通信工程专业基本理论与工程实践系列丛书

# 随机信号与系统

刘磊 王琳 编著

4

清华大学出版社

# 随机信号与系统

通信工程专业基本理论与工程实践系列丛书

# 随机信号与系统

刘磊 王琳 编著

清华大学出版社
北京

## 内容简介

本书主要讨论随机信号的基础理论和分析方法。全书共分5章，包括概率论基础，随机信号的时、频域特性，随机信号通过线性系统的特性，随机信号的相关实验与仿真等内容。

本书强调对随机信号基本概念的理解，并要求掌握系统的分析方法，注重理论基础，紧密联系工程实践，内容全面，叙述清楚，例题与图示丰富，便于教学和自学。

本书可作为高等院校电子信息类专业的本科生教材，也可供相关领域的科研和工程技术人员参考。



**图书在版编目(CIP)数据**

随机信号与系统/刘磊，王琳编著.--北京：清华大学出版社，2011.1
(通信工程专业基本理论与工程实践系列丛书)
ISBN 978-7-302-24490-5

Ⅰ.①随…　Ⅱ.①刘…②王…　Ⅲ.①随机信号—信号理论②随机信号—信号分析
Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第006619号

**责任编辑**：邹开颜　赵从棉
**责任校对**：刘玉霞
**责任印制**：杨　艳
**出版发行**：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质量反馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 刷 者**：北京富博印刷有限公司
**装 订 者**：北京市密云县京文制本装订厂
**经　销**：全国新华书店
**开　本**：185×230　**印　张**：11.5　**字　数**：232千字
**版　次**：2011年1月第1版　**印　次**：2011年1月第1次印刷
**印　数**：1～3000
**定　价**：25.00元

产品编号：034157-01

# 前言

FOREWORD

随机信号分析是电子信息类专业的一门重要基础课程。其内容抽象难懂，对于三本和高职高专类的高校而言，没有一本合适的教材。本书是编著者结合近年来在三本院校从事该门课程的教学与研究经验，借鉴现有同类教材的长处，精心编撰而成的。

在编写过程中，力求突出如下鲜明的特色：

(1) 注重理论基础，结构合理，叙述简明。传统教学中，对随机信号的讲解采用了统计学的思想，学生感觉内容抽象，模糊难懂，因此本书在章节的选择与表述上，具有系统性、条理性和简明性，以突出重点，便于阅读理解。

(2) 例题和图表丰富。理论知识经常难以透彻地理解，通过例题可以说明问题的应用背景，示范分析思路、方法和技巧。

(3) 结合专业特点，联系工程实际，强调物理意义。本书安排了专门的章节，阐述噪声中随机信号的检测、提取和数据采集技术，示范了运用 MATLAB 和 C 语言进行实践的具体方法，更加直观、易于理解。

本书由刘磊和王琳编著。其中，王琳编写第 1，2 章，刘磊编写第 3 至 5 章。全书由刘磊统编定稿。本书的出版得到了清华大学出版社的大力支持，邹开颜老师为本书花费了不少精力，在此表示衷心的感谢。此外，在编写过程中，作者查阅了大量资料。鉴于某些资料无法确认原始作者，参考文献未能一一列出，在此一并表示感谢。

由于编著者水平有限，书中难免存在谬误和疏漏，恳请读者给予批评指正。

编著者

2010 年 12 月

# 目录

CONTENTS

# 第1章 概率论基础

## 1.1 概率论的基本概念

### 1.1.1 样本空间　事件与概率

**1. 样本点与样本空间**

1）随机现象

随着人们对自然科学和社会科学的深入研究，发现客观现象虽然多种多样，但大致可以分为两大类：确定性现象和随机现象。

确定性现象的特点是在准确重复某些条件时，它的结果总是确定的：必然发生或必然不发生。比如，上抛的石子必然会下落；同性电荷必然相互排斥；投掷六面的均匀骰子必然不会出现大于六点的一面。如何研究确定性现象呢？可以使用几何、代数、微分方程等数学工具。

随机现象的特点是在准确重复某些条件时，其结果可能有许多种，在实验前无法预知，呈现一种偶然性的现象。比如：

（1）抛一枚均匀硬币若干次，每次抛之前都不知会出现正面还是反面；

（2）投掷一颗骰子，观察出现的点数；

（3）在一批灯泡中任意抽取一只测试它的寿命。

如何研究随机现象呢？我们要学会透过现象看本质。对于随机现象，其结果虽然在个别实验中呈现出不确定性，但人们经过长期深入研究后发现，在大量重复实验时，随机现象的结果呈现出十分明显和稳定的某种规律性。比如，抛硬币时正、反面出现的次数

各趋于一半，投掷骰子时每一面出现的次数趋于相同等。我们称大量同类随机现象所呈现的这种规律性为随机现象的统计规律性。

概率论就是研究随机现象的统计规律性的数学学科。它用来研究相继发生或同时发生的大量现象的平均特性，如电子发射、电话呼叫、雷达检测、质量控制、系统故障、机遇游戏、统计力学、湍流、噪声、出生率与死亡率、排队论等。

2）随机实验

所谓实验，指人们对自然现象和社会现象进行观察而安排的各种科学实验。

随机实验，即针对随机现象进行观察而做的实验。其目的就是为了观察实验中出现的各种现象，研究实验的各种可能结果。我们将一个随机实验用 E 表示，它具有以下特征：

（1）在相同条件下实验可重复进行；

（2）实验的全部可能结果，在实验前就已明确；

（3）一次实验结束之前，不能确定哪个结果会出现。

随机实验的例子很多，如下面所述。

E1：将一枚硬币连抛两次，观察正、反面出现的组合结果。

E2：投掷骰子，观察出现的点数。

E3：用电压表测量某接收机前端的噪声输出电压。

E4：在 50 只同一型号的晶体管中任取一只，记录其中的废品个数。

E5：测量某团体人员的身高。

E6：统计网络交换机 1s 内接收到的数据包数目及到达时刻。

我们通过研究随机实验来研究随机现象，本书中所提到的实验都是指随机实验。

3）样本点和样本空间

进行实验可以得到实验的各种可能结果。比如 2)中的随机实验 E2，有{1,2,3,4,5,6}共 6 种可能的结果；随机实验 E4，其废品个数可能是 0，或 1，或 2，…，或 50。

为了形象地表示一个随机实验，我们可以用一个点表示实验中的每一个基本可能结果，称为随机实验的样本点，记为小写英文字母 $s$，表示为

$$\begin{matrix}\text{随机实验的} \\ \text{基本可能结果}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\text{随机实验的} \\ \text{样本点 } s\end{matrix} \tag{1.1}$$

随机实验的全部基本实验结果的集合，称为随机实验的样本空间，记为 $\Omega$，表示为

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\text{随机实验的全部基本实验结果}\} \\ &= \{s\text{：}s\text{ 为随机实验的基本实验结果}\}\end{aligned} \tag{1.2}$$

不同的随机实验具有不同的样本点和样本空间，比如 2)中的随机实验 E1 和 E2。相同的实验安排是否具有同样的样本空间呢？也不一定。由于实验中研究和观察的对象不同，相同实验安排也可能有不同的实验样本点和样本空间。比如 2)中的随机实验 E2，目的是观察出现的点数，样本空间有 6 个样本点；但如果改成观察出现的点数为偶数，则有{2,4,6}共 3 种可能的结果，即样本空间有 3 个样本点。

**例 1.1** 观察某个随机电压发生器输出的电压 $U$，测量该电压的数值。若电压发生器输出电压 $U$ 的数值范围在$[u_1,u_2]$上，其中 $u_1$ 和 $u_2$ 为确定量，试分析该实验的样本点和样本空间。

**解** 对随机电压发生器输出的电压 $U$ 进行测量。某次测量所得到的电压 $u$，根据给定的条件，测得的数值必定满足

$$u \in [u_1, u_2]$$

不满足该式的任何电压数值不可能是这一实验的测试结果。因此，$u\in[u_1,u_2]$是该实验的基本可能结果。所有这些基本可能结果的集合就是该实验的样本空间 $\Omega$：

$$\Omega = \{u: u \in [u_1, u_2]\}$$

其上的基本可能实验结果 $u$ 可以表示为实轴上的一点，样本空间 $\Omega$ 就是实轴上的一个闭区间$[u_1,u_2]$，如图 1.1(a)所示。这种空间或集合的几何表示常称为文氏图。

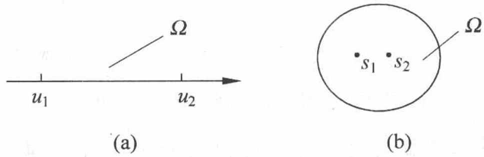


图 1.1 实验样本空间

(a) 连续样本空间；(b) 离散样本空间

**例 1.2** 实验安排与例 1.1 相同。但是此次观察输出电压 $u\geqslant u_0$ 和 $u<u_0$ 的情况，$u_0$ 是$[u_1,u_2]$上的一个确定数值。试分析实验的样本点和样本空间。

**解** 这一随机实验的可能结果有两个：$s_1$ 和 $s_2$。$s_1$ 表示 $u\geqslant u_0$，$s_2$ 表示 $u<u_0$，其中 $u_0\in[u_1,u_2]$。因此，这时实验的样本点 $s_1$，$s_2$ 和样本空间 $\Omega$ 可以表示成图 1.1(b)，而且有关系式 $\Omega=\{s_1,s_2\}$。

随机实验中的基本可能结果或者是可以计数的，或者是不可以计数的。由此，样本空间 $\Omega$ 可以分为以下两种。

有限样本空间：由有限个样本点构成的样本空间，比如例 1.2。

无穷样本空间：由无穷多个样本点构成的样本空间，比如例 1.1。

样本空间这个概念可使研究结果更具广泛性，利于更好地把握随机现象的本质。比如，仅包含两个样本点的样本空间，它既能作为抛硬币出现正反面的模型，也可用来描述射击是否中靶，及产品检验出现合格品和不合格品等类似问题。尽管现象的实际内容各色各异，但应用样本空间描述后却能归结为相同的概率模型。

**2. 事件的关系和运算**

1）随机事件的定义和分类

进行一次随机实验，有这样或那样的事情发生，它们各有不同的特性，彼此之间又有一定的联系。称随机实验中可能发生也可能不发生的事情为随机事件，简称事件，通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。

事件对应于随机实验中所观察的对象。某个事件可以是某个基本可能结果，也可以是具有某种特征的一类基本可能结果。它是样本空间 $\Omega$ 中的若干个样本点组成的集合，即是样本空间 $\Omega$ 的子集。

$$\begin{aligned}\text{实验中事件} &= (\text{具有一定条件的基本可能实验结果}) \\ &= (\text{具有一定条件的样本点}) \\ &= \text{样本空间的某个子集}\end{aligned} \tag{1.3}$$

给定实验中事件的方法有两种：一种是表列法，列举出属于该事件的所有可能的基本实验结果；另一种是描述法，指出属于该事件的各个基本实验结果应该具备的条件。前面例 1.1 中给定 $\Omega$ 的方法是描述法，例 1.2 中给定 $\Omega$ 的方法是表列法。

**例 1.3** 随机实验 E2：投掷骰子，观察出现的点数。每个实验结果 1,2,3,4,5,6 为其样本点，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。

样本空间 $\Omega$ 存在很多子集，比如

$$A=\{1\},\quad B=\{2,4,6\},\quad C=\{1,2,3,4,5,6\},\quad D=\varnothing,\cdots$$

每个子集都表示一个随机事件：$A$ 表示“投掷结果为 1 点”的事件；$B$ 表示“投掷结果为偶数”的事件；$C$ 表示必然事件；$D$ 表示不可能事件。

若某次投掷的结果为 2，可以说事件 $A$ 未发生，事件 $B$ 发生了，事件 $C$ 发生了，事件 $D$ 未发生，等等。

$A,B,C,D$ 都是随机事件，用表列法表示。

**例 1.4** 在 $0,1,2,\cdots,9$ 共十个数字中任意选取一个，可有 10 种不同的结果：

$$A_i=\{\text{取得的数是 } i\},\quad i=0,1,2,\cdots,9$$

还有其他的可能结果，比如

$$B=\{\text{取得的数是偶数}\},\quad C=\{\text{取得的数小于 }6\},$$
$$D=\{\text{取得的数是 }2\text{ 的倍数}\}$$

$B,C,D,A_i(i=0,1,2,\cdots,9)$都是随机事件，用描述法表示。

事件可以按其组成和性质分为如下四类。

(1) 必然事件：在随机实验中必然发生的事件，比如例 1.3 中的事件 $C$，例 1.4 中的事件{取得的数大于等于 0}。

(2) 不可能事件：在随机实验中必然不发生的事件，比如例 1.3 中的事件 $D$，例 1.4 中的事件{取得的数小于 0}。

(3) 基本事件：在随机实验中必发生一个且仅发生一个的最简单事件，比如例 1.4 中的事件 $A_i(i=0,1,2,\cdots,9)$。

(4) 复合事件：由若干基本事件组合而成的事件，比如例 1.3 中的事件 $B$，例 1.4 中的事件 $B,C,D$。

2) 随机事件的运算关系

事件是样本空间的子集，因此事件间的关系及运算与集合论中集合的关系及运算是相似的。下面阐述这些关系和运算在概率论中的含义。

设实验的样本空间为 $\Omega$，而事件 $A,B$ 是 $\Omega$ 的子集，用集合论中的文氏图来表示事件的关系和运算。

(1) 包含关系：$A\subset B$

事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，称事件 $B$ 包含事件 $A$，如图 1.2(a)所示。

对任一事件 $A$，都有$\varnothing\subset A\subset\Omega$。

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A=B$。

(2) 事件的和：$A\cup B$

事件 $A$ 和 $B$ 中至少有一个发生，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的和，如图 1.2(b)中阴影所示。

(3) 事件的积：$A\cap B$ 或 $AB$

事件 $A$ 和 $B$ 同时发生，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的积，如图 1.2(c)中阴影所示。

(4) 事件的互斥：$A\cap B=\varnothing$

事件 $A$ 和 $B$ 不能同时发生，称事件 $A$ 与事件 $B$ 互斥，如图 1.2(d)所示。

任意事件 $A$ 与不可能事件 $\varnothing$ 互斥；同一随机实验的基本事件都是互斥的。

(5) 事件的差：$A-B$

事件 $A$ 发生而同时 $B$ 不发生，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的差，如图 1.2(e)中阴影所示。

(6) 事件的逆：$\overline{A}$

事件 $A$ 不发生，称为事件 $A$ 的逆事件，如图 1.2(f)中阴影所示。

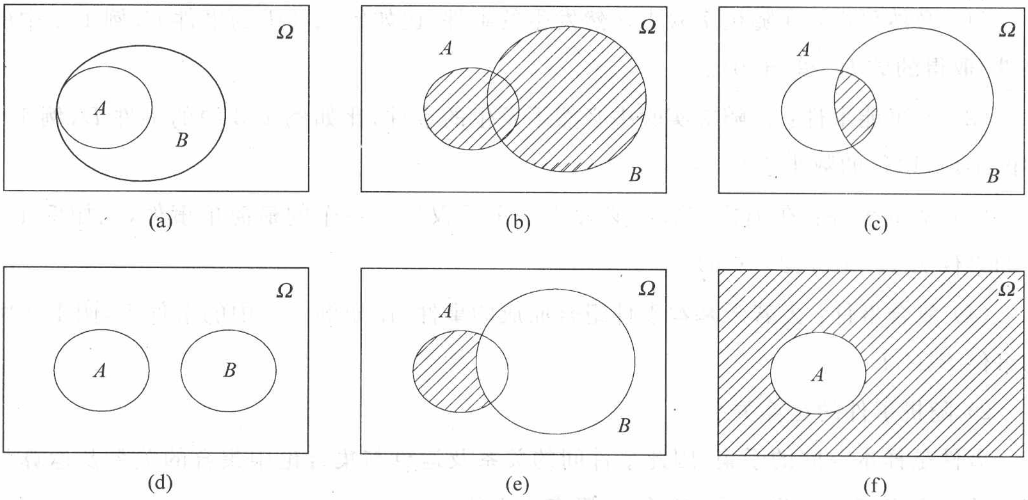


图 1.2 随机事件的关系和运算

(a) $A\subset B$；(b) $A\cup B$；(c) $A\cap B$；(d) $A,B$ 互斥；(e) $A-B$；(f) $\overline{A}$

它们可以推广到有限个或可列无穷多个事件的情形。

在进行事件运算时，常用到下述运算规律。

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A(BC)=(AB)C$

(3) 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC), A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A(B-C)=(AB)-(AC)$

(4) 吸收律：若 $A\subset B$，则 $AB=A, A\cup B=B$

(5) 德·摩根公式：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \tag{1.4}$$

事件的反复运算生成各种新的事件，各种不同事件的总体构成一个事件集合，称为事件域 $F$。

**例 1.5** 销钉的合格条件是长度和直径皆合格。设事件 $A_1$ 是长度合格，事件 $A_2$ 是直径合格，事件 $B$ 是产品合格，事件 $C$ 是产品不合格。试找出这几个事件的关系。

**解** $A_1 \supset B, A_2 \supset B, B \cap C = \varnothing, B \cup C = \Omega$

$B = \overline{C}, B = A_1 \cap A_2, C = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}, A_1 - B = A_1 \cap \overline{B}$

**例 1.6** 通信中的 QPSK 信号 $v(t,\theta) = V_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t + \theta)$，其相位 $\theta$ 有四种可能取值。令四个事件 $A_1$：$\theta = 0°$，$A_2$：$\theta = 90°$，$A_3$：$\theta = 180°$，$A_4$：$\theta = 270°$，试找出这几个事件的关系。

**解** $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega, A_1 \cap A_2 = \varnothing, A_1 \cap A_3 = \varnothing, \cdots$

**3. 概率与概率空间**

1）概率的定义

随机实验中的随机事件，其发生与否是偶然的、变化的，人们不能事先预知，但它们发生的可能性大小却是一个客观存在的量。比如抛硬币实验中，出现正面和反面的可能性基本相等；投掷骰子时每个点数出现的可能性基本相等。由于每个随机事件发生的可能性大小都是其内在规律的体现，因此可用一个确定的数值——“概率”来表示。概率是对随机事件发生可能性大小的一个客观度量，事件 $A$ 的概率记为 $P(A)$。

在概率论的发展过程中，对不同的实际应用，人们从不同的角度去定义和计算概率：

(1) 概率的古典定义；

(2) 概率的几何定义；

(3) 概率的统计定义。

上述三种概率的定义和计算方法均不同，都有其适用范围以及理论和应用的局限性。人们从这几种定义的共同性质出发，采用数学抽象的方法，给概率赋予了一个新的定义，即概率的公理化定义：设随机实验 E 的样本空间为 $\Omega$，若对于 E 的每一事件 $A$ 都对应一个实数 $P(A)$，其对应规则满足以下三条。

(1) 非负性：对任一事件 $A$，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1$；

(3) 可列可加性：对 E 的互斥事件列 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.5}$$

则称 $P(A)$是事件 $A$ 的概率。

**例 1.7** 一列 $N$ 个格子，将一只小球随机放入其中任一格子。求：(1)小球放入第 $k$ 号格子的概率；(2)前 $k$ 个格子中有小球的概率。

**解** (1) 因为小球放入任一格子是等概率的，则

$$P(\text{小球放入任一格子}) = \frac{1}{N}$$

(2) 因为小球放入各个格子是互斥的，则

$$P(\text{小球放入任意 } k \text{ 个格子}) = \frac{k}{N}$$

样本空间 $\Omega$、事件域 $F$ 和概率 $P$ 是概率论中的三个基本概念，它们构成的总体 $(\Omega,F,P)$称为随机实验 E 的概率空间。基于概率论解决实际问题的思路为：针对问题设计随机实验模型，确定其样本空间，合理地假设其中一些基本事件的概率，由此推导出人们感兴趣的事件概率和特性，圆满解决实际问题。

**例 1.8** 抛均匀硬币实验：一次投掷与相继两次投掷硬币，观察出现正面或反面结果的实验。分析这两个实验的概率空间问题。

**解** 实验 1：一次投掷观察硬币正、反面出现

实验的基本结果是：正面和反面。对应样本点：$s_1$＝正面，$s_2$＝反面。

(1) 样本空间：$\Omega=\{s_1,s_2\}$

(2) 事件域：$F=\{\{s_1\},\{s_2\},\varnothing,\Omega\}$

(3) 由硬币的均匀特性可得，$P\{s_1\}=P\{s_2\}=0.5$；而且 $P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$。

实验 2：连续两次投掷，观察硬币正、反面出现

(1) 样本空间：$\Omega=\{s_i,i=1,2,3,4\}$

$$s_1 = (\text{前一次投掷出现正，后一次投掷出现正}) = (\text{正，正})$$

$$s_2 = (\text{正，反}),\quad s_3 = (\text{反，正}),\quad s_4 = (\text{反，反})$$

(2) 事件域：$F=\{\{s_1\},\{s_2\},\{s_3\},\{s_4\},\varnothing,\Omega\}$

(3) $P\{s_1\}=P\{s_2\}=P\{s_3\}=P\{s_4\}=\dfrac{1}{4}$；而且 $P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$

2) 概率的性质

给定概率空间$(\Omega,F,P)$，由概率的公理化定义，可以得出概率的部分重要性质如下。

(1) 不可能事件的概率为 0：$P(\varnothing)=0$

(2) 有限可加性：若实验 E 的事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互斥，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

(3) 对任何事件 $A$ 有：$P(A)+P(\bar{A})=1$

(4) 单调性：若事件 $A$ 和 $B$ 为包含关系 $A\subset B$，则

$$P(A)\leqslant P(B) \text{ 和 } P(B-A)\leqslant P(B)-P(A) \text{ 成立}$$

(5) 加法定理：对实验 E 的任意两个事件 $A$ 和 $B$，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.6}$$

**例 1.9** 从 1～200 中任取一整数，求取到的整数能被 6 或者 8 整除的概率。

**解** 设事件 $A$=｛取得的整数能被 6 整除｝，事件 $B$=｛取得的整数能被 8 整除｝，所求概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

由于

$$33<\frac{200}{6}<34,\quad \frac{200}{8}=25$$

表明 $A$ 与 $B$ 所含基本事件数分别为 33 和 25，则

$$P(A)=\frac{33}{200},\quad P(B)=\frac{25}{200}$$

同时能被 6 和 8 整除的数，即为能被 24 整除的数。由于

$$8<\frac{200}{24}<9$$

表明 $AB$ 的基本事件数为 8，则

$$P(AB)=\frac{8}{200}$$

最后得所求概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{33}{200}+\frac{25}{200}-\frac{8}{200}=\frac{1}{4}$$

概率的公理化定义及性质是概率论的基石，它们源于科学实践，可以合理地表述与解释客观世界，并能有效地解决实际问题，为概率的计算提供了更完善的理论依据和极大的便利。