国家级精品课程教材

21世纪高等院校教材

数学建模与实验

陈恩水 王 峰 编

朱道元 主审

科学出版社

www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

数学建模与实验

陈恩水　王　峰　编
朱道元　主审

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为国家精品课程配套教材. 书中通过大量的实际问题，分别介绍了数学建模的各种方法及模型实现的一些方法与技巧. 内容包括数学建模的基本概念、初等模型、代数模型、微分方程模型、差分方程模型、优化模型与随机模型等. 全书致力于内容的新颖性与广泛性，既包含了一些经典的建模问题，也编写了部分与生活密切相关的实际问题及近几年的大学生数学建模竞赛题. 书后配有一定量的习题，由浅入深，适于不同层次的读者学习与参考.

本书可作为高等学校理工、管理各专业学生数学建模与实验课程的教材，也可作为数学建模竞赛入门训练教材及科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模与实验/陈恩水，王峰编. —北京：科学出版社，2008
(21世纪高等院校教材)
ISBN 978-7-03-021163-7

Ⅰ. 数 Ⅱ. ①陈…②王… Ⅲ. ①数学模型-高等学校-教材②高等数学-实验-高等学校-教材 Ⅳ. O141.4 O13-33

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第027403号

责任编辑：姚莉丽/责任校对：陈丽珠
责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年6月第一版 开本：B5（720×1000）
2008年6月第一次印刷 印张：14
印数：1—4 000 字数：262 000

定价：23.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉）

前　言

数学建模是连接数学和现实世界的桥梁，数学实验是利用现代技术手段处理数学问题的一把钥匙．随着数学建模与数学实验教育的普及，数学建模与数学实验课程已经在国内外高校广泛开设．围绕数学建模的实践活动在国内外也开展得如火如荼．数学建模与数学实验类课程建设及教学研究正在不断深化．数学建模与实验的方法与内容正在不断融入大学主干课程．由于其在大学数学教育及人才培养中发挥了无可替代的作用，这类课程越来越受到高校师生的重视，其受益面正在逐渐扩大．

本书两位编者均是国家精品课程“数学建模与数学实验”的主讲教师，长期从事大学生数学建模竞赛的培训与组织工作，积累了丰富的经验，收集了大量的教学资料，并于2004年完成了“数学建模与实验”讲义的编写．编者对讲义几经修改与完善，并参阅了国内外大量的建模与实验资料，编写了这本《数学建模与实验》教材，在内容与方法上力求做到以下几点：

（1）经典方法与现代理念相结合．在内容上，选择了一些经典的建模问题，这些问题通常通过理论分析就可以完成模型的求解，但它们却蕴含了数学建模的精髓；也选择了一些比较复杂但与人们生活密切相关的实际问题，虽然这些问题理论分析比较困难，但可以利用现代的技术手段，借助数学实验方法完成模型的求解与分析，它让人们感受到了现代技术在建模中的巨大作用．

（2）新颖性与广泛性相结合．为了适应各专业各层次读者的需要，教材在内容选择上，尽量多选择一些不同领域科技工作者比较关心的实际问题，许多问题的背景来源于近几年的热门话题，如金融、房产等．

（3）课内与课外相结合．本书的许多内容都是开放性的问题，且有一定难度，需要大量的课外时间来实现模型与验证模型．教材把课堂教学与课外教学有机地联系在一起．

（4）数学建模与数学实验相结合．国内大多数高校都是将数学建模与数学实验课程分开开设的．由于学时数有限等原因，容易造成两部分内容的脱节或不平衡．本教材将两部分内容有机地结合在一起，在介绍建模方法时，针对具体的问题介绍实验方法，而实现的手段则放在课外．

（5）注重数学方法的学习与能力培养．本书不求内容全面与结构严谨，但注重能力培养．在内容安排上，按照数学方法分类，从问题讲数学，通过对问题的分析、讨论，让学生熟悉建模的各个环节，激发学生的发散性思维能力与灵感．

对一些学生不熟悉的数学方法，本书作了简要介绍.

本书由陈恩水副教授与王峰副教授合编. 具体分工为：6.4 节与 6.5 节及第 8 章由王峰副教授编写，其余部分由陈恩水副教授编写. 最后，由陈恩水副教授定稿.

本教材被列为江苏省高等学校精品教材建设项目，并列入东南大学规划教材. 江苏省教育厅、东南大学教务处、东南大学数学系和科学出版社的领导给予了关心与支持，在此深表谢意，尤其是东南大学郑家茂副校长，教务处徐悦副处长，数学系孙志忠教授、朱道元教授、董梅芳教授给予了很多帮助，在此表示由衷的感谢！

由于编者水平有限，本教材难免存在诸多的不足和缺点，恳请读者给予批评指正，并希望本教材能为数学建模与实验的教学与实践活动尽微薄之力！

编 者

2007 年 12 月

目　录

第 1 章　数学建模概述

近几十年来，随着科学技术的发展和进步，数学的应用越来越广泛，数学与计算机的结合，形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术，它已成为当代高等技术的一个重要组成部分. 然而，一个实际问题往往不是自然地以现成的数学形式出现的，要用数学方法解决它，关键的一步是要用数学的语言和符号将研究的对象描述出来，并借助一些数学手段来研究它，整个过程简称为数学建模，它在解决许多实际问题中发挥了非常重要的作用.

1.1　数学模型概念

1.1.1　原型与模型

原型指人们在现实世界里所关心、研究或从事生产管理的实际对象. 例如，通常所说的机械系统、电力系统、生态系统、化学反应系统、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等，它们都是数学建模研究的对象.

模型指人们为了某个特定的目的而将原型的某些信息精简压缩，加以提炼而构造的原型的替代物. 需要强调的是，模型不是原型原封不动的复制，它实际上只是原型某些方面和某些层次的近似表示.

同一个原型，为了不同的目的，可以有许多不同的模型. 每个模型的特征由构造模型的目的决定. 模型可以分成形象模型和抽象模型. 形象模型包括直观模型、物理模型等，抽象模型包括思维模型、符号模型、数学模型等.

直观模型：通常指实物模型以及玩具、照片等，主要追求外观上的逼真，这类模型的效果是一目了然的.

物理模型：通常指科技工作者为了某些目的，根据相似原理构造的模型，它不仅可以显示原型的外形或某些特征，而且可用以进行模拟实验，间接地研究原型的某些规律，如风洞中的飞机模型用来实验飞机在气流中的空气动力学特性等.

思维模型：通常指人们对原型的反复认识，将获取的知识以经验的形式直接存于大脑中，从而可以根据思维或者直觉作出相应的决策.

符号模型：通常指在一些约定或假设下借助专门的符号、线条等，按照一定形式组合起来的原型的描述，如地图、电路图等.

数学模型：通常指运用数学的语言和工具对现实世界的部分信息（现象、数据、图表等）加以翻译、归纳所形成的公式、图表等. 数学模型经过演绎、求解以及推断，

给出数学上的分析、预报，再经过翻译和解释，回到现实世界中. 最后，这些推论或结果必须经过现实的检验，完成实践—理论—实践的循环. 如果检验的结果是正确的或基本正确的，即可用于指导实践，否则还要重新翻译、归纳，修正数学模型.

1.1.2　数学模拟与数学实验

数学模拟：主要指计算机模拟，它是数学建模过程中最常用的数学手段. 人们在处理实际问题时，经常会根据实际系统或过程的特征，按照一定的数学规律，用计算机程序语言来模拟实际运行的状态，并依据大量的模拟结果对系统或过程进行必要的定量分析. 对于那些因内在机理过于复杂，目前尚难以建立数学模型的实际对象，用计算机模拟获得一些定量结果，通常是解决实际问题的有效手段.

数学实验：所谓数学实验就是利用计算机技术，选择合适的数学软件和算法将数学问题在计算机上加以实现或使结果更加可视化.

1.1.3　数学建模的基本过程

建立数学模型主要采用机理分析和统计分析两种方法. 机理分析方法是指人们根据客观事物的特征，分析其内部机理，弄清其因果关系，并在适当的简化假设下，利用合理的数学工具得到描述事物特征的数学模型；统计分析方法是指人们一时得不到事物的机理特征，便通过测试得到一串数据，再利用数理统计等知识，对这些数据进行处理，从而得到最终的数学模型.

建立数学模型需要哪些步骤没有固定的模式，下面是按照一般情况，提出的一个建立模型的大体过程：

模型准备—模型假设—模型建立—模型求解—模型分析—模型检验—模型应用

下面就这几个过程作一些简单的介绍：

1. 模型准备

首先要了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集建模必需的各种信息，如实际现象、统计数据等，弄清楚实际对象的基本特征（事实上，由于实际问题的复杂性以及认识的局限性，无法获得实际问题的全部信息），由此初步确定用哪一类模型. 模型准备过程是非常必要的，这一步骤往往也是建模过程中最困难、最费时费力的，它不仅需要查阅大量的资料，请教专家，还要求自己应具有相当的实际经验，这一步做得好，便会对问题有更透彻的了解，也会给后续工作带来极大的方便.

2. 模型假设

一般来说，无法将实际对象的所有影响因素都考虑到模型中，这就需要对问题进行必要的简化. 简化的目的应是尽量少地考虑影响因素，尽量多地抓住问题的基本实

质，通过假设，把各种影响因素的关系较精确地描述出来．假设包含两方面的内容：

1）影响因素（变量）的分类

列出可能的影响因素，将其独立的变量与相互影响的变量按类分开，对于相互影响的变量应解释清楚其相互关系．有选择地忽略一些影响因素，这种忽略主要基于下面两个方面的考虑：

（1）该变量与其他变量相比，对实际问题行为特征的影响较小．

（2）对于那些各种条件下，对实际问题行为特征的影响虽然比较大，但是影响程度的变化基本上是不变的．

2）确定所选变量的关系

有些变量间的关系是明确的，无需对此作假设或简化；有些变量间的关系是模糊的，对此类变量，为明确其关系，可以对它再作进一步的假设或简化，为了研究这些变量的关系，甚至还可以建立子模型．

3．模型建立

根据所作的假设利用适当的数学工具，构成实际问题的数学描述，这里除了需要一些相关学科的专门知识外，还常常需要广阔的应用数学方面的知识开拓思路，除用到微积分、常微分方程、线性代数、概率论与数理统计等基础知识外，还用到诸如运筹与规划、排队论、图论、对策论等方面的知识．建模应遵循一个原则：尽管同一个研究对象可以利用多个学科的数学知识来建模，但应尽量采用简单的数学工具，以便更多的人了解和应用．

4．模型求解

模型求解指的是利用数学方法给出模型的结果，或者是利用数学语言描述模型所揭示的含义．

5．模型分析

对模型结果进行数学上的分析，给出定量或定性的结果，如有可能还应该给出数学上的预报、数学上的最优决策与控制方法等．对结果进行误差分析、灵敏度分析及稳定性分析也是模型分析中必不可少的工作．

6．模型检验

把数学模型的结果回放到实际对象，与实际对象的现象、数据进行比较，验证模型的可靠性以及适用性．如果不合理，需要对模型进行补充修正，甚至需要重建．

7．模型应用

经模型检验证明模型是可靠的或适用的后，模型即可以应用实际问题，用于评

价、预测或指导工程实践.

下面就数学建模过程中的几个重要步骤作一些简单解释：

(1) 表述、归纳、翻译、假设过程是指根据建模的目的和掌握的信息（如数据、图表、描述等）将研究的对象转化为数学问题，用数学语言（如公式、图表、计算机语言等）明确地将这些信息表述出来，形成数学模型.

(2) 演绎、推断、求解过程是指选用适当的数学方法（作图、计算机求解等）给出数学模型的解答，并用图表、公式、符号等给出结果，从数学上进行分析、预报，提供决策或控制方案.

(3) 解释过程是指把数学语言（图表、公式、符号、计算机语言等）表述的结果转化或翻译回到现实对象，给出实际问题的答案.

(4) 检验过程是指用实际对象的信息，检验从数学模型中得到的答案，以确认结果的正确性. 若结果是正确或基本正确的，则可用来指导实践，否则需要重新进行建模或修改模型.

需要强调的是，数学建模过程必须科学系统，因此必须做到：

(1) 必须对研究对象作一些经常性的观察，避免掌握的信息偶然化，对建模产生误导.

(2) 将研究的现实对象转化为数学语言时，要作一些合乎实际的假设. 现实对象是复杂多样的，假设应力求简单且抓住研究对象的主要特征.

(3) 选用一套合理的检验假设的测试方法.

(4) 通过测试获得足够多的用于建模的数据.

(5) 根据测试对假设作出确认分析.

1.2　数学模型的特点

数学建模是利用数学工具解决实际问题的手段，数学模型有许多优点，也有弱点. 建模需要丰富的知识、经验和技能，同时还应该掌握相应的分寸，下面归纳出数学建模的若干特点，供读者在学习过程中逐步领会.

1) 建模的逼真性和可行性

由于实际问题的复杂性，希望用数学语言完完本本地把实际问题描述出来几乎是不可能的，一个非常逼真的数学模型在数学上通常是难于处理的，也达不到通过建模对现实问题进行分析、预报、提供决策方案或控制措施的目的，即实用上是不可行的；另一方面，越逼真的模型常常越复杂，即使数学上能处理，这样的模型应用时所需要的“费用”也是相当高的，而高“费用”不一定与复杂模型取得的“效益”相匹配. 所以建模时往往需要在模型的逼真性与可行性、“费用”与“效益”之间作出折中和抉择.

2）模型的渐进性

稍微复杂一点的模型通常不可能一次成功，需要经过修正、提炼，包括由简到繁，也包括删繁就简过程，以便获得越来越满意的模型. 在科学发展过程中随着人们认识和实践能力的提高以及科学技术水平的提高，各学科中出现的数学模型也存在着一个不断完善和推陈出新的过程.

3）模型的稳定性

模型的结构和参数常常是由对象的信息，如数据等确定的，而观测数据是有误差的. 好的模型应该具有下述意义的稳定性：当观测数据（或其他信息）有微小改变时，或者模型结构和参数只有微小变化时，一般只能导致模型求解的结果仅有微小变化，否则就应该修正模型.

4）模型的可转移性

模型是现实对象抽象化、理想化的产物，它不为对象的所属领域所独有，可以转移到另外的领域. 例如，在生态、经济、社会等领域内的模型就常常借用物理领域中的模型. 模型的这种性质显示了它的极端广泛性.

5）模型的非预测性

虽然已经发展了许多应用广泛的模型，但是实际问题是各种各样、千变万化的，不可能把各种模型做成预制品供你建模时使用，模型的这种非预测性使得建模本身常常是事先没有答案的问题. 在建立新的模型过程中往往伴随着新概念和新方法的产生.

6）模型的条理性

从建模的角度考虑问题可以促使人们对现实对象的分析更全面、更深入、更具有条理性，这样即使建立的模型由于种种原因尚未达到实用的程度，对问题的研究也是有帮助的.

7）建模的技艺性

建模的方法与其他一些数学方法，如线性代数、微分方程等是根本不同的，无法归纳出若干条普遍适用的建模准则和技巧. 经验、想象力、洞察力、判断力以及直觉、灵感等在建模过程中起的作用往往比一些具体的数学知识作用更大. 建模者需要具有较高的建模技艺.

8）模型的局限性

模型的局限性主要表现在如下几个方面：第一，数学模型仅是实际对象信息的简化或提炼，尽管其结果具有通用性和精确性，但是一旦将模型用于实际，便会发现那些被忽视、简化的因素还是有影响的，模型的结果只能是实际问题的近似描述；第二，由于认识能力、科学水平包括数学水平的限制，还有许多实际问题目前还很难得到精确的数学模型，如一些内部结构复杂、影响因素众多、测量手段不够完善或技艺性较强的生产过程等；第三，还有一些领域中的问题尚未发展到用建模方

法来寻求数量关系的阶段,如中医诊断过程等.

数学模型的分类方法很多,下面是几种常见的分类方法:

(1) 按照模型的应用领域或所属学科分类,有城镇规划模型、交通模型、数量经济学模型、生态学模型、水资源模型等.

(2) 按照建立模型的数学方法分类,有初等数学模型、几何模型、微分方程模型、图论模型、线性规划模型、对策论模型等.本书采用的就是此类分法.

(3) 按照模型的表现特征又有几类分法,有确定性模型和随机性模型,静态模型和动态模型,离散模型和连续性模型,线性模型和非线性模型等.

(4) 按照建模的目的分类,有描述模型、分析模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等.

(5) 按照对模型结构的了解程度分类,有白箱模型、灰箱模型、黑箱模型等.

1.3 建模实例

本节通过两个实际问题的建模实例,简单介绍建模的大致过程,更加完整的介绍放在后面的各个章节.

1.3.1 交通事故调查[1]

一辆汽车在拐弯时急刹车,结果冲到路边的沟里(图 1.1).交警立即赶到事故现场.司机申辩说,当他进入弯道时刹车已失灵,他还一口咬定,进入弯道时其车速为 40 英里/小时(即该车在这类公路上的速度上限,相当于 17.9 米/秒),交警验车时证实该车的制动器在事故发生时的确失灵,然而司机所说的车速是否真实呢?

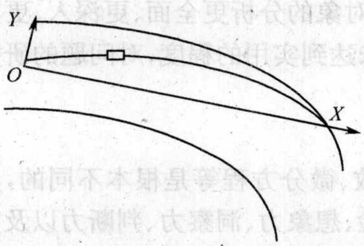

图 1.1　汽车轨迹运行图

现在让我们来帮交警计算一下司机所说的车速是否真实.

根据数学建模的一般过程,事先需要提取研究对象足够多的信息,为此首先需要了解现场.表 1.1 是交警在现场获取的相关数据.

表 1.1　刹车痕迹的测量值　(单位:米)

X	0	3	6	12	15	16.64	18	21	24	27	30	33.27
Y	0	1.19	2.15	3.28	3.53	3.55	3.54	3.31	2.89	2.22	1.29	0

注:X 指刹车痕迹方向的测量值;Y 指垂直 X 轴方向的测量值.

经勘察还发现,该车并没有偏离它的行驶转弯方向,也就是说车头一直指向转

弯曲线的切线方向.

下面建立一个简单的数学模型,根据所给信息可作如下假设:

(1) 该车的重心沿一个半径为 r 的圆做圆周运动(根据交通学原理,现有公路的弯道通常是按圆弧段设计的,需要检验).

(2) 汽车速度 v 是常数(因车刹失灵,所以刹车不起作用).

(3) 设摩擦力 f 作用在汽车速度的法线上,摩擦系数为常数 k,汽车质量为 m.

根据牛顿运动学定律:

$$f = kmg = \frac{mv^2}{r}. \tag{1.1}$$

由式(1.1)得

$$v = \sqrt{kgr}. \tag{1.2}$$

关于圆半径的估计:假设已知圆的弦长为 c,弓形高度为 h,由勾股定理得

$$r^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (r-h)^2.$$

由表 1.1 数据得

$$c \approx 33.27\text{ 米},\quad h \approx 3.55\text{ 米},\quad r \approx 40.75\text{ 米}.$$

通常可以根据路面与汽车轮胎的情况测出摩擦系数的值,也可以通过交通部门获得,这里取 $kg=8.175$ 米/秒^2,代入式(1.2)得

$$v = 18.2\text{ 米}/\text{秒}.$$

这一结果比司机所说的车速(17.9 米/秒)略大一些,但基本上可以认为司机所说的结果是可以接受的.

事实上,还可以举出许多通过建立数学模型解决实际问题的例子.下面是另一个例子.

1.3.2 录像机计数器的用途

一盘录像带从头至尾用时 183 分 30 秒,计数器从 0000 变到 6152,现在录像机计数器为 4580,问剩下的一段能否录下 1 小时的节目.希望建立计数器与录像带转过时间之间的关系,并回答能否录 1 小时的节目.

1) 问题分析

(1) 读数并非均匀增长,而是先快后慢.

(2) 录像机的工作原理见图 1.2.

2) 目标

找出计数器 n 与录像带转过的时间 t 之间的关系 $t=f(n)$.

3) 模型假设

(1) 录像带的线速度(单位时间通过磁头的长度)是常数 v.

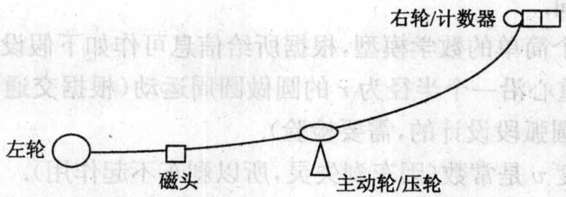

图 1.2　录像带工作原理

(2) 计数器 n 与右轮的转数 m 成正比，即 $m=kn$，k 为比例系数.

(3) 录像带的厚度是常数 w，空右轮的半径 r.

4) 模型建立

方法一

右轮转盘转到第 i 圈时其半径为 $r+iw$，周长为 $2\pi(r+wi)$，m 圈总长度等于录像带转过的长度 vt，即

$$\pi\sum_{i=1}^{m}2(r+wi)=vt, \tag{1.3}$$

由 $w\ll r$，将 $m=kn$ 代入得

$$t=\pi\frac{wk^2}{v}n^2+2\pi\frac{rk}{v}n. \tag{1.4}$$

方法二

右轮面积的变化＝录像带转过的长度×厚度：

$$\pi[(r+kwm)^2-r^2]=wvt, \tag{1.5}$$

由式(1.5)也能得到式(1.4).

方法三

自 t 到 $t+\mathrm{d}t$，录像带在右轮上缠绕的长度为

$$v\mathrm{d}t=2\pi k(r+kwn)\mathrm{d}n, \tag{1.6}$$

两边积分得

$$v\int_0^t\mathrm{d}t=2\pi k\int_0^n(r+kwn)\mathrm{d}n, \tag{1.7}$$

因此

$$t=\pi\frac{wk^2}{v}n^2+2\pi\frac{kr}{v}n.$$

本例中，r,w,v,k 为待定系数，应该给出相应测量方法.

事实上，可以将式(1.4)记为

$$t=an^2+bn, \tag{1.8}$$

只需确定两个参数 a,b. 理论上只需两组数据即可，但是实际上因 w 较小，很小的误差对结果的影响很大，通常应有足够的数据验证. 表 1.2 是一组相关数据.

表 1.2

t/分	0	20	40	60	80	100	120	140	160	183.5
n/转	0	1153	2045	2800	3466	4068	4621	5135	5619	6152

经数据处理得

$$a = 2.50 \times 10^{-6}, \quad b = 1.445 \times 10^{-2}.$$

将之代入式(1.8),即可得到 t 与 n 的关系式.

5) 模型经验

应从另一组数据进行经验,并计算误差.

6) 模型应用

当 $n=4580$ 时,将 n 值代入式(1.8)得 $t=118.5$ 分,剩下一段录像带还可录 $183.5-118.5=65$(分).

习 题 1

1. 甲早晨 8 时从山下旅店出发沿一条小路上山,下午 5 时到达山顶并留宿. 次日早晨 8 时从山顶沿同一条小路下山,下午 5 时回到旅店. 乙说,甲必在两天中的同一时刻经过小路的同一地点,为什么?

2. 甲乙两站之间有电车相通,每隔 10 分钟甲乙两站互发一趟车,但发车时间不一样. 甲乙之间有中间站丙,某人每天在随机的时间到达丙站,并搭乘最先到达的那趟车,结果发现 100 天中约有 90 天到达甲站. 问开往甲乙两站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的?

3. 某人家住 T 市,在他乡工作,每天下班后乘火车于下午 6 时抵达 T 市火车站,他的妻子驾车准时到车站接他回家. 某天他提前搭乘早一班火车于下午 5 时半抵达火车站,并随即步行回家,他的妻子像往常一样驾车前来,在半路上遇到他,接回家时发现比往常提前 10 分钟,问他步行了多长时间?

4. 一个男孩和一个女孩分别在离家 2 千米和 1 千米且方向相反的两所学校上学,每天同时放学后分别以 4 千米/小时和 2 千米/小时的速度步行回家,一小狗以 6 千米/小时的速度由男孩处奔向女孩,又从女孩处奔向男孩,如此往返直至回到家中,问小狗奔波了多少路程?

如果男孩和女孩上学时小狗也往返奔波在他们之间,问当他们到达学校时小狗在何处?