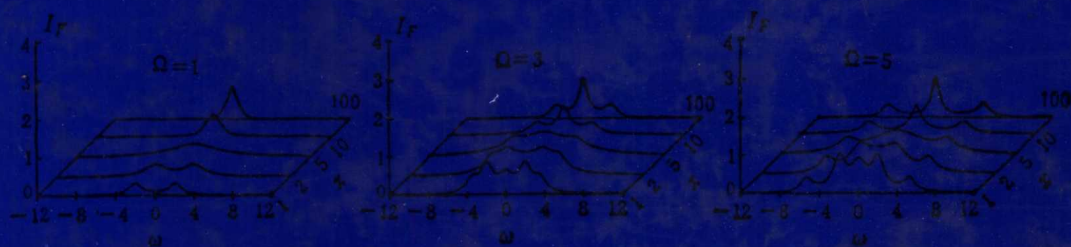


# 非线性 与 量子光学

谭维翰 著



科学出版社

# 非线性与量子光学

谭维翰 著

科学出版社

1996

(京) 新登字 092 号

## 内 容 简 介

本书从光与物质相互作用的非线性与量子性出发,对 20 多年来在非线性与量子光学领域中的最新研究成果给予了从实验到理论的系统介绍。前五章主要偏重基础理论,包括非线性介质中的波、光与物质相互作用的经典与量子理论,二能级、三能级密度矩阵,原子缀饰态,激光振荡理论等;后五章主要介绍最新发展,包括光的相干与统计性质,共振荧光与微腔的 Q.E.D.,激光偏转原子束,超短脉冲传输与锁定,以及光学噪声分岔与混沌。

本书可供高等院校物理与激光专业的本科生和相关专业的研究生阅读,也可供从事物理基础理论研究和应用的科研人员参考。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

非线性与量子光学 / 谭维翰著. - 北京: 科学出版社, 1996

ISBN 7-03-004952-7

I. 非… II. 谭… III. ①非线性光学, ②量子光学 IV. ① 0437  
② 0431

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 16164 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1996 年 5 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1996 年 5 月第一次印刷 印张: 25 1/2

印数: 1-1 360 字数: 588 000

定价: 42.00 元

# 前 言

自1960年第一台激光器在实验室诞生以来,激光技术经历了一个迅猛的发展时期,它对非热平衡辐射量子统计、非线性光学、光与原子相互作用等一些基本物理问题的研究带来了一次次的冲击与促进,使我们在实验室里观察到激光所具有的非热平衡辐射的Poisson分布,并用强光通过非线性介质,观察到二次与高次谐波等;使我们认识到原子的自发辐射跃迁几率会随微腔的尺寸而变化. 30多年来,这种对基本物理问题研究的冲击一直没有减弱,相反却愈来愈频繁. 例如,压缩态光和群聚、反群聚光等非经典光场的产生与应用,激光冷却原子技术与原子光学,皮秒、飞秒脉冲与光孤子的产生与应用,激光的不稳定性、光学双稳态、光学混沌、时间及空间分岔与混沌现象等. 早期Sargent等的“*Laser Physics*”、Louisell的“*Quantum Statistical Properties of Radiation*”、Haken的“*Hand buch der Physik*”,还有Bloembergen的“*Nonlinear Optics*”、沈元壤的“*The Principles of Nonlinear Optics*”等著作,对非线性光学与量子光学的研究起了很大的促进与推动作用. 但如何从包括非线性与量子光学在内更为广泛而基础的角度去论述上述这些物理现象,并从方法上予以统一的描述,将是一个很有意义的问题. 本书就是这样的一种尝试. 本书前五章偏重基础,后五章主要阐述最新的发展. 第一章主要从数学方面讨论非线性介质波传播的性质、几种典型的非线性方程以及孤立波理论等. 第二章讨论光与物质相互作用的经典与量子理论,包括光学波波相互作用、非线性极化展开、量子力学微扰论及密度矩阵等. 第三、四章介绍二能级、三能级密度矩阵方程的解,是第二章所述理论的发展与应用,包含了二能级原子矢量模型、面积演化定理,以及近年来无反转激光的最新研究成果. 在介绍已有的原子缀饰模型的基础上,主要叙述原子的部分缀饰态以及在强场微扰论中的应用. 第五章叙述激光振荡理论,包括激光振荡半经典理论、热库模型理论、全量子理论等内容. 第六章讨论光的相干统计性质,包括相干态、群聚、反群聚态和压缩态等实验物理背景、理论处理以及在物理测量中的应用. 第七章介绍共振荧光与微腔的量子电动力学实验与理论. 第八章阐述激光偏转原子束,包括激光冷却与原子光学等. 第九章介绍超短光脉冲的传播与锁定,包括染料锁模激光、碰撞锁模、啾啾效应及快饱和吸收锁模激光. 第十章论述激光噪音、分岔与混沌,包括激光噪音的随机过程理论、决定性混沌理论、光学双稳态、分岔混沌和时空混沌等. 在叙述这些内容的同时,每章后面均附有大量参考文献.

包括非线性与量子效应在内的光学现象,是一个内容丰富,但又互为交错的物理现象,非经典光场的产生离不开光学参量或四波混频等非线性相互作用. 将这些内容放在一起叙述会有些好处,但难度大为增加了. 由于作者水平有限,对书中差错与疏漏之处,请广大读者批评指正.

在写完本书初稿后,承蒙曹昌祺教授阅了全书,并提出了宝贵意见,对此表示衷心的感谢. 李青宁、许文沧、刘仁红、马国彬等同志在书稿的打印方面做了许多工作,也在此表示感谢.

谭维翰

040254/06

# 目 录

<b>第一章 非线性介质中的波</b> .....	(1)
1.1 波的传播与波追赶 .....	(1)
1.2 线性波 .....	(2)
1.3 非线性波 .....	(4)
1.4 耗散波、激波与色散波 .....	(7)
1.5 波的自聚与非线性 Schrödinger 方程 .....	(8)
1.6 自感透明现象与 sine-Gordon 方程 .....	(9)
1.7 三波相互作用 .....	(10)
1.8 非线性相互作用中的孤立波理论 .....	(12)
1.8.1 关于孤立波的记载 .....	(12)
1.8.2 逆散射方法 .....	(13)
1.8.3 二分量孤立波方程 .....	(16)
1.8.4 直接解孤立波方程法 .....	(18)
1.9 非线性 Schrödinger 方程的逆散射解 .....	(18)
1.10 非线性 Schrödinger 方程逆散射解的初值问题 .....	(21)
1.11 周期的孤立波解的初期问题 .....	(24)
<b>第二章 光与非线性介质相互作用的经典与量子理论</b> .....	(31)
2.1 非线性相互作用的经典理论 .....	(31)
2.1.1 电磁波在非线性介质中的传播 .....	(31)
2.1.2 极化率张量的对称性 .....	(33)
2.2 光学中的波波相互作用 .....	(36)
2.2.1 三波耦合 .....	(36)
2.2.2 四波耦合 .....	(40)
2.3 光与非线性介质相互作用的量子理论 .....	(44)
2.4 弱场微扰法解 Schrödinger 方程 .....	(45)
2.5 密度矩阵方程及其微扰解法 .....	(49)
2.5.1 密度矩阵方程 .....	(49)
2.5.2 用微扰法解密度矩阵方程 .....	(51)
2.6 波场 $\psi(r, t)$ 的量子化 .....	(53)
2.7 绝热定理与 Berry 位相 .....	(56)
2.8 自离化共振态 .....	(58)
2.8.1 自离化共振态 .....	(58)
2.8.2 Fano 的自离化 (AI) 态理论 .....	(59)
<b>第三章 二能级系统的密度矩阵求解</b> .....	(64)
3.1 二能级原子密度矩阵的矢量模型 .....	(64)

3.2	Bloch 方程及其解	(66)
3.3	线性吸收与饱和吸收	(68)
3.4	光学章动与自由感生衰变	(70)
3.5	浸渐近似	(71)
3.6	光脉冲传播的面积定理	(72)
3.7	相干光脉冲的合并、分裂和面积演化	(78)
3.7.1	光与二能级原子系统作用方程	(78)
3.7.2	光脉冲传输计算的差分格式与计算参数的取定	(79)
3.7.3	计算结果与分析	(81)
3.7.4	频率失谐对相干光脉冲演化的影响	(82)
3.7.5	光脉冲在 BDN 染料中的合并与分裂	(83)
3.8	“准二能级”系统的 Berry 位相	(84)
<b>第四章</b>	<b>原子的缀饰态</b>	<b>(86)</b>
4.1	二能级原子 Schrödinger 方程的解	(86)
4.2	原子的缀饰态	(87)
4.3	Cohen-Tannoudji 的缀饰原子	(89)
4.4	原子部分缀饰态及其展开	(89)
4.4.1	单频泵浦场近共振激发的多能级系统	(90)
4.4.2	三次谐波极化率计算	(95)
4.5	集居数、介质增益与无反转激光	(97)
4.6	自离化共振态干涉	(100)
4.7	简并态的量子拍激光	(101)
<b>第五章</b>	<b>激光振荡理论</b>	<b>(103)</b>
5.1	激光振荡的半经典理论	(103)
5.1.1	没有激活离子(或原子)情形	(104)
5.1.2	线性极化 $P \propto E$	(105)
5.1.3	一级近似	(105)
5.1.4	气体激光的烧孔效应与 Lamb 凹陷	(106)
5.1.5	多模振荡	(109)
5.2	激光振荡的全量子理论	(110)
5.2.1	电磁场的量子化	(110)
5.2.2	辐射场与电子波场的相互作用	(111)
5.3	热库模型与激光输出的统计分布	(113)
5.3.1	热库模型	(113)
5.3.2	激光场与热库相互作用的 Langevin 方程	(114)
5.3.3	原子体系与热库相互作用的 Langevin 方程	(116)
5.3.4	辐射场的密度矩阵方程	(118)
5.3.5	激光输出的统计分布	(121)
5.4	激光振荡量子噪音的变率方程分析	(125)
5.4.1	阻尼及负阻尼振子的热库模型	(125)

5.4.2	包含量子噪音的激光变率方程	(126)
5.4.3	白泵浦激光的量子噪音	(129)
5.5	降低激光泵浦的量子噪音	(131)
5.5.1	规则泵浦抽运	(131)
5.5.2	一般泵浦抽运	(134)
<b>第六章</b>	<b>辐射的相干统计性质</b>	<b>(138)</b>
6.1	平衡辐射的统计热力学	(138)
6.2	光的相干性	(141)
6.2.1	相干条件	(141)
6.2.2	“光子自干涉”与“同态光子干涉”	(143)
6.3	光探测	(144)
6.4	场的相关函数与场的相干性	(144)
6.5	相干态	(146)
6.5.1	相干态	(146)
6.5.2	阻尼相干态	(149)
6.5.3	相干态的叠加	(151)
6.6	用相干态的展开	(156)
6.6.1	相干态的 $P$ 表示	(156)
6.6.2	$W, Q$ 与 $P$ 分布函数	(159)
6.7	光子的二阶相关函数、群聚与反群聚效应	(162)
6.7.1	光场分布的二阶相关测量	(162)
6.7.2	经典光场与非经典光场	(164)
6.7.3	原子共振荧光场的二阶相关函数分析	(168)
6.8	压缩态光场	(171)
6.8.1	光子起伏给光学精密测量带来的限制	(171)
6.8.2	正交压缩态	(173)
6.8.3	振幅压缩态	(177)
6.8.4	压缩态的光子数分布	(179)
6.8.5	最小粒子数相位测不准态	(181)
6.9	非经典光场的探测	(183)
6.9.1	强度差的零拍探测技术	(183)
6.9.2	当探测效率 $\eta \neq 1$ 的零拍探测	(184)
6.9.3	压缩态光的全息探测	(185)
6.10	压缩态光的产生和放大	(188)
6.10.1	简并参量放大(简并四波混频)产生压缩态光的原理与实验结果	(188)
6.10.2	简并参量放大与简并四波混频满足的 Langevin 方程与 Fokker-Planck 方程的解	(191)
6.10.3	简并参量放大的 Fokker-Planck 方程的解	(192)
6.10.4	简并四波混频的 Fokker-Planck 方程的解	(196)
6.11	泵浦噪音的抑制和振幅压缩态的产生	(198)

6.11.1	泵浦噪声的亚 Poisson 分布与振幅压缩态	(198)
6.11.2	压低泵浦噪声的方案	(201)
<b>第七章</b>	<b>原子的共振荧光与吸收</b>	<b>(205)</b>
7.1	二能级原子与单色光相互作用的实验研究	(205)
7.1.1	二能级原子在强光作用下的共振荧光	(205)
7.1.2	在强场作用下的原子吸收线型	(207)
7.1.3	二能级原子吸收谱的功率增宽与饱和	(207)
7.2	二能级原子的共振荧光与吸收理论	(208)
7.2.1	二能级原子与辐射场相互作用方程及其解	(208)
7.2.2	二能级原子的共振荧光计算	(210)
7.2.3	共振吸收	(213)
7.2.4	横向弛豫与泵浦抽运对原子共振荧光的影响	(214)
7.3	共振荧光场的态函数与多光子跃迁共振荧光光谱	(216)
7.3.1	单光子跃迁模型	(217)
7.3.2	单光子共振荧光场的态函数	(219)
7.3.3	双光子跃迁模型	(220)
7.3.4	数值结果与讨论	(221)
7.4	二能级原子系统的瞬态共振荧光	(222)
7.4.1	含无规力的 Bloch 方程的解析解	(222)
7.4.2	二能级原子系统的瞬态共振荧光谱	(226)
7.5	呈指数衰变驱动场作用下二能级原子系统的瞬态共振荧光光谱	(228)
7.5.1	驱动场可变情况下 Langevin 方程的形式解	(229)
7.5.2	驱动场呈指数衰变情形的瞬态共振荧光	(230)
7.5.3	含阻尼和稳态项的三维衰变运动	(232)
7.5.4	计算结果与分析	(235)
7.6	考虑到自作用后二能级原子的共振荧光谱	(237)
7.6.1	考虑到自作用后二能级原子与辐射场系统的 Langevin 方程及其解	(237)
7.6.2	二能级原子系统的共振荧光谱	(242)
7.6.3	计算结果与讨论	(243)
7.7	原子在压缩态光场中的共振荧光	(244)
7.7.1	原子在压缩态光场中的密度矩阵方程	(244)
7.7.2	原子在压缩态光场中的共振荧光谱	(246)
7.8	含原子腔的 Q.E.D.	(247)
7.8.1	自发辐射的增强与抑制	(247)
7.8.2	单模场与二能级原子相互作用的 J-C 模型	(252)
7.8.3	真空场的 Rabi 分裂	(255)
7.9	含二能级原子腔的透过率谱	(256)
7.9.1	共振腔中原子的极化率计算	(256)
7.9.2	含二能级原子腔的透过率谱	(258)
7.10	多原子体系的共振荧光	(260)



7.10.1	多原子体系的再耦合波函数	(260)
7.10.2	多原子体系的动力学方程	(260)
7.10.3	原子的受激辐射对原子间(合作)相互作用的影响	(262)
7.10.4	两原子的共振荧光谱	(264)
<b>第八章</b>	<b>激光偏转原子束</b>	<b>(268)</b>
8.1	激光偏转原子束	(268)
8.1.1	早期的激光偏转原子束方案	(268)
8.1.2	激光作用于原子上的力	(270)
8.1.3	原子在速度空间的扩散	(272)
8.2	激光冷却原子与光学粘胶	(278)
8.3	激光偏振梯度冷却原子	(281)
8.4	光学粘胶温度测量	(286)
8.5	电磁衰波场对原子的作用力与原子镜	(287)
8.6	原子镜面对原子量子态选择反射实验	(289)
8.7	二能级原子在激光衰波场中反射的准确解	(290)
8.7.1	二能级原子在激光衰波场中满足的 Schrödinger 方程及其解	(290)
8.7.2	二能级原子波函数的边值条件及反射率计算	(294)
8.7.3	数值计算与讨论	(295)
<b>第九章</b>	<b>超短光脉冲的传播与锁定</b>	<b>(299)</b>
9.1	光脉冲波包	(299)
9.2	光纤中孤子的形成	(301)
9.3	孤子的 Ramann 放大	(303)
9.4	暗孤子	(305)
9.5	调制不稳	(307)
9.6	强超短脉冲传输引起的超加宽	(310)
9.7	超短脉冲的模式锁定	(312)
9.8	染料被动锁模激光	(312)
9.9	准连续被动锁模激光	(316)
9.10	碰撞锁模	(319)
9.11	啁啾光脉冲的放大与压缩	(320)
9.12	快饱和吸收锁模激光	(321)
<b>第十章</b>	<b>光学噪音、分岔和混沌</b>	<b>(325)</b>
10.1	随机过程理论	(325)
10.1.1	历史的回顾	(325)
10.1.2	Markov 过程	(326)
10.1.3	Ito 积分与随机微分方程	(331)
10.2	决定性混沌	(334)
10.2.1	决定性混沌的表现及判定	(334)
10.2.2	一维二次迭代映象	(339)
10.2.3	二分岔理论的抛物线近似	(343)

10.2.4	阵发混沌 .....	(347)
10.2.5	二维映象与奇异吸引子 .....	(348)
10.2.6	由准周期向混沌过渡 (Ruelle-Takens-Newhouse 方案) .....	(351)
10.2.7	奇异吸引子图象与分形边界 .....	(353)
10.2.8	一维迭代的功率谱与外界噪音的影响 .....	(354)
10.2.9	保守系统的无规运动 .....	(355)
10.3	激光单模振荡的 Lorenz 模型与实验验证 .....	(359)
10.3.1	激光单模振荡的 Lorenz 模型 .....	(359)
10.3.2	Lorenz 模型的激光实验验证 .....	(361)
10.3.3	模式分裂与非均匀加宽 .....	(362)
10.3.4	失谐对激光振荡第二阈值的影响 .....	(364)
10.4	光学双稳态中的混沌现象 .....	(365)
10.4.1	吸收型光学双稳态 .....	(365)
10.4.2	含色散吸收介质的环形腔系统 .....	(368)
10.4.3	增益介质的分岔与混沌 .....	(371)
10.5	含非线性介质 Fabry-Perot 腔的分岔与混沌 .....	(372)
10.5.1	含非线性介质 Fabry-Perot 腔 .....	(372)
10.5.2	当 $T_c \frac{d\phi}{dt}$ 不略去时的相位 $\phi$ 与透过强度 $I$ 的微分差分方程解 .....	(374)
10.6	NFP 腔 $B_3 \sim B_5$ 点邻近混沌性质分析 .....	(375)
10.6.1	不具有倍周期分岔的抛物线近似 .....	(375)
10.6.2	$B_3$ 右邻的迭代输出 .....	(376)
10.6.3	$B_3$ 右邻的切分岔混沌性质 .....	(377)
10.6.4	$B_4 \sim B_5$ 亚稳区, $B_5$ 后的亚稳混沌区 .....	(378)
10.7	光学传输横向效应 .....	(379)
10.7.1	模式对称的自发破缺 .....	(379)
10.7.2	光场中的相位奇异点 .....	(382)
10.7.3	光学中的混沌遨游与时空混沌现象的实验观察 .....	(386)
	参考文献 .....	(389)

# 第一章 非线性介质中的波

光学中的非线性相互作用，主要表现为波波相互作用或波粒相互作用。作为描述光学非线性相互作用的准备与基础，本章将一般性地讨论非线性介质中的波<sup>[1]</sup>，包括波的传播、波追赶、线性波、非线性波、耗散波、激波与色散波、波的自聚与非线性 Schrödinger 方程、自感透明现象与 sine-Gordon 方程、三波相互作用、非线性相互作用中的孤立波理论。

## 1.1 波的传播与波追赶

波动现象的直观描述，即一特定波形  $w$  随时间  $t$  的推移沿空间  $x$  方向的传播，波形函数  $w$  为

$$w = w(x - vt) \quad (1.1.1)$$

波的传播方程为

$$\frac{dw}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) w = 0 \quad (1.1.2)$$

式中， $v$  为传播速度。如果一个观察者以  $v$  的速度向前运动，则他观察到的波幅将是不变的。这就是 (1.1.1) 和 (1.1.2) 式的含义。引进路径参量  $\xi$ ：

$$\xi = x - vt, \quad x = \xi + vt \quad (1.1.3)$$

则  $\xi$  确定了  $w$  上每一点的运动路径。参见图 1.1， $\xi$  即  $t = 0$  时的  $x$  值。注意到将波的传播表述为 (1.1.1)~(1.1.3) 式是有条件的，即波的传播速度  $v$  是一与  $x$  和  $t$  无关的常数。如果不是这样，则路径参量应写为

$$\xi = \xi(x, t), \quad v = v(\xi, t) \quad (1.1.4)$$

波及波的传播方程为

$$w = w(\xi) \quad (1.1.5)$$

$$\frac{dw}{dt} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + v \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{dw}{d\xi} = 0 \quad (1.1.6)$$

(1.1.5) 与 (1.1.6) 式表明波上某固定点的波幅是不随时间而变的，因  $\frac{dw}{d\xi} \neq 0$ ，这就要求

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi + v \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (1.1.7)$$

由  $v$  的函数形式  $v = v(\xi, t)$  可见，不同  $\xi$  点的速度  $v$  可能是不一样的。图 1.1 所示的各条路径相互平行的情况已不复存在了。不平行就可能相交，如图 1.2 所示的路径，初值为  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  各点的速度是不一样的。这就导致  $t_0 = 0$  的连续波在  $t_1$  时为间断波，在  $t_2$

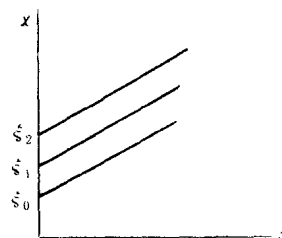


图 1.1 路径参量  $\xi (= x - vt)$  (1.1.5)

时已为波破裂了. 这是因为在波后面的点  $\xi_0$  运动得比前面的点  $\xi_1, \xi_2$  快而发生了波追赶现象. 波破裂的情形很复杂, 我们主要讨论前面两种情况, 故实际上可假定  $w$  是  $x$  的单值函数. 由于耗散的存在, 间断波的陡峭部分会被抹平.

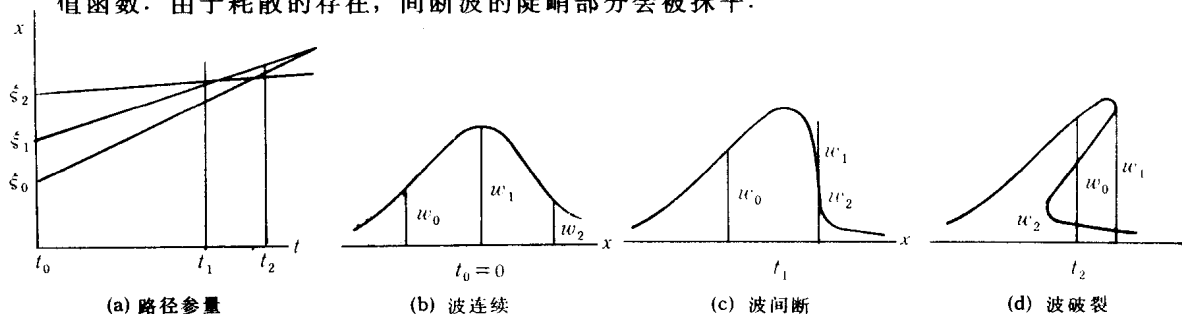


图 1.2

## 1.2 线性波

上面讨论的波是沿  $x$  方向传播的行波. 一般来说, 波可同时沿  $\pm x$  方向传播, 这时波函数  $w$  及传播方程 (1.1.1) 和 (1.1.2) 可推广为

$$w = g(x - v't) + h(x + v't) \quad (1.2.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v' \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v' \frac{\partial}{\partial x}\right) w = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v'^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w = 0 \quad (1.2.2)$$

这就是常见的线性波. 路径方程 (1.1.3) 也称为特征线方程, 在目前情形下可推广为

$$\xi = x - v't, \quad \eta = x + v't \quad (1.2.3)$$

波动方程 (1.2.2) 为二阶的, 但可化为两个一阶方程. 事实上, 令

$$u = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad v = v' \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.2.4)$$

将 (1.2.4) 式代入 (1.2.2) 式, 并将  $\frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial t}$  记为  $\frac{\partial}{\partial \eta}$ , 则得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) (v - u) = \frac{\partial}{\partial \eta} (v - u) = 0 \quad (1.2.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) (v + u) = \frac{\partial}{\partial \xi} (v + u) = 0$$

其通解可写为

$$\begin{aligned} v - u &= r(\xi) = v_0(\xi) - u_0(\xi) \\ v + u &= s(\eta) = v_0(\eta) + u_0(\eta) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$$u = -\frac{1}{2}[r(\xi) - s(\eta)] = -\frac{1}{2}[v_0(\xi) - u_0(\xi) - v_0(\eta) - u_0(\eta)] \quad (1.2.7)$$

$$v = +\frac{1}{2}[r(\xi) + s(\eta)] = +\frac{1}{2}[v_0(\xi) - u_0(\xi) + v_0(\eta) + u_0(\eta)]$$

(1.2.6) 式中  $r(\xi), s(\eta)$  称为 Riemann 不变量, 因在特征线  $\xi, \eta$  上,  $r(\xi), s(\eta)$  均不变. (1.2.7) 式的几何意义 (见图 1.3), 即  $(x, t)$  点的函数值  $u, v$  可通过特征线  $\xi, \eta$  与  $x$  轴的交点的初值  $v_0(\xi), u_0(\xi), v_0(\eta), u_0(\eta)$  来表示. 注意到 (1.2.5) 式是方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1.2.8)$$

的一个特例, 当将

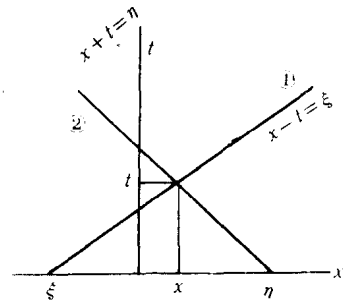


图 1.3 特征线

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.2.9)$$

代入 (1.2.8) 式便得 (1.2.5) 式. 设  $A$  的特征根为  $\lambda$ , 所对应的特征矢量为  $R$ , 即

$$AR = \lambda R \quad (1.2.10)$$

易证

$$\lambda = \pm 1, \quad R_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.11)$$

$U$  的解可表示为

$$U = \varphi R \quad (1.2.12)$$

将 (1.2.12) 式代入 (1.2.8) 式, 并注意到 (1.2.10) 式, 便得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (1.2.13)$$

由此得 (1.2.9) 式二分量波  $U$  的通解为

$$U = \varphi_+(x-t)R_+ + \varphi_-(x+t)R_- \quad (1.2.14)$$

一般情形  $U$  具有  $n$  个分量, 即

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1.2.15)$$

$A$  的特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为实的, 且相异; 特征矢量  $R_1, \dots, R_n$  为独立的. 这时方程 (1.2.8) 称为双曲线方程组, 有

$$AR_i = \lambda_i R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.16)$$

$U$  的通解为

$$U = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x - \lambda_i t) R_i \quad (1.2.17)$$

很明显, 任意函数  $\varphi_i$  由初值  $U(x, 0)$  唯一确定. 引进特征参量  $\xi_i = x - \lambda_i t$ , 则由 (1.2.17) 式得

$$U = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi_i) R_i \quad (1.2.18)$$

参照 (1.2.7) 式的几何意义,  $(x, t)$  点的函数值  $U(x, t)$  由通过  $(x, t)$  点的特征线  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  与  $x$  轴的交点的初值  $U_0(\xi_1), \dots, U_0(\xi_n)$  来确定.

### 1.3 非线性波

对于非线性波, 系数矩阵  $A$  不再是常数, 相应的本征值  $\lambda$  也不再是常数. 对于一维气体的等熵运动, 其连续与运动方程可通过密度  $\rho$  及速度  $u$  表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

式中,  $a \propto \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$  为声速,  $\gamma$  为气体的绝热指数. 令

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{a^2}{\rho} & u \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

则方程 (1.3.1) 可改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1.3.3)$$

$A$  的特征根  $\lambda_{\pm}$  为

$$\lambda_{\pm} = u \pm a \quad (1.3.4)$$

对应的本征矢量  $L_{\pm}$  为

$$L_{\pm} = \left( \frac{a}{\rho}, \pm 1 \right), \quad L_{\pm} A = \lambda_{\pm} L_{\pm} \quad (1.3.5)$$

用  $L_{\pm}$  左乘 (1.3.3) 式, 并应用 (1.3.5) 式, 便得

$$\begin{aligned} L_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{\pm} \frac{\partial}{\partial x} \right) U &= \left( \frac{a}{\rho}, \pm 1 \right) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x} \right] \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( \frac{2a}{\gamma-1} \pm u \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

(1.3.6) 式给出特征线  $\xi = \xi(x, t)$  上的 Riemann 不变量  $r(\xi)$  为

$$r(\xi) = \frac{2a}{\gamma-1} + u \quad (1.3.7)$$

特征线  $\xi = \xi(x, t)$  由  $\frac{dx}{dt} = u + a$  积分得出. 同样沿特征线  $\eta = \eta(x, t)$  上的 Riemann 不变量  $s(\eta)$  为

$$s(\eta) = \frac{2a}{\gamma-1} - u \quad (1.3.8)$$

特征线  $\eta = \eta(x, t)$  由  $\frac{dx}{dt} = u - a$  给出. 由 (1.3.7) 和 (1.3.8) 式易于解出  $a, u$ , 用 Riemann 不变量  $r(\xi), s(\eta)$  表示为

$$a = \frac{\gamma - 1}{4}[r(\xi) + s(\eta)] \quad (1.3.9)$$

$$u = \frac{1}{2}[r(\xi) - s(\eta)] \quad (1.3.10)$$

如果两个 Riemann 不变量中一个为常数, 例如  $s(\eta) = s_0$ , 这样的波称为简单波.

(1.1.1) 式给出的沿  $x$  方向传播的行波  $w(x - vt)$  即为简单波的一例. 对于  $s(\eta) = s_0$  的简单波情形, 由 (1.3.9) 式看出,  $a, u$  或  $U$  仅仅是  $\xi$  的函数, 与  $\eta$  无关. 利用这一点, 可讨论 (1.3.3) 式的一般问题, 即

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t} U + A(U) \frac{\partial}{\partial x} U = \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + A(U) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{dU}{d\xi} = 0 \quad (1.3.11)$$

另一方面, 在特征线  $\xi = \xi(x, t)$  上

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (1.3.12)$$

比较 (1.3.11) 和 (1.3.12) 式, 便得知  $U$  的解应满足常微分方程

$$\frac{dU}{d\xi} \propto R_\xi, \quad R_\xi = \begin{pmatrix} r_1(u_1, u_2) \\ r_2(u_1, u_2) \end{pmatrix} \quad (1.3.13)$$

式中,  $R_\xi$  为对应于本征值  $\lambda_\xi$  的右乘本征矢量, 即

$$AR_\xi = \lambda_\xi R_\xi \quad (1.3.14)$$

这就证明了特征线的 (1.3.12) 式的解也是 (1.3.11) 式的解. 当然, 要求出  $U$ , 还要解常微分方程 (1.3.13) 式, 即

$$\frac{du_1}{d\xi} = r_1(u_1, u_2) \quad (1.3.15)$$

$$\frac{du_2}{d\xi} = r_2(u_1, u_2)$$

这可写为以  $u_1$  为自变量的常微分方程

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{r_2(u_1, u_2)}{r_1(u_1, u_2)} \quad (1.3.16)$$

由此解出  $u_2 = u_2(u_1, C)$ ,  $C$  为积分常数. 代入 (1.3.15) 式的第一式, 得出  $u_1$  以  $\xi$  为自变量的微分方程

$$\frac{du_1}{d\xi} = r_1[u_1, u_2(u_1, C)] \quad (1.3.17)$$

将这个简单波解记为  $U^{(\xi)}$ , 因为它是对应于本征值  $\lambda_\xi$ . 同样对于本征值  $\eta$ , 也可得到简单波  $U^{(\eta)}$ . 这种求解方法可推广到多分量  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$  情形, 当然也是求简单波, 否则是

不适用的. 图 1.4 给出两分量波的时间空间分布图, 初始  $t = 0$  时扰动限制在  $|x| \leq x_0$  的直线上, 传播速度  $v = \pm 1$ , 于是有  $|x - t| = |\xi| > x_0, |x + t| = |\eta| > x_0$  的扰动无法到达的 ①, ③, ⑤ 区;  $|x - t| = |\xi| \leq x_0, |x + t| = |\eta| > x_0$  与  $|x - t| = |\xi| > x_0, |x + t| = |\eta| \leq x_0$  的行波区 ②, ④;  $|x - t| = |\xi| \leq x_0, |x + t| = |\eta| \leq x_0$  的两分波区 ⑥. 简单波解仅适用于 ② 与 ④ 区.

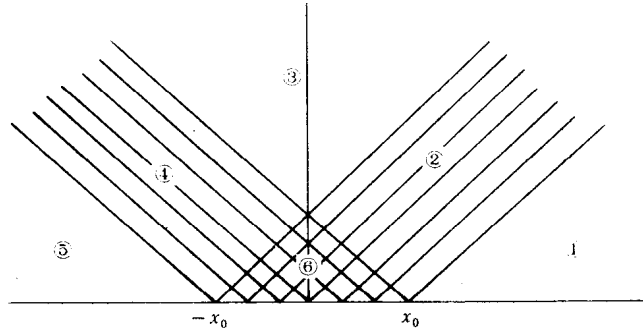


图 1.4 两分量波的区域划分

作为一个例子, 我们用特征线方法求两分波区 ⑥ 方程 (1.3.9) 的解. 注意在特征线  $r(\xi)$  上,  $\frac{dx}{dt} = u + a, r(\xi)$  为常数, 但  $s(\eta)$  是变的, 故有

$$\frac{\partial x}{\partial s} = (u + a) \frac{\partial t}{\partial s}$$

即

$$x_s = (u + a)t_s \quad (1.3.18)$$

同样在特征线  $s(\eta)$  上,  $\frac{dx}{dt} = u - a, r(\xi)$  是变的, 即有

$$x_r = (u - a)t_r \quad (1.3.19)$$

由 (1.3.18) 和 (1.3.19) 式消去  $x$ , 得

$$2at_{rs} + (u + a)_r t_s - (u - a)_s t_r = 0 \quad (1.3.20)$$

由 (1.3.9) 式消去上式中的  $u, a$ , 得

$$t_{rs} + \frac{\mu}{r + s}(t_r + t_s) = 0 \quad (1.3.21)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

一般称 (1.3.21) 式为 PED(Poisson-Euler-Darboux) 方程. 当将  $\gamma = (2N + 1)/(2N - 1), N = 0, 1, 2, \dots$  代入  $\mu$  的表示式, 得  $\mu = N$ , 这时 (1.3.21) 式有解析解. 当  $\mu = N = 0$  时, (1.3.21) 式的解为

$$t = f(r) + g(s) \quad (1.3.22)$$

当  $\mu = N = 1$  时, (1.3.21) 式的解为

$$t(r, s) = \frac{1}{r + s} [f(r) + g(s)] \quad (1.3.23)$$



易证 (1.3.23) 式满足  $\mu = N = 1$  的 PED 方程: 在一般情况,  $\mu = N$ , PED 方程为

$$t_{rs} + \frac{N}{r+s}(t_r + t_s) = 0 \quad (1.3.24)$$

令

$$t = \frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}} \left[ \frac{f(r)}{(r+s)^N} \right] \quad (1.3.25)$$

代入 (1.3.24) 式, 得 (1.3.24) 式的左端为

$$-N \frac{\partial^N}{\partial r^N} \frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}} + \frac{N}{r+s} \left[ \frac{\partial^N}{\partial r^N} \frac{f(r)}{(r+s)^N} - N \frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}} \frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}} \right] \quad (1.3.26)$$

因

$$\frac{f(r)}{(r+s)^N} = \frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}}(r+s)$$

所以

$$\frac{\partial^N}{\partial r^N} \left[ \frac{f(r)}{(r+s)^N} \right] = (r+s) \frac{\partial^N}{\partial r^N} \left[ \frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}} \right] + N \frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}} \left[ \frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}} \right] \quad (1.3.27)$$

故 (1.3.26) 式为 0, 证明了由 (1.3.25) 式给出的  $t$  是 (1.3.24) 式的解. (1.3.24) 式的通解为

$$t(r, s) = k + \frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}} \left[ \frac{f(r)}{(r+s)^N} \right] + \frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}} \left[ \frac{g(s)}{(r+s)^N} \right] \quad (1.3.28)$$

式中,  $k$  为常数.

#### 1.4 耗散波、激波与色散波

在一维非线性波中, 一个很有代表性的含耗散项的耗散波方程为 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4.1)$$

其前两项为非线性波, 第三项为耗散项,  $\mu$  为耗散系数. 这个方程有一个形状不变的稳态解

$$u = v + (u_\infty - v) \tanh \left[ -\frac{(u_\infty - v)(x - vt)}{2\mu} \right] \quad (1.4.2)$$

(1.4.2) 式所描写的是一以速度  $v$  运动的波. 设  $u_\infty - v < 0$ , 则当  $x - vt \rightarrow \infty$  时,  $u \rightarrow u_\infty < v$ ; 当  $x - vt \rightarrow -\infty$  时,  $u \rightarrow v - (u_\infty - v) > v$ ; 在  $x - vt = 0$  处,  $u = v$ . 有一个由高速  $2v - u_\infty$  向低速  $u_\infty$  的过渡区, 其宽度为  $\frac{2\mu}{u_\infty - v}$ , 当耗散系数  $\mu$  很小时, 几乎是很陡的, 其极限便是激波 (见图 1.5). 若将 Burgers 方程 (1.4.1) 的耗散项换成色散项, 便得熟知的 KdV (Korteweg-de Vries) 方程

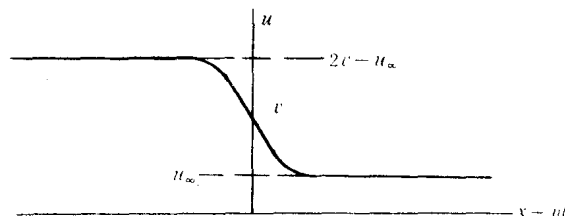


图 1.5 耗散波曲线