

中学数学中的物理方法



吴振奎 著

科学普及出版社

中学数学中的物理方法

本书是根据中学数学中物理竞赛题，精选而入，经
作者精心编选，按物理学科分门编排，便于学生按
图索骥，是一本很好的参考书。

吴振奎 著

科学普及出版社

内 容 提 要

用物理方法解答数学问题，有时很巧妙和简洁，但它常常被人们所忽视。本书就是介绍中学数学中那些可用物理方法解决的问题。这不仅能开阔学生的眼界，增加解决数学问题的手段，而且对某些物理现象（原理、定理）会有进一步的了解与认识。

本书可供具有中等文化水平的青少年和广大数学爱好者阅读，也可供广大数学、物理教师参考。

中学数学中的物理方法

吴 振 奎 著

责任编辑：颜 实

封面设计：王序德

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：4.5 字数：99千字

1987年5月第1版 1987年5月第1次印刷

印数：1—6,650册 定价：0.87元

统一书号：13051·1264 本社书号：0578

前 言

数学和物理有着不解之缘。自这两门学科诞生起，它们就互相启发、互相借鉴、互相帮助并一道发展。

用数学方法去解物理问题，似乎理所当然（因为数学是工具），但反过来用物理方法去解答数学问题却常被人们所忽视，实际上后者往往使解复杂的数学问题变得巧妙与简洁。

用物理方法解答数学问题，早在两千多年以前，古希腊学者阿基米德就已进行了开拓性的研究：他曾用力学中物体的平衡定律解一些几何问题，且将它们写入《一些几何命题的力学证明》一书。

微积分的产生是与物理（也包括工程）的研究分不开的。

近代的物理学，不仅为某些数学命题的证明，提出了明确的思路和简单的办法，甚至为数学提供了新的思想和方向，从而产生了新的数学分支。

这样，我们有必要去回顾、总结一下中学数学中那些可用物理方法来解决的问题，这不仅可开阔我们的眼界，增加解决数学问题的手段，同时对于某些物理现象（原理、定理等）会有进一步的了解与认识——这对数学和物理的学习，无疑都是有益的。

吴振奎

1982年春节

目 录

一、刚体变换和弹性体压缩	1
二、力学在数学上的一些应用	31
§1 重心原理及其在数学上的应用	32
§2 力系平衡概念的应用	57
§3 势（位）能最小原理及其应用	67
§4 力矩和功原理的应用	79
三、光学原理及其在数学中的应用	90
四、电学原理及其在数学中的应用	117
五、其他物理原理在数学中的应用	127

一、刚体变换和弹性体压缩

圆是最完美的图形。

——但丁 (Dante)

天气冷了，如果你细心观察就会发现，动物躺下时总要把身体缩成一团（成一个球），因为这样可以减少身体表面热量的损失。水银滚落地面，雨点打到荷叶上，都呈现球形。在表面张力的作用下，液体有力求使其表面积达到最小的趋势。这些可给我们带来一个启示（无异于要求我们去承认）：在体积一定的几何形体中，球的表面积最小。

若将一段柔软的细线两头连接起来，将它轻轻地放在一个蒙有肥皂膜的铁框上，再用小针将曲线里面的薄膜刺破，曲线就变成了圆。这是因为曲线里面薄膜消失后，外面的肥皂膜表面的张力收缩，牵制曲线且使曲线围成的面积尽可能地扩大。这又启发我们：

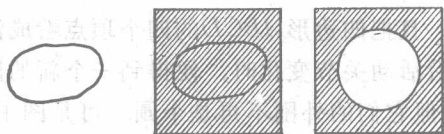


图 1-1

在周长一定的平面封闭曲线中，以圆的面积最大（等周定理）。

由上可以看到：物理现象不仅为我们提出某些数学问题，同时也可以帮助我们理解某些数学概念和结论。

它们的证明这里姑且不谈，下面我们先谈一下利用上面的结论，且借助于所谓“刚体”的性质及变换，去证明关于多边形面积的极值问题。

所谓“刚体”系指在空间移动而不改变其形状和大小的物体。利用“刚体”的某些性质可以巧妙地处理一些问题。我们先来看一个例子：

例 1 当四条边给定时，什么样的四边形面积最大？

解 我们由等周定理知道：定长曲线所围成的平面图形以圆面积最大。设四边给定的四边形 $ABCD$ 可内接于圆，我们把圆除去四边形后剩下的部分〔图1-2(1)中阴影部分〕

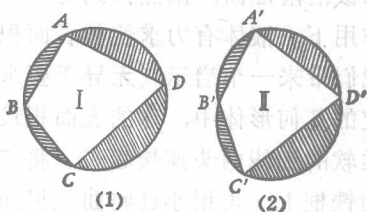


图 1-2

视为刚性板，且把四边形 $ABCD$ 的四个顶点看成活动关节，当刚性板块沿活动关节变化时，便得到一个新的图形〔见图1-2(2)〕——但它们的外围不再是个圆。可是图中阴影部分系刚性板块，即它位置变化时面积不变，且圆弧及弦长也不变，即它的周界长不变。

由 $S_{\odot} > S_{\text{图形}(2)}$ (等周定理)，

即 $S_{\text{阴影}} + S_I > S_{\text{阴影}} + S_{I'}$ ，

$\therefore S_I > S_{I'}$ 。 ($\because S_{\text{阴影}} = S_{\text{阴影}}$)

由此，我们得到结论：当四条边给定时，以圆内接四边形的面积为最大。

注 这个结论亦可用三角方法得到。

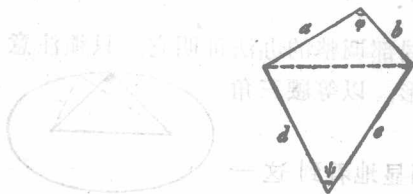


图 1-3

令四边形面积为 S , 四边为 a, b, c, d , 且 a, b 夹角为 φ , c, d 夹角为 ψ 。

$$\text{由 } 2S = ab\sin\varphi + cd\sin\psi, \quad (1)$$

由余弦定理有

$$\text{又 } \frac{1}{2}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2) = ab\cos\varphi - cd\cos\psi. \quad (2)$$

(1)² + (2)² 再整理有:

$$4S^2 + \frac{1}{4}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 = a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd[\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi].$$

$$16S^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 - 8abcd\cos(\varphi + \psi)$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4(a^2b^2 + c^2d^2) - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 - 8abcd\cos(\varphi + \psi)}.$$

显然当 $\varphi + \psi = \pi$ 时, S 最大。

仿照上面的方法, 我们还可以证明:

(1) 边数及周长给定的多边形, 以正多边形面积最大;

(2) 周长相同的两个正多边形, 边数多者面积也大。

下面我们仍利用刚体的性质, 证明上述结论。为了证明

(1), 我们先来证一下: 周长相同、边数一样的两个多边形, 以等边多边形面积最大。

这可由归纳法且通过局部调整的办法证明它。只须注意到: 给定底和两腰的三角形, 以等腰三角形面积最大。

(其实它又可从图 1-4 中明显地看到这一点, 注意到椭圆的性质。)

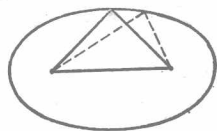


图 1-4

注 这个结论还可以用下面的办法证明:

若 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ (常数), 记 Π_1

$$= \prod_{i=1}^n x_i.$$

又令 $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y_k = x_k$ ($k = 3, 4, \dots, n$),

显然 $\sum_{i=1}^n y_i = 1$, 又记 $\Pi_2 = \prod_{i=1}^n y_i$, 我们有:

$$\Pi_1 < \Pi_2.$$

实因: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 > 0$,

即 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 > x_1 x_2$, 从而

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \cdot \prod_{i=3}^n x_i > x_1 x_2 \cdot \prod_{i=3}^n x_i,$$

即 $\prod_{i=1}^n y_i > \prod_{i=1}^n x_i$.

由此可以看到, 只要 x_i, x_j ($i \neq j$) 不相等就可重复上面步骤, 使和 $\sum x_i$ 不变, 而积 $\prod x_i$ 增大。

当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时，就不能再调整了，因而它的积 $\prod x_i$ 最大。

有了上面的准备，我们可用刚体的性质来证明 (1)。这只需证周长相同的等边 n 边形，当它能内接于圆时面积最大 (即为正 n 边形)。

证明的方法及步骤完全与例 1 的证明相同 (见图 1-5)。

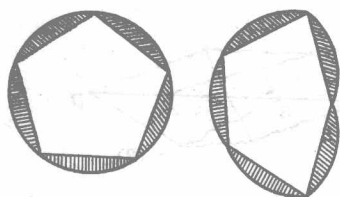


图 1-5

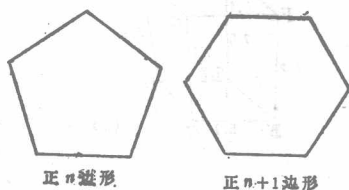


图 1-6

有了 (1) 我们不难证得 (2)，这只需把正 n 边形视为特殊的 $n+1$ 边形，即有一个顶点在某条边上而把此边一分为二。这样它便是不等边的 $n+1$ 边形，由 (1) 显然有： $S_{\text{正}n\text{边形}} < S_{\text{正}n+1\text{边形}}$ 。

上面我们看到利用刚体性质处理一类几何极值问题，其实它还可以有效地模拟处理一些实际问题。与运筹学有关的所谓“货郎担问题”(又称推销员问题)，是一种选择最佳路径的问题，下面的例子是它的简单情形，但我们却可用线段的“刚性”，巧妙地给以解决。

例 2 八个城市 A, B, C, D, E, F, G, H ，它们均匀地分布在地球上，且每相邻的三个城市间都有航线连通，它们之间的距离见图 1-7(1) 上所标。有一推销员想从 F 到 D 去，他应选择哪条路最经济？(单位里程旅费都一样)

直接计算未偿不可，只是略繁。我们可以这样处理：

解 按图中尺寸截取12根细铁线，再绑成如图样子，且在各顶点处粘一记号，分别写上A、B、…、H，然后一手拿住F点，一手拿住D点，轻轻拉紧，便成图1-7(2)的样子，其中最紧的一条：F-E-A-D即为所求。它的道理读者不难想通：因为两点间距离以直线段最短。

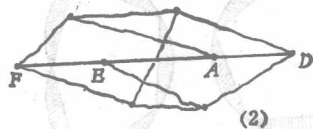
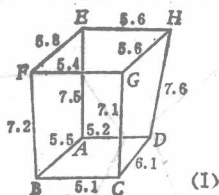


图 1-7

蜘蛛吃苍蝇的问题为人们所熟知和喜欢。问题是这样的：在一个长方体上B处落着一只苍蝇，与它邻接的面上A处有一蜘蛛，蜘蛛想吃掉苍蝇，当然希望找寻一条最短的路，应如何去找？

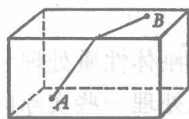


图 1-8

若把长方体表面看成刚性薄板，我们把它各面展开铺平后，在A、B间所连的线段即为所求（见图1-9），读者不难把这个问题还原回去。

上面我们看到利用刚体的性质解决一些极值问题，其实它的用途不止于此。比如通过对刚体的旋转也可以解决一些

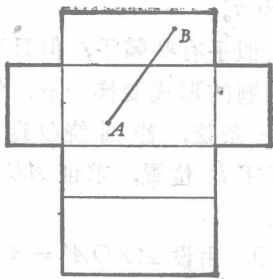


图 1-9

其他类型的几何问题。

例 3 设 M 、 N 是正方形 $ABCD$ 边 BC 、 CD 之中点，连 AM 、 BN 相交于 F ，试证：

- (1) $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle FMCN}$
- (2) $AM \perp BN$ 。

我们可以用三角形的全等去证明这两个结论，但若从另一角度考虑它们的证明，不仅结论是显然的，而且还可通过证明的剖析，将命题推广、引伸。

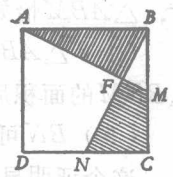
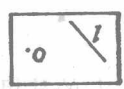


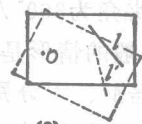
图 1-10

为此我们先证明一个结论：

设 O 和 l 分别是平面 M 上一个定点和一条定直线。今假设平面绕 O 旋转 α 角后，直线 l 旋转至 l' 位置(图 1-11(2))



(1)



(2)

图 1-11

试证 l 与 l' 的夹角为 α 。

这个问题看上去似乎有些棘手，但只要你动动脑筋，抓住问题的实质，把问题的形式变换一下，解答就容易了。

设 AB 是 $\odot O$ 的一条弦，若圆绕 O 旋转 α 角， AB 旋转至 $A'B'$ 位置，求证 AB 与 $A'B'$ 的夹角为 α 。

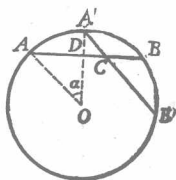


图 1-12

证 连 AO 、 $A'O$ ，由设 $\angle AOA' = \alpha$
在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle A'CD$ 中： $\angle A = \angle A'$ ， $\angle ADO = \angle A'DC$ (对顶角)，

故 $\angle A'CD = \angle AOA' = \alpha$ ，即 AB 与 $A'B'$ 的夹角为 α 。

下面回到我们的问题上来。

设 O 是正方形的中心，当正方形绕 O 旋转 90° (顺时针) 时， $\triangle ABM$ 恰好旋转至 $\triangle BCN$ 位置，这样显然有：

(1) $\triangle ABM \cong \triangle BCN$ ，从它们的面积中各减去 $\triangle BFM$ 的面积后，等式仍然成立，此即 $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle MCN}$

(2) BN 可视 AM 顺时针旋转 90° 后所得，故 $AM \perp BN$ 。

这个证明显得干净、简洁。

注 从证明过程中可以看到该问题实质上是利用正多边形关于中心对称的性质，这样前面的命题便可稍加推广，如：

1. 若 M 、 N 分别为正五边形 $ABCDE$ 的边 BC 、 CD 之中点，连 AM 、 BN 交于 F ，则 (1) $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle MCN}$ ；(2) AM 与 BN 的夹角为 $360^\circ/5 = 72^\circ$ 。

更一般的情形是：

2. 若 M 、 N 分别是正 n 边形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的某相邻两边的 m 等分点，连 A_kM 、 $A_{k+1}N$ 相交于 F 点，则 (1) $S_{\triangle A_kA_{k+1}F} = S_{\triangle A_{k+m}A_{k+m+1}F}$ ；(2) A_kM 与 $A_{k+1}N$ 的夹角为 $2\pi/n$ 。

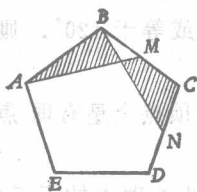


图 1-13

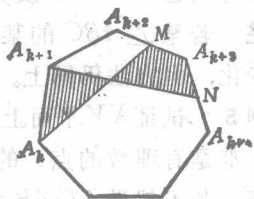


图 1-14

它们的证明，读者可仿上进行（若用老办法证明，恐要稍稍费点事）。第2个结论是显然的，若 M 、 N 不在正 n 边形相邻边上的时候，比如它们相隔 r 个顶点，那么自 A_k 、 A_{k+r} 与 M 、 N 之连线交于 F 后，亦有与上面类似的结论，这些留给读者考虑。

下面再来看一个例子。

例4 以 $\triangle ABC$ 三边为长各向三角形外作正三角形 BCX 、 CAY 、 ABZ ，则三线段 AX 、 BY 和 CZ 彼此相等，且两两夹角均为 60° 。

证 $AX=BY=CZ$ 的证明并不困难，只须考虑一些三角形全等就可以了，比如：

$$\triangle ABY \cong \triangle AZC,$$

只须注意到： $AZ=AB$ ， $AY=AC$ 及 $\angle ZAC=\angle BAY$ 即可。至于三线段两两夹角为 60° 的证明用一般方法则稍嫌麻烦了，但我们若想到：

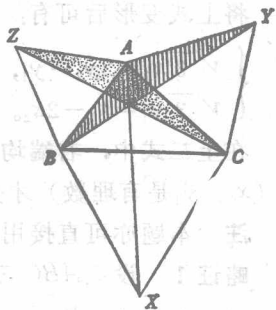


图 1-15

将 $\triangle ABY$ 绕 A 顺时针旋转 60° 即为 $\triangle AZC$ 的位置，这就是说 BY 、 ZC 的夹角为 60° （其实 $BY=CZ$ 亦可由此证得）。

同理可证 $AX = BY$ 及其夹角为 60° 等。

注 若某 $\triangle ABC$ 的某一内角大于或等于 120° ，则图形稍有变化，但方法仍同上。

例 5 试证 XY 平面上不存在三个顶点全是有理点（两个坐标都是有理数的点）的正三角形。

证 若不然设 $\triangle OAB$ 为各顶点均为有理点的正三角形，且设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 。

把 $\triangle OAB$ 视为刚体，且令其绕 O 逆时针旋转 60° ，此时 A 旋转至 B 处，由坐标变换公式应有：

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos 60^\circ - y_1 \sin 60^\circ, \\ y_2 = x_1 \sin 60^\circ + y_1 \cos 60^\circ; \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1, \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1. \end{cases}$$

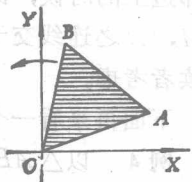


图 1-16

将上式变形后可有：

$$\begin{cases} \sqrt{3}x_1 = 2y_2 - y_1, \\ \sqrt{3}y_1 = x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

在上二式中，右端均系有理数，而左端仅当 $x_1 = y_1 = 0$ 时（ x_1, y_1 是有理数）才是有理数，与假设矛盾！

注 本题亦可直接用反证法去证：

略证 1 设 $\triangle ABC$ 三顶点坐标分别为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，由

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值, 知它是有理数,}$$

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]$
 $\sqrt{3}/4$ 是无理数, 显然矛盾!

略证 2 设 $\angle AOX = \theta$, 且 $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, 有 B 的坐标: $B(x_2, y_2)$

$$x_2 = r \cos(\theta + 60^\circ), \quad y_2 = r \sin(\theta + 60^\circ),$$

$$\text{即 } x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - \sqrt{3}y_1), \quad y_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x_1 + y_1).$$

$\because x_2, y_2$ 是有理数, $\therefore x_1 = y_1 = 0$. 这是不可能的.

从注中可以看到: 这个问题不用刚体稳转亦可解, 但有些问题则不然.

例 6 设 P 为正 $\triangle ABC$ 内任一点, 它到三顶点 A, B, C 的距离分别是 a, b, c , 试证: $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{8}(a^2 + b^2 + c^2) + 3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}/2$, 其中 $p = (a + b + c)/2$.

把 $\triangle ABP, \triangle CAP, \triangle CBP$ 均视为刚体;

证 将 $\triangle ABP$ 绕 A 旋转 60° 至 $\triangle AEC$ 的位置;

将 $\triangle CAP$ 绕 C 旋转 60° 至 $\triangle BCD$ 的位置;

将 $\triangle BCP$ 绕 B 旋转 60° 至 $\triangle AFB$ 的位置. (见图 1-17)

则 $S_{\triangle ABCDEF} = 2S_{\triangle ABC}$.

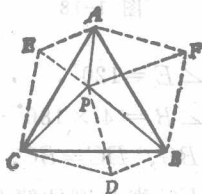


图 1-17

连 PD 、 PE 、 PF ，易证 $\triangle PDB \cong \triangle PFA \cong \triangle PEC$ ，且每个三角形三边分别为 a 、 b 、 c ，又 $\triangle AEP$ 、 $\triangle PBD$ 、 $\triangle PCD$ 都是等边三角形，它们边长分别为 a 、 b 、 c 。

上述六个小三角形的面积之和与 S_{ABCDEF} 相等，因而

$$S_{ABCDEF} = 3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} + \sqrt{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)/4, \text{ 这里 } p = (a + b + c)/2.$$

$$\text{从而 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF} = \sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)/8 + 3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}/2.$$

下面再看一个例子。

例 7 已知六边形 $ABCDEF$ 中， $\angle A = \angle C = \angle E = 120^\circ$ ，又 $AB = AF$ ， $CB = CD$ ， $ED = EF$ 。试证 $\triangle ACE$ 为正三角形。

证 将 $\triangle FAE$ 视为刚体而绕 A 旋转 120° （顺时针），使 AF 与 AB 重合而至 $\triangle ABG$ 处，连 CG （见图 1-18）。

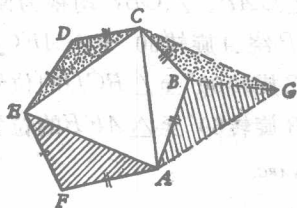


图 1-18

$$\because \angle A = \angle C = \angle E = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle F + \angle B = 4 \times 180^\circ - 3 \times 120^\circ = 360^\circ,$$

$$\text{又 } DE = EF = BG, DC = BC,$$

故 若再将 $\triangle DEC$ 视为刚体绕 C 逆时针旋转 120° 可恰为 $\triangle BGC$ 的位置。