Karl Brammer / Gerhard Siffling

Kalman-Bucy-Filter

Deterministische Beobachtung und stochastische Filterung

Methoden der Regelungstechnik

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Methoden der Regelungstechnik

Herausgeber:

Otto Föllinger und **Hans Sartorius**

Kalman-Bucy-Filter

Deterministische Beobachtung und stochastische Filterung

von Dr.-Ing. **Karl Brammer**,
Elektronik-System-Gesellschaft, München

und

Dr.-Ing. **Gerhard Siffling**,
Universität Karlsruhe

Mit 22 Bildern
und 3 Tabellen

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1975

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Brammer , Karl
Kalman-Bucy-Filter : determinist. Beobachtung
u. stochast. Filterung.
(Methoden der Regelungstechnik)
ISBN 3-486-34661-X

NE: Siffling , Gerhard :

ISBN 3-486-34661-X

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das Zeitverhalten eines dynamischen Systems läßt sich berechnen, wenn das mathematische Modell dieses Systems gegeben ist, und wenn man außer den Eingangsgrößen auch den Anfangszustand kennt. Die Kenntnis des Zustandsvektors ist daher sowohl beim Ermitteln des Zeitverhaltens eines gegebenen dynamischen Systems als auch bei der Erzeugung der Steuerfunktionen, die das Systemverhalten im gewünschten Sinne beeinflussen sollen, von fundamentaler Bedeutung.

Häufig ist aber der Zustandsvektor meßtechnisch nicht zugänglich. Er muß dann aus den meßbaren Ausgangsgrößen des Systems berechnet werden. Wegen der Meßfehler liefert die Rechnung im allgemeinen keinen exakten, sondern nur einen Näherungswert, den sogenannten Schätzwert für den Zustandsvektor.

Wird diese Aufgabe mit deterministischen Verfahren gelöst, werden also die zufälligen Meßfehler nicht explizit berücksichtigt, so spricht man von Ausgleichsrechnung bzw. von deterministischer Beobachtung. Wenn man jedoch Näheres über die Meßfehler weiß, z.B. deren Mittelwerte und Streuungen kennt, dann lassen sich mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung bessere bzw. optimale Schätzwerte erzielen. Die Meßfehler der Sensoren und ebenso die unbekannten Eingangsgrößen (Störgrößen) werden dann als vektorielle Zufallsprozesse (stochastische Prozesse) beschrieben, und man spricht von stochastischer Filterung. Die lineare Filteraufgabe, ursprünglich von Wiener und Kolmogoroff für Spezialfälle behandelt, ist mittlerweile von Kalman und Bucy umfassend gelöst worden. Zahlreiche Anwendungen beweisen den Erfolg ihrer Theorie. In diese Theorie will das vorliegende Buch einführen. Dabei wird das Thema stufenweise aufgebaut und mit möglichst elementaren Methoden behandelt.

Im ersten Kapitel wird die Beobachtungsaufgabe für lineare

Systeme in diskreter und kontinuierlicher Zeit formuliert und gelöst. Daneben werden die Begriffe der Beobachtbarkeit, Dualität und Steuerbarkeit eingeführt. Als Vorstufe zur Kalman-Filterung wird die Gaußsche Ausgleichsrechnung dargestellt.

Im zweiten Kapitel, das den Hauptteil des Buches bildet, werden -ausgehend von der Ausgleichsrechnung und dem Verfahren der minimalen Varianz- die Aufgabenstellung, die Voraussetzungen und die Lösung der Kalmanschen Filteraufgabe (für lineare Systeme in diskreter Zeit) behandelt. Daraus wird anschließend das Kalman-Bucy-Filter (für lineare Systeme in kontinuierlicher Zeit) in neuartiger Weise durch einen Grenzübergang abgeleitet. Es wurde versucht, trotz des begrenzten Umfangs eine vollständige und exakte Darstellung der Grundbegriffe, Herleitungen und Ergebnisse zu bringen, um ein in sich abgeschlossenes Bild der Theorie vorzulegen. Daneben werden auch die bei der Erstellung des mathematischen Modells des beobachteten Systems und bei der Realisierung des Filters auftretenden Fragen angeschnitten.

Das dritte und letzte Kapitel geht auf ausgewählte Probleme ein, die das Thema abrunden: Beobachter im geschlossenen Regelkreis und algebraische Separation, Filter im Regelkreis und stochastische Separation, Wiener-Filter als Spezialfall des Kalman-Bucy-Filters, Filter mit verringerter Ordnung. Es schließt mit einem Ausblick auf den Itô-Kalkül und die nichtlineare Filterung.

Zum gründlichen Verständnis des Kalman-Bucy-Filters muß die Beherrschung der notwendigen Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und aus der Theorie der Zufallsprozesse vorausgesetzt werden. Neulinge auf diesen Gebieten stehen dabei vor zwei Problemen. Erfahrungsgemäß bereitet es ihnen einerseits erhebliche begriffliche Schwierigkeiten, den Übergang von der gewohnten Betrachtungsweise deterministischer Vorgänge zur mathematischen Beschreibung von zufallsbedingten Vorgängen zu vollziehen. Andererseits ist es äußerst mühsam und zeitraubend, sich die zur Kalman-Bucy-Filterung erforderlichen Grundlagen aus dem umfangreichen Schrifttum über Wahrscheinlichkeitstheorie herauszusuchen, da nur bestimmte Ausschnitte davon benötigt werden.

Um beiden Problemen gerecht zu werden, hat G. Siffling das in der gleichen Reihe erscheinende Buch

STOCHASTISCHE GRUNDLAGEN DES KALMAN-BUCY-FILTERS
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zufallsprozesse

geschrieben. Es bildet mit dem vorliegenden, von K. Brammer verfaßten Buch

KALMAN-BUCY-FILTER
Deterministische Beobachtung und Stochastische Filterung

eine inhaltlich abgestimmte Einheit.

Im Grundlagenband wird zunächst in knapper Form die Beschreibung dynamischer Systeme durch Zustandsvariable behandelt. Der Hauptteil führt den Leser dann auf elementarem Wege in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und in die Theorie der Zufallsprozesse ein, wobei keinerlei Vorkenntnisse auf diesem Gebiet vorausgesetzt werden. Schließlich wird gezeigt, wie sich die Eigenschaften eines Zufallsprozesses bei der Übertragung durch ein lineares System verändern und wie diese veränderten Eigenschaften berechnet werden können.

Der Inhalt jedes der beiden Bücher wird durch einen von K. Brammer verfaßten Anhang über Matrizenrechnung ergänzt.

Ursprünglich sollte der gesamte Stoff in einem einzigen Band erscheinen. Die nun vorgenommene Teilung hat aber zwei Vorteile:

1. Der mit den Grundlagen bereits vertraute Leser braucht nur das zweite Buch zu kaufen.

2. Das erste Buch bringt die stochastischen Grundlagen so ausführlich und genügend allgemein, daß es auch als eigenständiges Lehrbuch Verwendung finden kann.

Um aber das gemeinsame Konzept des Entstehens, die Begründung für die Auswahl der Grundlagen und die inhaltliche Abstimmung beider Bücher auch äußerlich in Erscheinung treten zu lassen, werden die gemeinsamen Verfasser der Gesamtarbeit sowie der Passus "Kalman-Bucy-Filter" auf beiden Büchern genannt.

Am Zustandekommen eines Buches sind aber nicht allein die Autoren beteiligt. Wir möchten uns daher bei all denen bedanken, die beim Entstehen der beiden Bücher mitgeholfen haben. Zunächst gilt unser Dank der Geduld und Nachsicht der Herausgeber der Reihe "Methoden der Regelungstechnik". Vor allem aber schulden wir Herrn Professor Föllinger Dank. Ohne seine stete Ermutigung und tatkräftige Unterstützung hätte diese Buchidee nicht verwirklicht werden können.

Wir bedanken uns bei Frau Rita Bellm, die das schwierige Manuskript in so sorgfältiger Weise mit der Maschine geschrieben hat, bei Frau Ilse Kober für das Anfertigen der Zeichnungen sowie bei Herrn Dr. Erich Ziegler, der das mühsame Erstellen des Stichwort-Verzeichnisses übernommen hat.

München Im Oktober 1974 Karlsruhe

K. Brammer G. Siffling

1. Die Beobachtung des Zustandsvektors

1.1 Einleitung

Naturwissenschaftler und Ingenieure sind von alters her an der Erfassung ihrer physikalischen bzw. technischen Umwelt interessiert. Um einen bestimmten Vorgang in seinem Wesen erklären zu können, müssen die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten durch Versuche und Beobachtungen aufgespürt und in die Form mathematischer Modelle gebracht werden. Einer der größten Fortschritte auf diesem Gebiet war die Einführung dynamischer Modelle, die mit der Entdeckung der bekannten Gesetze von Newton begann. Das Ziel der Modellbildung ist gewöhnlich, quantitative Aussagen über das Verhalten des betrachteten Systems zu gewinnen, sei es zur Beschreibung eines in der Gegenwart ablaufenden Vorganges oder zur Vorhersage zukünftiger Ereignisse und Versuche.

Im Laufe der Zeit wurden die mathematischen Modelle der physikalischen Umwelt immer mehr verfeinert. In gleichem Maße stiegen die Anforderungen an die Genauigkeit der Meß-, Schätz- und Vorhersageverfahren für die interessierenden Größen. Als beispielsweise im Jahre 1801 der erste, gerade entdeckte Planetoid Ceres in der Sonnenstrahlung verloren ging, nachdem er nur auf einem Vierzigstel seiner Umlaufbahn beobachtet worden war, versuchten es die Astronomen vergeblich, ihn jenseits der Sonne wieder zu orten. C.F. Gauß jedoch gelang es, die Bahn von Ceres mit Hilfe seiner 1795 entwickelten Methode der kleinsten Quadrate so genau zu bestimmen, daß der Planetoid wiedergefunden werden konnte [1.1].

Die Methode der kleinsten Quadrate, die im einfachsten Sonderfall den algebraischen Mittelwert liefert, ist das klassische Verfahren für den systematischen Ausgleich zufallsbedingter Meßfehler (Ausgleichsrechnung). Bereits im Jahre 1821 gab Gauß auch noch eine rekursive Variante an, die es ermöglicht, einen zuvor errechneten Schätzwert nach Eintreffen eines zusätzlichen Meßwertes zu korrigieren, ohne die gesamte Rechnung von vorne an wiederholen zu müssen [1.2]. Dieses Konzept ist 1950 von Plackett wieder aufgegriffen und auf mehrere gleichzeitige Zusatzmessungen verallgemeinert worden [1.3].

Im vorliegenden Kapitel wird die Beobachtungsaufgabe im regelungstechnischen Sinne wie üblich so formuliert, daß der unzugängliche Zustandsvektor einer Regelstrecke auf Grund von Messungen der Ausgangsgrößen abgeschätzt werden soll. Störgrößen am Eingang der Strecke werden bei der Beobachtungsaufgabe nicht berücksichtigt; Meßfehler bei den Ausgangsgrößen werden zwar einbezogen, aber nicht spezifiziert. Insofern ist dieses Problem ein Vorläufer und Sonderfall der Filteraufgabe.

Die Behandlung geschieht durchgehend im Zustandsraum, wobei die von Kalman ausgearbeiteten Begriffe der Beobachtbarkeit, der Dualität und der Steuerbarkeit ebenfalls erklärt werden [1.4], [1.5]. Die wesentlichsten Ergebnisse dieses Kapitels sind die Beobachtungsgesetze in den verschiedenen Formen, die die Lösung der Beobachtungsaufgabe bilden. Kontinuierliche und diskrete Zeit wird dabei gleichermaßen berücksichtigt. Es wird gezeigt, daß die Schätzung des Zustandsvektors durch blockweise Verarbeitung kumulierter Meßgrößen in den Rahmen der Gaußschen Ausgleichsrechnung gestellt werden kann, und daß die Kalmansche Beobachtbarkeitsmatrix eine dem Problem entsprechende Gaußsche Normalmatrix ist.

Die kumulativen Beobachtungsgesetze für kontinuierliche und diskrete Zeit haben die Form von Integralen bzw. Summen. Diese lassen sich in geeigneter Weise zu Systemen von Differential- bzw. Differenzengleichungen umformen, so daß nun Beobachtungsgesetze für die rekursive Verarbeitung sequentiell eintreffender Meßwerte gegeben sind. Das Interesse für diese Form der Beobachtung und Schätzung stieg Ende der 50er Jahre sprunghaft an. Einerseits entstand damals ein einschlägiger Bedarf durch die aufkommende Raumfahrt und andererseits boten die inzwischen entwickelten, leistungsstarken Digitalrechner die Möglichkeit, die rekursive Schätzung in Echtzeit auszuführen. In diesem Zusammenhang vollzog sich auch ein Wandel in der Auffassung von Beobachtern bzw. Filtern: Sie wurden nicht mehr als Frequenzgänge oder Übertragungssysteme gesehen wie noch zu Zeiten von Wiener, Bode und Shannon, sondern als Rechenalgorithmen zur Echtzeitberechnung von Gaußschen, Gauß-Markoffschen bzw. Minimum-Varianz-Schätzwerten, von bedingten Erwartungswerten oder sogar ganzer bedingter Verteilungen.

Die rekursiven Beobachtungs- und Filtergesetze in der Form von Differential- bzw. Differenzengleichungen lassen sich unmittelbar hardware- oder softwaremäßig realisieren. Sie sind auch für zeitvariable Regelstrecken und endliche Beobachtungsintervalle gültig. Zahlreiche Anwendungen der Beobachtungs- und Filtertechnik, insbesondere bei der Bahnbestimmung von Luft-, Raum- und Unterwasserfahrzeugen, belegen die praktische Bedeutung dieser Theorie. Die ersten Anwendungen sind in [1.6] und [1.7] beschrieben.

Die Filteraufgabe ist eine Verallgemeinerung der in diesem Kapitel als Vorstufe behandelten Beobachtungsaufgabe. Bei der Filterung werden die stochastischen Störgrößen und Meßfehler explizit berücksichtigt. Das Filter hat die gleiche Struktur wie der entsprechende Beobachter. Der Unterschied besteht darin, daß die Verstärkungsgrade des Filters optimal bezüglich der gegebenen statistischen Eigenschaften der stochastischen Stör- und Meßgeräusche sind, während die Verstärkungsgrade des Beobachters nach anderen Gesichtspunkten ausgewählt werden können. Wir kommen auf die Filteraufgabe im 2. Kapitel zurück.

1.2 Die Beobachtungsaufgabe

In der Regelungstechnik entstand der Bedarf an Schätz- und Filterverfahren in besonderem Maße, als die moderne Theorie der optimalen Regelung entwickelt wurde. Die Regelgesetze, die sich nach Anwendung der Variationsrechnung (Carathéodory [1.8]), des dynamischen Programmierens (Bellman , [1.9]) und des Maximumprinzips (Pontryagin [1.10]) ergeben, verlangen gewöhnlich die Rückführung des gesamten Zustandsvektors der Regelstrecke. Die klassische Rückführung der Ausgangsgröße allein reicht nun nicht mehr aus. Vielmehr entsteht das Problem, aus der oder den gemessenen Ausgangsgrößen den Zustandsvektor der Strecke zu bestimmen. Sind Störgrößen und Meßgeräusche dabei so geringfügig, daß sie beim Entwurf keine wesentliche Rolle spielen, dann sprechen wir von einem Beobachtungsproblem, andernfalls von einem Filterproblem. In diesem Abschnitt wird das Beobachtungsproblem mathematisch formuliert und erörtert.

Die Beobachtungsaufgabe: Gegeben sei ein dynamisches System in der Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t) \qquad t_0 \leq t \tag{1.1a}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) \tag{1.1b}$$

Dabei ist $\underline{x}$ der n-dimensionale unbekannte Zustandsvektor, $\underline{u}$ der p-gliedrige bekannte Stellvektor und $\underline{y}$ der Vektor der m simultan gemessenen Ausgangsgrößen; $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ sind entsprechend dimensionierte, gegebene Matrizen (Bild 1.1, oberer Teil). Gesucht ist ein Schätzwert für $\underline{x}(t_0)$ oder $\underline{x}(t)$.

Anmerkung: Die Kenntnis von $\underline{x}(t_0)$ bzw. von $\underline{x}(t)$ ist beim Beobachtungsproblem im Prinzip äquivalent, denn der eine Zustand läßt sich jeweils durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsintegration der Dgl. (1.1a) aus dem anderen errechnen.—

Die Lösung der Beobachtungsaufgabe ist trivial, wenn die Meßmatrix $\underline{C}(t)$ quadratisch-regulär ist, denn dann gilt offenbar

$$\underline{x}(t) = \underline{C}^{-1}(t)\underline{y}(t). \tag{1.2}$$

Dieser Fall kommt z.B. vor, wenn genügend Sensoren zur Erfassung sämtlicher Zustandsvariablen der Strecke eingesetzt werden können und systematische und zufällige Meßfehler vernachlässigbar sind.

Abgesehen davon, daß in der Praxis jeder zusätzliche Sensor neue Kosten verursacht, ist eine quadratisch-reguläre Meßmatrix in den meisten Fällen überhaupt nicht realisierbar. Für Strecken mit weniger Ausgangsgrößen als Zustandsvariablen müssen daher andere Beobachtungsverfahren gefunden werden.

Der nächstliegende Gedanke ist, die Ausgangsgröße $\underline{y}(t)$ genügend oft zu differenzieren und die Matrix $\underline{C}$ durch Anfügen entsprechender Zeilen solange zu vergrößern, bis eine reguläre Matrix beisammen ist. Um das Wesentliche dabei zu erkennen, genügt es hier, ein System n-ter Ordnung mit konstanten Parametern und einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße zu betrachten:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\ \underline{x}(t) + \underline{b}\ u(t) \tag{1.3a}$$

$$y(t) = \underline{c}'\underline{x}(t) \tag{1.3b}$$

Die Gleichung (1.3b) wird nun wiederholt nach t abgeleitet, wobei $\dot{\underline{x}}$ jedesmal gemäß (1.3a) substituiert wird:

$$\begin{aligned}
y &= & &= \underline{c}'\underline{x} \\
\dot{y} &= \underline{c}'\dot{\underline{x}} & &= \underline{c}'\underline{A}\ \underline{x} + \underline{c}'\underline{b}\ u \\
\ddot{y} &= \underline{c}'\underline{A}\ \dot{\underline{x}} + \underline{c}'\underline{b}\ \dot{u} & &= \underline{c}'\underline{A}^2\underline{x} + \underline{c}'\underline{A}\ \underline{b}\ u + \underline{c}'\underline{b}\ \dot{u} \\
&\ \vdots & & \\
\overset{(n-1)}{y} &= \ \ldots & &= \underline{c}'\underline{A}^{n-1}\underline{x} + \sum_{i=0}^{n-2} \underline{c}'\underline{A}^{n-2-i}\underline{b}\ \overset{(i)}{u}
\end{aligned} \tag{1.3c}$$

Anmerkung: Dieses Vorgehen läßt sich auch bei dem allgemeinen System (1.1) durchführen, wobei die Produktregel der Differentialrechnung anzuwenden ist. Ausreichende Differenzierbarkeit der Matrizen $\underline{A}(t)$, $\underline{B}(t)$ und $\underline{C}(t)$ muß allerdings vorausgesetzt werden. Das Ergebnis enthält außer den obigen Termen noch Glieder mit den Ableitungen von $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ (siehe Gl. (1.25)).-

Die Zeilenvektoren, die beim Gleichungssystem (1.3c) im Skalarprodukt mit $\underline{x}$ stehen, werden zu einer nxn-Matrix aufgeschichtet, während alle bekannten Größen auf die andere Seite gebracht werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{c}' \\ \underline{c}'\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{c}'\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - \underline{c}'\underline{b}\ u(t) \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y}(t) - \sum_{i=0}^{n-2} \underline{c}'\underline{A}^{n-2-i}\underline{b}\ \overset{(i)}{u}(t) \end{bmatrix} \tag{1.3d}$$

Wenn die Matrix links von $\underline{x}(t)$ regulär ist, läßt sich diese Gleichung nach $\underline{x}(t)$ auflösen. Andernfalls ist die Berechnung von $\underline{x}$ prinzipiell unmöglich, wie später im Abschnitt über Beobachtbarkeit ausgeführt wird. Dort wird auch gezeigt, daß es unmöglich ist, durch weiteres Ableiten bzw. Anfügen der Zeilen $\underline{c}'\underline{A}^n$, $\underline{c}'\underline{A}^{n+1}$ usw. zusätzliche linear unabhängige Gleichungen für $\underline{x}$ zu gewinnen (Cayley-Hamilton-Theorem). Im übrigen ist gegen diese Methode vom rein theoretischen Standpunkt aus wenig einzuwenden. Bei Systemen höherer Ordnung ($n \geq 3$) ist sie aber praktisch kaum realisierbar, weil durch das wiederholte Differenzieren selbst ganz geringe Meßgeräusche unzulässig verstärkt würden, während Unstetigkeiten in der Stellgröße u und ihren Ableitungen schnell zur Sättigung der Differenzierglieder führen würden. Außerdem tragen die bisher vernachlässigten, eingangsseitigen Störgrößen ihre Ableitungen in ähnlicher Weise wie $\underline{u}$ zur rechten Seite der Gl.(1.3d) bei und würden, da sie nicht erfaßbar sind, das Ergebnis weiter verschlechtern.

Als nächstes Konzept zur Lösung der Beobachtungsaufgabe untersuchen wir die Verwendbarkeit eines Modells der Regelstrecke. Die Lösung der Dgl.(1.1a) hat bekanntlich die allgemeine Form

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t,t_0)\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{\Phi}(t,\tau)\underline{B}(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \qquad (1.4)$$

Dabei ist $\underline{\Phi}(t,t_0)$ die Transitionsmatrix zu $\underline{A}(t)$, siehe [1.20]. Die Lösung setzt sich additiv aus einem freien und einem erzwungenen Anteil zusammen. Wenn das System genügend stabil ist, klingt die freie Lösung $\underline{\Phi}(t,t_0)\underline{x}(t_0)$ bald ab, und der Zustand $\underline{x}(t)$ wird danach nur noch durch die erzwungene Lösung

$\int_{t_0}^{t}\underline{\Phi}(t,\tau)\underline{B}(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau$ bestimmt. Dieser Lösungsanteil läßt sich

z.B. durch ein Modell der Strecke erzeugen, das die Anfangsbedingung null erhält und mit der gleichen Stellgröße wie die Strecke beaufschlagt wird. Der Beobachter hat demnach die Form:

$$\frac{d}{dt}\,\hat{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\hat{\underline{x}}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t), \quad \hat{\underline{x}}(t_0) = \underline{0} \qquad (1.5)$$

Dabei ist $\hat{\underline{x}}(t)$ der Schätzwert für $\underline{x}(t)$, Bild 1.1 . Von der Ausgangsgröße $\underline{y}(t)$ wird offenbar keinerlei Gebrauch gemacht.