发展极为迅速的一个分支，在理论物理学、力学及许多数学分支中都有重要的应用．本书详细论述 Kac-Moody 代数的基本理论，并介绍近年来国内外有关 Lie 代数的一些最新成果．阅读本书只需线性代数及有限维单 Lie 代数的基础知识．

本书可供大学数学系、物理系和力学系的学生、研究生、教师及有关的科学工作者参考．

当代数学园地 1

Kac-Moody 代数导引

万 哲 先 著

责任编辑 吕 虹

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1993年12月第一次印刷 印张：5 5/8

印数：1—1 700 字数：143 000

ISBN 7-03-003423-6/O·616

定价：6.60元

《当代数学园地丛书》前言

《当代数学园地》是由国家自然科学基金会数学天元基金支持出版的．该项基金是为“我国数学在21世纪率先赶上世界先进水平”这一目标而设的．这也是本丛书的出版目的．中国数学要跃入世界前列，光靠从国外引入尖子是不行的．在大学以上层次，增强对现代数学思想的训练及对现代数学发展的了解，很有必要．事实上，只有这样，才会使一批尖子人才，在中国成长壮大．

本丛书包含数学专著、译著、讲义和通俗读物，其宗旨是以不拘一格的形式向数学研究者、教育工作者，以及数学专业的研究生和大学生传播当今数学的最新发展．包括新理论、新概念、新方法、新思想和新动态．因此，它的组织原则有二条：一、取材新．二、可读性强．

所谓取材新，意味着书的内容须为中文图书中不多见者，尤其欢迎来自崭新的数学分支，或者当今十分活跃的数学方向的题材．这是本丛书有别于其它丛书的基本特点．

所谓可读性强，意味着书须写得通俗易懂，起点要低，终点要高，最好图文并茂．这条原则对列入丛书的专著和讲义也不例外．换句话说，即使是专著和讲义，也要尽力在文笔上、组织上下功夫，达到生动活泼，深入浅出，照顾到所提及的读者面．

本丛书欢迎符合上述两原则的各类书稿，篇幅可大可小．特别欢迎优秀留学人员来稿．对怀有报效祖国之心、但由于种种原因暂时不能回归祖国的留学人员来说，利用书的形式使自己的知识能为祖国的科学技术发展做份贡献，这是切实可行，也是深受欢迎的好事．让我们大家携起手来，不分国内、国外，不分资历深浅，

共同为我国数学的发展，及在21世纪率先赶上世界先进水平而努力！

《当代数学园地》编委会

序　言

1968 年，V. Kac 和 R. Moody 各自独立地引入了 Kac-Moody 代数。近年来，Kac-Moody 代数发展迅速，至今已成现代数学的一个重要的分支。本书是 Kac-Moody 代数的导引。

1948 年 C. Chevalley 在《Comptes Rendus》上发表了一篇短文。这篇论文不仅包含了 E. Cartan 关于有限维复半单 Lie 代数表示的一个定理的统一的代数证明，而且还提出了许多重要的概念。这些概念成为 Kac-Moody 代数的基本概念。特别地，他证明了对于任何秩为 n 的有限维复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 存在 $3n$ 个生成元 $e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_n,\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee$，满足下面的关系：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}[\alpha_i^\vee,\alpha_j^\vee]=0\\ [e_i,f_j]=\delta_{ij}\alpha_i^\vee\\ [\alpha_i^\vee,e_j]=a_{ij}e_j,[\alpha_i^\vee,f_j]=-a_{ij}f_j\end{array}\right\} i,j=1,2,\cdots,n,\\ (ad\,e_i)^{1-a_{ij}}e_j=0,(ad\,f_i)^{1-a_{ij}}f_j=0,\ i\neq j,\end{array}\right\}, \tag{1}$$

其中 a_{ij} 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 整数。所有的 a_{ij} 构成所谓的 Cartan 矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$。A 满足下面的性质：

(C1) $a_{ii}=2,i=1,2,\cdots,n$;

(C2) 对于 $i\neq j$，a_{ij} 是非正整数；

(C3) $a_{ij}=0$ 蕴涵着 $a_{ji}=0$;

(C4) A的所有主子式都是正的。

其后，在 1966 年 J. P. Serre 证明了 (1) 就是有限维复半单 Lie 代数的定义关系。

Kac 和 Moody 的想法是：去掉条件 (C4) 而从仅满足(C1)，(C2) 和 (C3) 的矩阵A(称为广义 Cartan 矩阵)开始，同样可以定义一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}'(A)$ 它有 $3n$ 个生成元 $e_i,f_i,\alpha_i^\vee(i=1,\cdots,n)$ 并满足 (1)。一般地，$\mathfrak{g}'(A)$ 是无限维的。Kac 和 Moody 建

立了关于 $\mathfrak{g}'(A)$ 的出色的代数理论. 由于广义 Cartan 矩阵可以是退化的，所以定义在 $\mathfrak{h}=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{C}\alpha_i^\vee$ 上的线性函数 α_j, $j=1, 2, \cdots, n$, $[h, e_j]=\alpha_j(h)e_j$, $h\in\mathfrak{h}$ 可以是线性相关的. Kac 和 Moody 通过扩大 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 而使 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关. 这样我们就得到了 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$，称为矩阵 A 的 Kac-Moody 代数. 第一章就是构造 $\mathfrak{g}(A)$ 并研究它的基本性质.

第二章讨论 Kac-Moody 代数的分类. Kac-Moody 代数的分类可以归结为广义 Cartan 矩阵的分类. 广义 Cartan 矩阵可以分为三类: 有限型、仿射型和不定型. 有限型广义 Cartan 矩阵就是人们熟知的通常的 Cartan 矩阵. 仿射型广义 Cartan 矩阵的分类已由 Kac 和 Moody 分别独立地得到. 然而，不定型广义 Cartan 矩阵的分类还远没有完成.

在有限维复半单 Lie 代数的理论中有四个主要的工具: 根链(或更一般地，权链)，Weyl 群，Killing 型和 Casimir 元素. 所有这些已经被 Kac 和 Moody 推广到了 Kac-Moody 代数上，前二个对任意 Kac-Moody 代数都有，而后二者仅对可对称化的 Kac-Moody 代数才有. $\mathfrak{g}(A)$ 称为可对称化的，如果 A 可以写成 $A=DB$，其中 D 是一个非退化对角矩阵，B 是一个对称矩阵. 这些内容将在以后各章中讨论.

仿射型 Kac-Moody 代数的具体实现，它们的根系和 Weyl 群已由 Kac 和 Moody 得到. 这些将在本书中详细讨论.

最后我们将简单介绍一下 Kac-Moody 代数的表示理论.

近年来，Kac-Moody 代数引起了许多数学家和数学物理学家的注意，这主要是因为 Kac-Moody 代数与许多不同的数学和数学物理分支有着紧密的联系并具有广泛的应用. 因为本书仅仅是 Kac-Moody 代数的导引，所以不涉及这些内容. 对此感兴趣的作者可以参看最近的文献.

在准备本书过程中，作者得到了李福安、李旺来、张贺春、赵开明博士们的许多帮助，特此致谢.

作者

目　录

第一章 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$

在这一章中,对于任意的 $n\times n$ 复矩阵 A, 我们构造一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$, 并研究它的性质.

1.1 $n\times n$ 复矩阵 A 的实现

对于任意的 $n\times n$ 复矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $\operatorname{rank}A=l$, 我们定义 A 的实现是一个三元组 $(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^{\vee})$, 其中 $\mathfrak{h}$ 是一个有限维空间. $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\subset\mathfrak{h}^*$; $\Pi^{\vee}=\{\alpha_1^{\vee},\cdots,\alpha_n^{\vee}\}\subset\mathfrak{h}$, 并满足下面两个条件:

(i) Π 和 $\Pi^{\vee}$ 都是线性无关的;

(ii) $\langle\alpha_i^{\vee},\alpha_j\rangle=a_{ij}$, $i,j=1,\cdots,n$,

其中 $\langle\,,\rangle$: $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}^*\to\mathbf{C},\langle h,\alpha\rangle=\alpha(h)$.

命题 1.1 若 $(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^{\vee})$ 是 A 的一个实现, 那么 $\dim\mathfrak{h}\geqslant 2n-l$. 进一步地, 存在 A 的一个实现 $(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^{\vee})$ 使得 $\dim\mathfrak{h}=2n-l$. 这个实现称为 A 的**极小实现**. A 的极小实现在同构意义下是唯一的. 这样的同构是唯一的当且仅当 $\det A\neq 0$. (A 的极小实现之间的同构将在证明中定义.)

证 假设 $\dim\mathfrak{h}=m$. 在 $\Pi^{\vee}$ 上添加 $\alpha_{n+1}^{\vee},\cdots,\alpha_m^{\vee}$ 使其构成 $\mathfrak{h}$ 的一组基,在 Π 上添加 $\alpha_{n+1},\cdots,\alpha_m$ 使其构成 $\mathfrak{h}^*$ 的一组基. 那么矩阵

$$(\langle\alpha_i^{\vee},\alpha_j\rangle)_{i,j=1}^{m}$$

是非退化的. 因此由前 n 行构成的子矩阵的秩为 n. 但是在左上角的 $n\times n$ 子矩阵是 A, $\operatorname{rank}A=l$. 所以右上角的 $n\times(m-n)$ 子矩阵的秩 $\geqslant n-l$. 这样就有 $m-n\geqslant n-l$. 因此 $m\geqslant 2n-l$.

现在我们来证明 A 的极小实现的存在性。适当调整 A 的指标，我们可以假设

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 是 $l\times l$ 阶非退化子矩阵。考虑 $(2n-l)\times(2n-l)$ 矩阵

$$C=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{21} & A_{22} & I_{n-l}\\ 0 & I_{n-l} & 0\end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 I_{n-l} 表示 $(n-l)\times(n-l)$ 阶单位矩阵。由于 $\det C=\pm\det A_{11}$，所以 C 是非退化的。这样取 $\mathfrak{h}=\mathbf{C}^{2n-l}$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 $\mathbf{C}^{2n-l}$ 的前 n 个坐标函数；$\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee$ 为 C 的前 n 个行向量，我们就得到了 A 的一个极小实现：$(\mathfrak{h},\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\{\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee\})$。

设 $(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^\vee)$ 和 $(\mathfrak{h}_1,\Pi_1,\Pi_1^\vee)$ 是 A 的两个极小实现，其中 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，$\Pi^\vee=\{\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee\}$，$\Pi_1=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，$\Pi_1^\vee=\{\beta_1^\vee,\cdots,\beta_n^\vee\}$，我们称两个极小实现是同构的，如果存在向量空间的同构 $\varphi:\mathfrak{h}\simeq\mathfrak{h}_1$ 使得 $\varphi(\alpha_i^\vee)=\beta_i^\vee$ 并且 $\varphi^*(\beta_i)=\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$。其中 φ^* 表示由 φ 所诱导的向量空间的同构 $\varphi^*:\mathfrak{h}_1^*\to\mathfrak{h}^*$，$<h,\varphi^*(\beta 1\rangle=\langle\varphi(h),\beta\rangle$，$\forall h\in\mathfrak{h}$，$\beta\in\mathfrak{h}_1^*$。

设 $(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^\vee)$ 是上面所构造的 A 的极小实现，$(\mathfrak{h},\Pi_1,\Pi_1^\vee)$ 是 A 的另一个极小实现。我们在 $\Pi_1^\vee$ 上添加 $\beta_{n+1}^\vee,\cdots,\beta_{2n-l}^\vee$ 使其构成 $\mathfrak{h}_1$ 的一组基。选取 $\beta_{n+1},\cdots,\beta_{2n-l}\in\mathfrak{h}_1^*$ 使得

$$(\langle\beta_i^\vee,\beta_j\rangle)_{i,j=1}^{2n-l}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{21} & A_{22} & I\\ B_1 & B_2 & 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

由于 $\{\beta_1^\vee,\cdots,\beta_{2n-l}^\vee\}$ 是 $\mathfrak{h}_1$ 的一组基，而 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是线性无关的，所以子矩阵

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ B_1 & B_2\end{pmatrix}$$

是非退化的．因此矩阵(2)是非退化的，从而 $\beta_1, \cdots, \beta_{2n-l}$ 是 $\mathfrak{h}_1^*$ 的基．由于 A_{11} 是非退化的，所以把(2)的前 l 行的适当的线性组合加到后 $n-l$ 行上去，我们就可以假设 $B_1=0$，这样 B_2 是非退化的。在满足 $B_1=0$ 的矩阵(2)上左乘

$$\begin{pmatrix} I_l & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-l} & 0 \\ 0 & 0 & B_2^{-1} \end{pmatrix},$$

我们就可以假设(2)具有形式(1)．因此极小实现在同构的意义下是唯一的．

命题中的最后一个断言是显然的． □

注意，若 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ 是 A 的一个极小实现，则 $(\mathfrak{h}^*, \Pi^\vee, \Pi)$ 是 ${}^tA$ 的一个极小实现。

1.2 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$的构造

设 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ 是一个秩为 l 的 $n\times n$ 复矩阵．取定 A 的一个极小实现 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$． 下面我们分两步来构造 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$．首先我们作一个辅助 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$． $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 具有生成元 $e_i, f_i (i=1,2,\cdots,n)$ 和 $\mathfrak{h}$，并满足下列定义关系:

(i) $[h,h']=0, h,h'\in\mathfrak{h}$;

(ii) $[e_i,f_j]=\delta_{ij}\alpha_i^\vee, i,j=1,\cdots,n$;

(iii) $[h,e_i]=\langle h,\alpha_i\rangle e_i$, $[h,f_i]=-\langle h,\alpha_i\rangle f_i$, $h\in\mathfrak{h}$, $i=1,\cdots,n$。

显然，在同构的意义下 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 仅依赖于 A。

用 $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (或 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) 表示由 $e_1,\cdots,e_n$ (或 $f_1,\cdots,f_n$) 生成的 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的子代数．那么我们有

定理 1.2 (a) 映射 $e_i\to -f_i$, $f_i\to -e_i (i=1,\cdots,n)$, $h\to -h (h\in\mathfrak{h})$ 可以唯一地扩充成 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的一个对合自同构 $\tilde{\omega}$。

(b) $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (或 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) 由 $e_1,\cdots,e_n$ (或 $f_1,\cdots,f_n$) 自由生成。

(c) $\tilde{\mathfrak{g}}(A)=\tilde{\mathfrak{n}}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (向量空间的直和)，

证 (1) 由于 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的定义关系在映射 $l_i \to -f_i$, $f_i \to -e_i(i=1,\cdots,n)$, $h \to h(h \in \mathfrak{h})$ 下不变，所以 (a) 是显然的。

(2) 设 V 是一个 n 维复向量空间，$\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 V 的一组基。用 $T(V)$ 表示 V 上的张量代数，$T(V)$ 是一个分次代数

$$T(V) = \bigoplus_{s=0}^{\infty} T^s(V).$$

$\{1\}$是 $T^0(V) = \mathbf{C}$ 的基，$\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_s},\ 1 \leqslant i_1, \cdots, i_s \leqslant n\}$ 是 $T^s(V)$ 的一组基。对于 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，按照如下方式定义 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的生成元在 $T(V)$ 上的作用：

$$\begin{cases} h \cdot 1 = \langle h, \lambda \rangle 1, \\ h \cdot (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_s}) = \langle h, \lambda - (\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s}) \rangle \\ \qquad v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_s}, \ h \in \mathfrak{h}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_j \cdot 1 = v_j, \\ f_j(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_s}) = v_j \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_s}, \end{cases} \quad j = 1, \cdots, n,$$

$$\begin{cases} e_j \cdot 1 = 0, \\ e_j \cdot v_i = \delta_{ji} \langle \alpha_j^\vee, \lambda \rangle 1, \\ e_j \cdot (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_s}) = v_{i_1} \otimes e_j(v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_s}) + \delta_{j i_1} \langle \alpha_j^\vee, \\ \qquad \lambda - (\alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_s}) \rangle\ v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_s}, j = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

直接验证即知如上定义了 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 在空间 $T(V)$ 上的一个表示 ϕ_λ。

(3) 设 $T(V)_l$ 是以 $T(V)$ 为底空间的 Lie 代数，它的方括号运算为：$[x, y] = xy - yx$. 那么由 $v_1, \cdots, v_n$ 生成的 $T(V)_l$ 的子代数 $\mathfrak{g}$ 就是 $v_1, \cdots, v_n$ 上的自由 Lie 代数。

对于 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，我们定义映射

$$\phi: \tilde{\mathfrak{n}}_- \to T(V)_l, y \to \phi(y) = \phi_\lambda(y)(1) = y \cdot 1, \forall y \in \tilde{\mathfrak{n}}.$$

ϕ 把 f_i 映到 v_i 且 ϕ 是 Lie 代数的同态，$\phi(\tilde{\mathfrak{n}}_-) = \mathfrak{g}$. 为方便起见，我们用 $[f_{i_1}, \cdots f_{i_{r-1}}, f_{i_r}]$ 代替 $[f_{i_1}, \cdots, [f_{i_{r-1}}, f_{i_r}]]$.
那么

$$\phi([f_{i_1}, \cdots, f_{i_r}]) = \phi_\lambda([f_{i_1}, \cdots, f_{i_r}])(1) = [\phi_\lambda(f_{i_1}), \cdots, \\ \phi_\lambda(f_{i_r})](1) = [v_{i_1}, \cdots, v_{i_r}].$$

这样，

$$
\begin{aligned}
\phi([[f_{i_1},\cdots,f_{i_r}],[f_{j_1},\cdots,f_{j_s}]]) &= \phi_\lambda([[f_{i_1},\cdots,f_{i_r}],\\
&\qquad [f_{j_1},\cdots,f_{j_s}]])(1)\\
&= [[\phi_\lambda(f_{i_1}),\cdots,\phi_\lambda(f_{i_r})],[\phi_\lambda(f_{j_1}),\cdots,\phi_\lambda(f_{j_s})]](1)\\
&= [\phi([f_{i_1},\cdots,f_{i_r}]),\phi([f_{j_1},\cdots,f_{j_s}])].
\end{aligned}
$$

由于 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ 由所有形如 $[f_{i_1},\cdots,f_{i_r}]$ 的元素的线性组合组成，因此我们就证明了 ϕ 是 Lie 代数的同态。因为 $\mathfrak{g}$ 由所有形如 $[\nu_{i_1},\cdots,\nu_{i_r}]$ 的元素的线性组合组成，所以 $\phi(\tilde{\mathfrak{n}}_-)=\mathfrak{g}$。由于 $\mathfrak{g}$ 是由 $\nu_1,\cdots,\nu_n$ 生成的自由 Lie 代数，所以 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ 是由 $f_1,\cdots,f_n$ 生成的自由 Lie 代数。把 $\tilde{\omega}$ 作用到 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ 上我们即知 $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ 是由 $l_1,\cdots,l_n$ 生成的自由 Lie 代数。这样 (b) 得证。

(4) 为了证明 (c)，我们先来证明 $T(V)$ 是 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ 的通用包络代数。由 (3) 我们知道存在线性映射 $\phi:\tilde{\mathfrak{n}}_-\to T(V)$ 使得 $\phi([y_1,y_2])=\phi(y_1)\phi(y_2)-\phi(y_2)\phi(y_1)$，$y_1,y_2\in\tilde{\mathfrak{n}}_-$。用 $U(\tilde{\mathfrak{n}}_-)$ 表示 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ 的通用包络代数，那么存在唯一的代数同态 $\phi_1:U(\tilde{\mathfrak{n}}_-)\to T(V)$ 使得下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
 & U(\tilde{\mathfrak{n}}_-) \arrow[d, "\phi_1"] \\
\tilde{\mathfrak{n}}_- \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\phi"'] & T(V)
\end{tikzcd}
$$

其中 $i:\tilde{\mathfrak{n}}_-\to U(\tilde{\mathfrak{n}}_-)$ 是嵌入。另一方面 $T(V)$ 是 V 上的张量代数，$U(\mathfrak{n}_-)$ 是由 $f_1,\cdots,f_n$ 生成的结合代数，于是存在唯一的代数同态 $\phi_2:T(V)\to U(\tilde{\mathfrak{n}}_-)$ 使下图交换

$$
\begin{tikzcd}
 & U(\tilde{\mathfrak{n}}_-) \\
V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"] & \\
 & T(V) \arrow[uu, "\phi_2"']
\end{tikzcd}
$$

其中 i 和 i' 都是嵌入。易证 $\phi_1\circ\phi_2=1_{T(V)}$，$\phi_2\circ\phi_1=1_{U(\mathfrak{n}_-)}$。因此 $T(V)\simeq U(\tilde{\mathfrak{n}}_-)$。这就证明了 $T(V)$ 是 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ 的通用包络代数。

(5) 令 $\mathfrak{a}=\tilde{\mathfrak{n}}_-+\mathfrak{h}+\tilde{\mathfrak{n}}_+$。利用 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的定义关系，我们可以知道 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathrm{ad}\,e_i$，$\mathrm{ad}\,f_i(i=1,\cdots,n)$ 和 $\mathrm{ad}\,h(h\in\mathfrak{h})$ 下不变，因此 $\mathfrak{a}$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的理想。但 $\mathfrak{a}$ 包含 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的所有生成元，所以

$\tilde{\mathfrak{g}}(A)=\tilde{\mathfrak{n}}_-+\mathfrak{h}+\tilde{\mathfrak{n}}_+$. 设 $n_-+h+n_+=0$，其中 $n_-\in\tilde{\mathfrak{n}}_-$，$h\in\mathfrak{h}$，$n_+\in\tilde{\mathfrak{n}}^+$. 于是 $0=\phi_\lambda(n_-+h+n_+)(1)=n_-\cdot 1+\langle h,\lambda\rangle\cdot 1$. 注意 $n_-\cdot 1\in\bigoplus_{i=1}^{\infty}T^i(V)$，$\langle h,\lambda\rangle\cdot 1\in T^0(V)$，所以 $n_-\cdot 1=0$，$\langle h,\lambda\rangle\cdot 1=0$，于是 $h=0$. 由于 $T(V)$ 是 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ 的通用包络代数，映射

$$\phi:\tilde{\mathfrak{n}}_-\to T(V)$$
$$y\to y\cdot 1,\ y\in\tilde{\mathfrak{n}}_-$$

是嵌入映射. 由 $n_-\cdot 1=0$ 我们得到 $n_-=0$. 于是 $n_+=0$. 这样我们就证明了 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)=\tilde{\mathfrak{n}}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\tilde{\mathfrak{n}}_+$. □

推论 1.2 映射 $\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbf{C}f_i\right)\oplus\mathfrak{h}\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbf{C}e_i\right)\to\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 是单射.

现在介绍一些术语. Π 称为**根基**，$\Pi^\vee$ 称为**余根基**，Π（或 $\Pi^\vee$）中的元素称为素根(或余素根). 令

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Z}\alpha_i,\quad Q_+=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Z}_+\alpha_i,$$

其中 $\mathbf{Z}_+$ 表示非负整数的集合. Q 称为**根格**，对于 $\alpha=\sum_i k_i\alpha_i\in Q$，$ht\alpha=\sum_i k_i$ 称为 α 的**高度**. 在 $\mathfrak{h}^*$ 中引入偏序“$\geqslant$”：$\lambda\geqslant\mu$，如果 $\lambda-\mu\in Q_+$.

设 M 是一个 Abel 群. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个 ***M* 分次**是 $\mathfrak{g}$ 的一个直和分解

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{\alpha\in M}\mathfrak{g}_\alpha$$

使得 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subset\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，$\alpha,\beta\in M$.

定理 1.2（续） (d) $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 是一个 Q 分次 Lie 代数，准确地说，我们有 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根空间分解：

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A)=\left(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}}\tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}\right)\oplus\tilde{\mathfrak{g}}_0\oplus\left(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}}\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha\right),\tag{3}$$

其中 $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha=\{x\in\tilde{\mathfrak{g}}(A)\mid[h,x]=\langle h,\alpha\rangle x\}$. 进一步，$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ 可以如下

刻划：$\tilde{\mathfrak{g}}_0=\mathfrak{h}$，对于 $\alpha\in Q_+$，$\alpha\neq 0$，$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha=\sum\limits_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_r}=\alpha}\mathbb{C}[e_{i_1},\cdots,e_{i_r}]$，$\tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}=\sum\limits_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_r}=\alpha}\mathbb{C}[f_{i_1},\cdots,f_{i_r}]$。并且 $\dim\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha<\infty$。对于 $\pm\alpha\in Q_+,\alpha\neq 0$，$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha\subset\tilde{\mathfrak{n}}_\pm$，$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$。

(e) 存在 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的唯一的极大理想 $\mathfrak{r}$，$\mathfrak{r}$ 与 $\mathfrak{h}$ 的交是平凡的。进一步，$\mathfrak{r}=(\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_-)\oplus(\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_+)$。且 $\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_\pm$ 都是 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的理想。

证 由于 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 在 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 上的作用是对角的，所以我们有

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A)=\tilde{\mathfrak{g}}_0\oplus\left(\bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathfrak{h}^*\\ \alpha\neq 0}}\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha\right).$$

对于 $\alpha\in Q_+$，$\alpha\neq 0$，令

$$M_\alpha=\sum_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_r}=\alpha}\mathbb{C}[e_{i_1},\cdots,e_{i_r}],$$

$$M_{-\alpha}=\sum_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_r}=\alpha}\mathbb{C}[f_{i_1},\cdots,f_{i_r}].$$

显然 $M_\alpha\subset\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$，$M_{-\alpha}\subset\tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$ 且 $\mathfrak{h}\subset\tilde{\mathfrak{g}}_0$。由 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的定义关系我们知道 $\mathfrak{a}=\mathfrak{h}\oplus\left(\bigoplus\limits_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}}M_\alpha\right)\oplus\left(\bigoplus\limits_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}}M_{-\alpha}\right)$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的子代数，但 $\mathfrak{a}$ 包含 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的生成元，所以 $\mathfrak{a}=\tilde{\mathfrak{g}}(A)$，$\tilde{\mathfrak{g}}_0=\mathfrak{h}$，$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha=M_\alpha$，$\alpha\in Q_\pm$，$\alpha\neq 0$。进一步，$\dim\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha\leqslant n^{|\mathrm{ht}\,\alpha|}<\infty$，$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha\subseteq\tilde{\mathfrak{n}}_\pm$，$\pm\alpha\in Q_+$，$\alpha\neq 0$。任取 $x\in\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$，$y\in\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$，$h\in\mathfrak{h}$。那么 $(\mathrm{ad}\,h)([x,y])=\langle h,\alpha+\beta\rangle[x,y]$，所以 $[\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha,\tilde{\mathfrak{g}}_\beta]\subseteq\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha+\beta}$。

为了证明 (e)，我们需要下面的引理。

引理 1.2 设 $\mathfrak{h}$ 是一个交换 Lie 代数，V 是一个 $\mathfrak{h}$ 模，对于 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$，令

$$V_\lambda=\{v\in V\,|\,h\cdot v=\langle h,\lambda\rangle v,h\in\mathfrak{h}\}.$$

假设 $V=\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}V_\lambda$。如果 U 是 V 的一个 $\mathfrak{h}$ 子模，那么

$$U=\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}(U\cap V_\lambda).$$

证 对任意的 $u\in U$，记 $u=v_{\lambda_1}+\cdots+v_{\lambda_m}$，其中 $v_{\lambda_i}\in V_{\lambda_i}(i=1,\cdots,m)$ 且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 中不同的元素. 那么存在 $h\in\mathfrak{h}$ 使得 $\langle h,\lambda_1\rangle,\cdots,\langle h,\lambda_m\rangle$ 是互不相同的. 于是

$$h^i\cdot u=\langle h,\lambda_1\rangle^i v_{\lambda_1}+\cdots+\langle h,\lambda_m\rangle^i v_{\lambda_m},$$
$$i=0,1,\cdots,m-1.$$

这是一组关于 $v_{\lambda_1},\cdots,v_{\lambda_m}$ 的线性方程组，其系数矩阵的行列式非零(Vandermonde 行列式).因此 $v_{\lambda_1},\cdots,v_{\lambda_m}$ 可以由 $h^i\cdot u(i=0,1,\cdots,m-1)$ 线性表示. 所以 $v_{\lambda_1},\cdots,v_{\lambda_m}\in U$. □

推论 1.2 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的所有理想都是 Q 分次的.

现在我们来证明定理 1.2(e). 设 $\mathfrak{r}_1$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的理想，$\mathfrak{r}_1\cap\mathfrak{h}=0$. 由上面的推论，

$$\mathfrak{r}_1=\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q\\ \alpha\neq 0}}(\mathfrak{r}_1\cap\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha).$$

因此 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的所有与 $\mathfrak{h}$ 有平凡交的理想的和仍与 $\mathfrak{h}$ 有平凡交，所以这个理想 $\mathfrak{r}$ 就是 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的与 $\mathfrak{h}$ 有平凡交的唯一的极大理想，由上面的推论，

$$\mathfrak{r}=(\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}_-)\oplus(\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}_+).$$

显然 $[f_i,\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_-]\subset\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_-$，$[h,\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_-]\subset\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_-(h\in\mathfrak{h})$. 由于 $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{h}=0$，于是 $[e_i,\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_-]\subset\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_-$. 所以 $\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_-$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的理想.类似地，$\mathfrak{r}\cap\tilde{\mathfrak{n}}_+$ 也是 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的理想. □

1.3 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ 的构造(续)

我们继续构造 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$. 令

$$\mathfrak{g}(A)=\tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r},$$

并称 $\mathfrak{g}(A)$ 为**矩阵 A 的 Lie 代数**.

我们把 e_i，f_i，$\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}(A)$ 中的像仍记为 e_i，f_i，$\mathfrak{h}$. $\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的 Cartan **子代数**. e_i，$f_i(i=1,\cdots,n)$ 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的 **Chevalley 生成元**.

定理 1.3 (a) $\mathfrak{g}(A)$ 是 Q 分次 Lie 代数. 确切地说