应用数学例题演习

【2】

〔日〕道协义正 春海佳三郎 松浦省三 小林攻治 著

郑毓德 译

胡传淦 校

南开大学出版社

应用数学例题演习

（二）

复变函数篇

〔日〕道胁义正　春海佳三郎　松浦省三　小林政治　著

郑航德　译

胡传淦　校

南开大学出版社

1984年12月·天津

内容简介

本书译自日本流行的高等数学习题集，既概括高等数学的主要内容，扼要讲述基本理论，又结合理化、电工、建筑等多方面的具体应用实例，给出典型的例题详解，有助于在科技领域内应用高等数学。因此，本书比一般的习题集有更大的用处，可供理工学院、业大学生、自学青年和厂矿科技人员学习和进修高等数学之用。

全书共四册：一、微分方程篇；二、复变函数篇；三、统计行列式和概率；四、向量、傅里叶级数、傅里叶变换和特殊函数。

应用数学例题演习（二）

〔日〕道胁义正等著　郑毓德 译
胡传淦 校

南开大学出版社出版
天津八里台南开大学校内
新华书店天津发行所发行
宣化炮兵学院印刷厂印刷

1984年12月第1版 1984年12月第1次印刷
开本 850×1168毫米 1/32 印张 12
字数 311千　印数 12,350
统一书号：13301·6 定价：2.83元

前　言

简言之，数学很重要。在理工科大学和工科高等院校都特别强调数学。然而，迄今为止已出版的应用数学演习的书籍为数甚少。研究应用数学，必须懂得数学。实际上，比起纯数学来，它是不过分讲求严密性的数学。人们往往即使理解了数学的解法，但对于数学应用于自然科学问题，却不能运用自如。笔者们不揣才疏学浅，试图就物理学、电工学、化学等自然科学中怎样运用数学这一问题，以数学为主，进行讲解。因此它比数学本身的习题演算书籍用处更大。

本书是《应用数学例题演习》全四册中的第二卷——复变函数篇。本书的目的是侧重于实积分、残数问题及格林函数的求法。

本书包括以计算为主的问题265题，证明题200题，电工问题12题。

本书编著要点如下：

1.以コロナ社（Corona Publishing）“新编电工学讲座”“新编机械学讲座”的《应用数学(1)》为依据。然而，即使离开该书，也能顺利地学习。

2.在各节各项中，均提出了基础理论，以便明了要点。

3.基础理论中必要的证明，将在例题中再现。

4.相同类型的问题归纳在一起。

5.力求使数学解法的要领采取容易理解的形式。

最后，应该说明，所考虑到的这些问题，已经超出了个人的能力。错误在所难免。希望能获得读者们的指正，以便修订时加

以改正。谨对提供各种参考文献的作者表示感谢；并对担任编辑、校对、出版工作而付出劳动的コロナ出版社编辑部的各位致以深切谢意。

昭和42年 4 月30日

著　者

目　　录

2. 复 变 函 数

2. 复变函数

2.1 复数和集合

基础理论

1. a，b为实数时，$a+ib$（$i=\sqrt{-1}$）称为**复数**.

2. $z=a+ib$时，记作 $a=\operatorname{Re} z$，$b=\operatorname{Im} z$，分别称为z**的实部、虚部**. 把$a-ib$以$\bar{z}$表示，称为z的**共轭复数**.

3. $a+ib=a'+ib' \longleftrightarrow a=a'$，$b=b'$.

4. $(a+ib)\pm(a'+ib')=(a\pm a')+i(b\pm b')$.

5. $(a+ib)(a'+ib')$
$=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.

6. $\dfrac{a+ib}{a'+ib'}=\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+i\dfrac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}$　　$(a'^2+b'^2\neq 0)$

7. $z=a+ib$ 时，把$r=\sqrt{a^2+b^2}$称为z**的绝对值**，以$|z|$，$\operatorname{mod} z$表示. 把$\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$称为$z$**的幅角**，表示为$\arg z$，$\operatorname{amp} z$.

8. 把两个复数设为z_1，z_2，则
$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$，
$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$　　$(|z_2|\neq 0)$。

9. $|z_1|-|z_2|\leqq|z_1\pm z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$.

10.在一个区域内，由无数的点构成的点集，至少具有一个凝聚点〔Bolzano－Weierstrass定理〕.

11.以属于闭区域D的任一个点为中心，以不为0的线段为半径画开圆时，则这些圆中的有限个圆，把D覆盖〔Heine－Borel覆盖定理〕.

12.连续函数的和、差、积及商（分母$\neq 0$）仍是连续函数.

13.$w=f(z)$在区域D内是单值连续，$f(z)$将区域D映射成一个区域D'，$g(w)$若在D'内单值连续，则复合函数$g(w)=g\{f(z)\}=\varphi(z)$在$D$内是单值连续.

14.$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$在$z=z_0$连续的充分必要条件是$u(x, y)$，$v(x, y)$，在$x=x_0$，$y=y_0$连续.

15.$f(z)$若在有界闭区域D上所到之点连续，则存在正常数M，使得在D内的任意点z有$|f(z)|<M$. 若对于D的边界上的一点z_0，有$|f(z_0)|=M$，那么，在D的边界上有$|f(z)|\leq M$，且在D的内部有$|f(z)|\leq M$（**最大值原理**）.

例题 1　证明

$-1<x<1$的实数x的集合和所有的实数的集合等价.

解答

研究变换

$$y=\frac{x}{1-|x|}\quad(|x|<1),$$

将$-1<x<1$的实数对应于$-\infty<y<\infty$. 那么$-1<x<1$的实数x的集合和所有的实数的集合是一一对应，因而等价.

例题 2　求下列实数列的上极限、下极限.

(i) $x_n=(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}$

(ii) $x_n=n+1+(-1)^n n$

(iii) $x_n=1+(-1)^n$

(iv)　$x_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cos\frac{2n\pi}{3}$

解答

(i)　$\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$

那么$\pm\frac{1}{2}$分别是上极限，下极限。

(ii)　$x_1=1$，$x_2=2\times2+1$，$x_3=1$，

$x_4=4\times2+1$，$x_5=1$……，那么上极限是∞，

下极限是1.

(iii)　$x_1=0$，$x_2=2$，$x_3=0$，$x_4=2$，…，

那么上极限是2，下极限是0.

(iv)　$x_1=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$，

$$x_2=\left(1+\frac{1}{2\times2}\right)\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2\times2}\right),$$

$$x_3=1+\frac{1}{2\times3},\ \cdots\cdots,$$

$$|x_n|=\left|\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cos\frac{2n\pi}{3}\right|$$

$$\leq1+\frac{1}{2n}\to1\quad(n\to\infty),$$

所以上极限是1，下极限是$-\frac{1}{2}$.

例题 3　取m及n为任意正整数值时，求在一条直线上的点$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$的集合的上确界和下确界及上下限，对其中属于原集合的点和不属原集合的点加以区别.

解答

m，n均取正整数值，此时，这个点的最大值是$1+1=2$。这是上确界.

m，n不论变的多么大，其极限值是0．但点0不属于这个集合，是下确界．这个数同时也是下限。

另外，m若以1，2，3……给出．$1/m$是全部集合$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$的凝聚点，其中最大的坐标是点1，点1属于这个集合，是上限.

例题4 求下面数列$\{z_n\}$的凝聚点.

（i） $z_n=(-1)^n$

（ii） $z_n=(-1)^n\frac{1}{n}$

（iii） $z_n=\exp\frac{n\pi i}{4}$

（iv） $z_n=\sin\left(i+\frac{n\pi}{2}\right)$

（v） $z_n=\frac{n}{n+1}\exp\frac{n\pi i}{4}$

解答

（i） 数列由-1，1，-1，1，……构成，凝聚点是-1，1.

（ii） 数列是-1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{5}$，……，点0为凝聚点.

（iii） $z_n=\exp\frac{n\pi i}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}$，

$\therefore z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$，$z_2=i$，$z_3=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$，$z_4=-1$，

$z_5=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$，$z_6=-i$，$z_7=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$，$z_8=1$，这些是周期地出现，$\pm 1$，$\pm i$，$\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$，$\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$是凝聚点。

（iv）$z_1=\sin\left(i+\frac{\pi}{2}\right)=\cos i=\frac{1}{2}(e+e^{-1})$，

$$z_2=\sin(i+\pi)=-\sin i=-\frac{i}{2}(e-e^{-1}),$$

$$z_3=\sin\left(i+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos i=-\frac{1}{2}(e+e^{-1}),$$

$$z_4=\sin i=\frac{i}{2}(e-e^{-1}),\ \cdots$$

因这些数是周期地出现，所以$\pm\frac{1}{2}(e+e^{-1})$，$\pm\frac{i}{2}(e-e^{-1})$是凝聚点。

（v）$|z_n|=\frac{n}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$，和（iii）相同。

例题 5　两个实变量x，y的连续函数$f(x,y)$对于任意给出的ε，若取适当的正数δ，当

$$|x_2-x_1|<\delta,\ |y_2-y_1|<\delta\ 时,$$

其中x_1，x_2，y_1，y_2存在于各自的闭定义域内，证明

$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|<\varepsilon.$$

解答

在闭区域D内，若$f(x,y)$连续，只限于$\sqrt{h^2+k^2}<\rho$，通常取$|f(x+h,y+k)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$的正数δ。

若以D内的各点(x,y)为中心，以$\delta/2$为半径画圆，由Heine—Borel定理，其中有限个圆完全覆盖了D。最小的$\rho/2$

可设为$\sqrt{2}\delta$.

这是在以点(x_0, y_0)为中心，以$\rho_0/2$为半径的圆的内部或圆周上取点(x_1, y_1)。若取

$$|x_2 - x_1| < \delta,$$
$$|y_2 - y_1| < \delta$$

的正方形内的点(x_2, y_2)，有$\delta \leqq \frac{1}{2\sqrt{2}}\rho_0$。那么，

(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，都是在以点(x_0, y_0)为中心，以ρ_0为半径的圆内或圆周上。

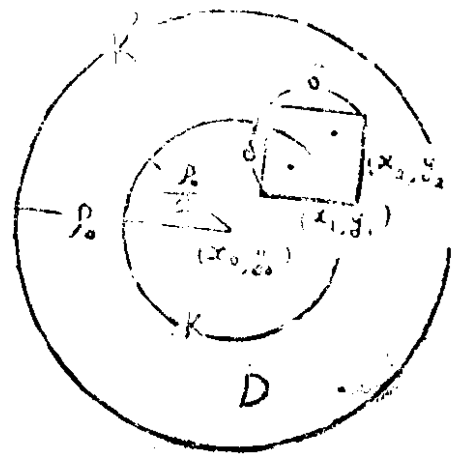

图 2·1

$$\therefore \ |f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(x_2, y_2) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon.$$

例题6 在$x^2 + y^2 < 1$的所有的点(x, y)构成开区域，以其各点为中心，以$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$为半径画圆，试证这些圆中的有限个不能完全覆盖原来的开区域。

解答

以$x^2 + y^2 < 1$内任意的点(x, y)为中心，在以$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$为半径的圆周上，令$r$为图2.2中所示的点到原点的距离，即

$$r=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{1}{2}(1-\sqrt{x^2+y^2})$$

$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{x^2+y^2}).$$

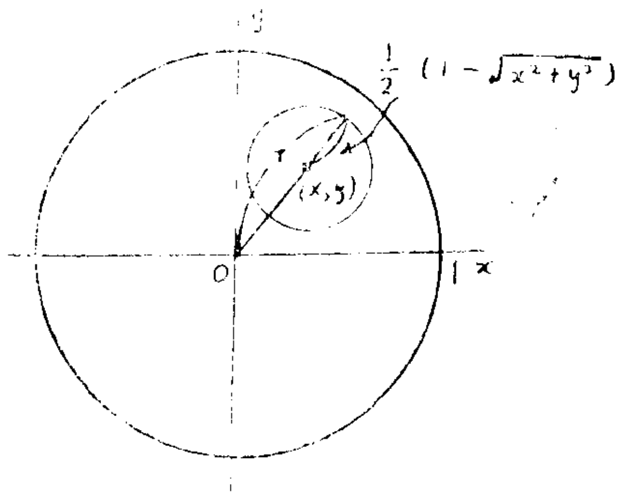

图 2·2

假设这样的圆为有限个，其中有最大的r的值。令这个为圆C_1〔以(x_1, y_1)为中心〕，设r为r_1，有

$$r_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{x_1^2+y_1^2}),$$

(x_1, y_1)是$x^2+y^2<1$内的点，因而

$$x^2+y^2<1 \quad \therefore r_1<1.$$

因为在$x^2+y^2<1$内，$r_1{}^2\leqq x^2+y^2<1$的点(x, y)不包含在现在的这些圆内，所以有限个圆不能完全覆盖。

例题 7　证明基础理论13.

解答

取D内的任意一点z_0，令$w_0=f(z_0)$。$g(w)$在D'内连续，因而对任意的$\varepsilon>0$，有适当的$\delta>0$存在，对于满足关系式

$$0<|w-w_0|<\delta$$

的w，有

$$|g(w)-g(w_0)|<\varepsilon.$$

因$f(z)$在D内连续，确定适当的正数δ，对于$0<|z-z_0|<\delta$的z，有$0<|f(z)-f(z_0)|<\delta$，那么$\varphi(z)$在D内单值连续。

例题 8 把下式改为$a+ib$形。

(i) $(1+i)^2+(2-i)^2$

(ii) $(1+2i)(3-2i)^2$

(iii) $i(2+3i)^4$

(iv) $-i(2+i)(1+2i)(1+i)$

(v) $\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{1-i}{1+i}$

(vi) $\dfrac{1-i}{(3-i)(1+i)}$

(vii) $\dfrac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}$

(viii) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$

(ix) $\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$

(x) $\dfrac{i(2+i)+(3+4i)}{i}$

(xi) $3\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

(xii) $a\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

解答

(i) $(1+2i-1)+(4-4i-1)=3-2i$

(ii) $(1+2i)(3-2i)^2=(1+2i)(5-12i)=29-2i$

(iii) $i(2+3i)^4=i(-5+12i)^2$

$$=i(-119-120i)=120-119i$$

(iv) $-i(2+i)(1+2i)(1+i)=(1-2i)(-1+3i)$

$$=5+5i$$

(v) $\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$

$$=\frac{4i}{2}=2i$$

(vi) $\dfrac{1-i}{(3-i)(1+i)}=\dfrac{(1-i)^2(3+i)}{(3-i)(3+i)(1+i)(1-i)}$

$$=\frac{-2i(3+i)}{10\times 2}=\frac{1-3i}{10}$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$$

(vii) $\dfrac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}=\dfrac{(1-i)^3(2-i)(1-2i)}{(2+i)(2-i)(1+2i)(1-2i)}$

$$=\frac{-2i(1-i)(-5i)}{5\times 5}$$

$$=\frac{2i^2(1-i)}{5}=-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}i$$

(viii) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2=\left\{\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^2=\left(\dfrac{2i}{2}\right)^2=-1$

(ix) $\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}=\dfrac{7-i}{7+i}=\dfrac{(7i+)^2}{(7+i)(7-i)}$

$$=\frac{48-14i}{50}=\frac{24}{25}-\frac{7}{25}i$$

(x) $\dfrac{i(2+i)+3+4i}{i}=\dfrac{2+6i}{i}=-i(2+6i)$

$=6-2i$

(xi) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=-3i$

(xii) $a\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)=a\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=\dfrac{a}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}ai$

例题 9 求下例函数的实部、虚部及绝对值.

(i) $w=\dfrac{z-i}{z+i}$

(ii) $w=z^3-2z$

(iii) $w=\dfrac{(3+4i)(12-5i)}{2i}$

解答

设 $z=x+iy$,

(i) $w=\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$

$=\dfrac{\{x+i(y-1)\}\{x-i(y+1)\}}{\{x+i(y+1)\}\{x-i(y+1)\}}$

$=\dfrac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2}$

$\mathrm{Re}w=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$, $\mathrm{Im}w=-\dfrac{2x}{x^2+(y+1)^2}$

$|w|=\sqrt{\left\{\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}\right\}^2+\left\{-\dfrac{2x}{x^2+(y+1)^2}\right\}^2}$

$=\dfrac{\sqrt{(x^2+y^2)^2+2(x^2-y^2)+1}}{x^2+(y+1)^2}$