

Статистические
методы
анализа
экономической
динамики

Академия наук СССР
Центральный экономико-математический институт

**Статистические
методы
анализа
экономической
динамики**



Издательство «Наука» Москва 1983

Ученые записки по статистике, т. 46

В книге рассматривается совокупность методов анализа и прогнозирования экономической динамики. Особое внимание обращается на вопросы построения устойчивых моделей прогнозирования экономических показателей в различных отраслях народного хозяйства. Особый акцент делается на определении временных лагов.

Сборник рассчитан на экономистов, статистиков, математиков, а также на преподавателей, аспирантов и студентов экономических вузов.

Редакционная коллегия:

Т. В. РЯБУШКИН (ответственный редактор),
С. А. АЙВАЗЯН, А. Г. ВОЛКОВ,
В. М. СИМЧЕРА (зам. ответственного редактора),
Е. Г. ЯСИН

Научные редакторы тома:

Т. В. РЯБУШКИН, А. А. ФРЕНКЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Экономические процессы формируются под влиянием большого числа факторов, главных и второстепенных, объективных и субъективных, прямых и косвенных, тесно переплетающихся между собой и действующих нередко в разных направлениях. Статистический анализ течения этих процессов во времени, т. е. исследование экономической динамики, позволяет получить объективную информацию об экономическом развитии, которая необходима руководящим и плановым органам для управления народным хозяйством. Эта информация наиболее полно находит свое выражение во временных рядах, позволяющих детально проанализировать особенности экономического развития. Хотя методологический аппарат анализа и прогнозирования временных рядов экономической динамики разработан достаточно хорошо и нередко используется в научных и практических работах, остается еще ряд неразрешенных проблем, что препятствует более успешному внедрению статистических методов и моделей в экономическую практику. Например, можно назвать до сих пор не решенную проблему стационаризации временных рядов, которая приобретает важное практическое значение, так как большинство методов анализа и прогноза применимо только для работы со стационарными временными рядами. Можно упомянуть и задачу повышения надежности прогнозов: следует ли выбирать некоторую наилучшую модель прогноза, или же надо строить прогнозы по нескольким различным моделям и потом синтезировать полученные результаты. Кроме того, существует такая важная проблема повышения эффективности капиталовложений, как определение величины строительного лага.

Рассмотрению этих и ряда других проблем и посвящен настоящий сборник.

Сборник открывается статьей Н. А. Горелика и А. А. Френкеля «Статистические проблемы экономического прогнозирования», которая посвящена решению проблем преобразования нестационарного временного ряда в стационарный и объединения прогнозных оценок, полученных разными методами. Для решения первой задачи большой интерес представляет предложенный критерий, основанный на использовании функции усиления фильтра, элиминирующего тренд. Задачу о синтезе прогнозов рекомендуется решать на основе линейной комбинации частных прогнозов с заданными весами. В статье также рассмотрены вопросы, связанные с разработкой математического обеспечения ЭВМ программами анализа и прогноза временных рядов.

Статья Б. Б. Розина и М. А. Ягольницера «Некоторые подходы к построению моделей экономической динамики с переменной структурой» посвящена рассмотрению причин изменчивости структуры статистических зависимостей во времени и способов конструирования моделей с переменной структурой как для отдельных объектов, так и групп объектов. Однородные периоды предложено выделять в качестве самостоятельных базовых участков аппроксимации с анализом возможностей последующей увязки нескольких моделей в одну группу типа дискретно-непрерывной модели. Инструментом анализа получения однородных групп являются методы многомерной классификации.

В статье И. Г. Грицевич «Прогнозирование временных рядов экономической динамики как этап в идентификации параметрических моделей» исследуются вопросы выбора модели для наблюдаемого временного ряда. Освещаются основные принципы формирования и свойства прогнозов временных рядов, содержащих тенденцию и стационарный автокоррелированный остаток. Предлагается критерий согласия, отражающий адаптивные свойства прогнозов по объединенным моделям авторегрессии — скользящего среднего. Теоретический анализ дополняется практическими результатами, полученными для реальных временных рядов макроэкономических показателей.

С. Ю. Мартюшис в статье «Статистические расчеты в оценке динамики развития экономических процессов» рассматривает вопросы сглаживания временных рядов методом скользящей средней с последующим осреднени-

ем параметров модели. Сезонность учитывается с помощью соответствующих коэффициентов, значения которых умножаются на выравненные значения результивного признака. Рассматривается распространение методики на многомерные временные ряды. Интересна постановка задачи учета в анализе динамики факта старения информации. Ее решение предлагается осуществлять с помощью весовой функции. Рассмотрено ее отображение с помощью гармонических, линейных и показательных весов.

В статье Ю. И. Аболенцева «Циклы и периоды в рядах динамики (некоторые проблемы аппроксимации)» поставлена задача выявления однородных периодов временного ряда. Периодизация осуществляется с помощью специального алгоритма классификации. Рекомендуются строить модели тренда только для однородных периодов.

В статье Д. И. Клеандрова «Использование рекуррентных формул при прогнозировании методом экспоненциального сглаживания» обсуждаются проблемы использования дискретных полиномов Ляггера для прогнозирования временных рядов. Доказывается, что полином Ляггера является частным случаем обобщенного экспоненциального сглаживания, и показано, что при их применении предпочтительнее использование рекуррентной формулы Брауна.

А. И. Манелля в статье «О выборе формы тренда для сильно колеблющихся временных рядов» предлагает алгоритм аналитического выравнивания сильно колеблющегося временного ряда, основанный на методе скользящей средней. Для определения формы кривой автор использует оценку нелинейных эффектов количественных факторов в дисперсионном анализе. Методика дополнена подробным примером расчета.

В статье Е. В. Гарбера, Н. А. Горелника и А. А. Френкеля «Развитие адаптивных методов прогнозирования временных рядов» рассматривается метод адаптивной фильтрации как развитие принципов дискретно-градиентной адаптации. Анализу подвергнуты условия сходимости алгоритмов адаптации. Сформулированы выводы о положительных сторонах адаптивной фильтрации, намечены проблемы, требующие дальнейшего решения.

О. П. Крастинь и М. В. Шмулдер в своей статье «Моделирование экономической динамики с использованием априорных параметров (на примере межотраслевого ба-

ланса Латвийской ССР)» рассматривают пути определения параметров модели, описывающей временной ряд. Авторы предлагают для уменьшения остаточной вариации вводить в анализ априорную константу для всех аргументов времени, которая обосновывается экономически и математически. Приводятся результаты аналитического исследования последствий использования в анализе априорной константы. Аналогичному исследованию подвергнут вопрос об использовании весовой функции.

Целью статьи Н. Н. Левитан и Ф. Ф. Глистина «Статистический анализ динамики резервов научно-технического прогресса в отрасли» является иллюстрация возможностей применения регрессионного анализа для выявления особенностей влияния технического уровня производства на показатели эффективности. Выбрана система показателей технического уровня производства, дан подробный экономический анализ этих показателей. Проводится анализ регрессионных моделей показателей эффективности в цементной промышленности, построенных по данным за 1970 и 1979 гг. Приводятся рекомендации по использованию этих моделей в экономической практике.

Статья Г. А. Гольц, В. Н. Лившица, М. П. Фроловой «Подходы к прогнозированию территориальной концентрации деятельности» посвящена анализу пространственных систем, дается формальное их описание. Авторы предлагают увязывать пространственные характеристики системы с динамическими.

В статье Я. Е. Бейлинсона «Метод оценки ожидаемого производства промышленной продукции» прогноз ведется поэтапно для каждой составляющей временного ряда. Затем на основе композиции отдельных прогнозов определяются прогнозные оценки экономического показателя в целом. Дается аналитическое и эмпирическое решение каждого этапа отдельно и композиции в целом.

О. М. Дукарский свою статью «Имитационное моделирование динамических систем в строительстве» посвящает решению задачи моделирования сложных динамических систем. Дается характеристика общей модели системы, рассмотрена проблема идентификации параметров модели. Отдельно исследованы вопросы случайных возмущений, имитация поведения сложной системы

и системы аккумулирующего типа. Основное внимание в статье уделено построению и анализу модели отрасли «капитальное строительство».

В статье С. Г. Друкер, М. И. Заблудовского, Ю. П. Соловьева «Обобщенная модель распределенного лага» предлагается методика построения обобщенной модели распределенного лага, реализованная на ЭВМ. Рассмотрен пример реализации на ЭВМ метода вращающихся координат и золотого сечения. Анализируются результаты выполненных расчетов.

Статья Я. Е. Бейлинсона и И. В. Зайдиса «Определение показателей строительного лага на основе экономико-математических моделей» посвящена анализу трудностей, возникающих при экономико-математическом исследовании показателей строительного лага, намечены пути преодоления этих трудностей. Авторы предлагают оригинальный подход к решению задачи определения строительного лага, который имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами.

О. М. Дукарский во второй своей статье «Нормирование и прогнозирование производственных мощностей строительно-монтажных организаций» рассматривает методику определения экономических показателей, основанную на построении многомерных моделей для однородных групп строительно-монтажных организаций за ряд лет. Прогнозирование характеристик при этом базируется на построении комплекса регрессионных моделей. Однородные выборки автор предлагает формировать на основе статистики Уилкса, рассматривает ряд многомерных динамических моделей мощности строительно-монтажных организаций.

В статье С. Д. Ильенковой и Н. Д. Ильенковой «Регрессионное моделирование коэффициента закрепления оборудования» решена практическая задача анализа динамики коэффициента закрепления производственного оборудования в текстильной промышленности Москвы за 1970—1980 гг. Использован метод многошагового регрессионного анализа.

Статья Ю. П. Соловьева «К вопросу об оценке объема непокрытого спроса» посвящена анализу динамики сбережений населения. Методический аппарат анализа прост и убедителен. Дается подробная экономическая интерпретация построенных моделей.

Ю. В. Василенко в статье «Об одном подходе к построению модели прогнозирования сельскохозяйственного производства» предлагает метод прогнозирования многомерной динамики сельскохозяйственного производства на основе нелинейной динамической модели, который применяется при прогнозировании показателей эффективности сельскохозяйственного производства в ряде областей Украинской ССР.

Статья Н. Н. Егорова, А. А. Френкеля, Н. Н. Райской, Л. С. Рожиной, Н. А. Зименковой «Анализ динамики показателей эффективности работы вычислительных центров системы ЦСУ РСФСР» посвящена решению важной практической задачи. Предложена система показателей эффективности работы ВЦ, проанализированы факторы роста эффективности, построены динамические многофакторные модели показателей эффективности, проведен анализ и выявлены резервы роста эффективности.

Т. В. Рябушкин, А. А. Френкель

Н. А. Горелик, А. А. Френкель

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Введение

Прогнозирование экономических процессов, как правило, осуществляется на базе временных рядов, отражающих в количественной форме экономическую динамику. Статистический подход к изучению временных рядов — традиционный подход, однако его использование при анализе экономических временных рядов вызывает ряд трудностей. Эти ряды не только не стационарны (а все статистические модели, разрабатываемые в рамках теории временных рядов, являются стационарными), но обычно довольно коротки (20—30 точек), т. е. со статистической точки зрения являются малыми выборками. Насколько теоретические модели, оценки которых бывают обычно асимптотическими, подходят для них, в каждом конкретном случае сказать трудно. Однако других подходов в настоящее время не существует, и приходится для прогнозирования экономических временных рядов использовать стационарные статистические модели, решая при этом всякий раз проблему преобразования нестационарного временного ряда в стационарный. Эта проблема будет рассмотрена и в данной работе.

Другая проблема связана с укоренившейся в прогнозировании экономических временных рядов идеологией построения прогнозных моделей. Эта идеология базируется на гипотезе о том, что существует некая единственная, наилучшая для данного временного ряда модель прогнозирования и задача исследователя состоит в том, чтобы эту модель отыскать. Определению ее параметров посвящен при построении модели этап идентификации, само название которого говорит, что среди множества альтернативных моделей следует идентифицировать ту,

которая наилучшим образом подходит к данному временному ряду. Однако опыт работы, особенно с параметрическими моделями, показал, что часто получается целая группа моделей со сходными статистическими свойствами, в которой трудно отдать предпочтение какой-либо одной модели. Можно предположить, что каждая из моделей описывает лишь одну сторону динамики данного экономического процесса, отображаемого исследуемым временным рядом, и их совместное использование поможет точнее и полнее описать и прогнозировать эту динамику. Такая точка зрения влечет за собой идею создания методики прогнозирования, базирующейся на объединении прогнозов, получаемым по отдельным моделям. Сама идея объединения прогнозов не нова (см., например, [1, 2, 3]). Однако она высказывалась, как правило, для случая объединения прогнозов, полученных из различных источников, например экспертным путем и с помощью прогнозирования по моделям. Объединение же множества прогнозов, полученных по статистическим моделям одного класса, создает принципиально новую методику и одновременно ставит ряд вопросов, требующих решения. Следует выяснить, например, какие прогнозы могут объединяться, каким должно быть количество этих прогнозов, какой должна быть процедура объединения и т. д. Так, решение вопроса о том, какие именно прогнозы могут объединяться, видимо, зависит от их коррелированности, особенно если процедура объединения выбирается в рамках регрессионного анализа. В таком случае количество объединяемых величин наверняка ограничено некоторым теоретическим пределом, до которого может улучшаться качество прогноза, получаемого с помощью объединения. За этим пределом добавление новых компонентов для объединения не только не улучшит конечный результат, но даже ухудшит его.

В данной статье сделана попытка рассмотреть такие проблемы, хотя и без претензий на их окончательное решение, поскольку в этом направлении предстоит, по-видимому, еще большая работа, прежде чем полученные результаты можно будет успешно внедрять на практике.

Практической реализации посвящена и еще одна проблема, которая хотя и выходит за рамки чисто статистических проблем, однако тесно с ней связана. Сложность статистических моделей и алгоритмов, использование большого количества данных для получения оце-

нок — все это делает немыслимым и исследовательскую, и практическую работу в области прогнозирования временных рядов без использования ЭВМ. Поэтому проблема выбора инструментария при работе со статистическими моделями также затрагивается в данной статье.

1. Методы прогнозирования временных рядов

Методы прогнозирования одномерных временных рядов заслуживают внимания по целому ряду соображений. Прежде всего с их помощью без больших затрат времени и средств могут быть получены прогнозы, достаточно точные для целей управления и планирования. Необходимая для других методов добавочная информация часто может оказаться недоступной или требовать чрезмерных затрат для ее получения. Прогнозирование одномерных временных рядов может быть полезно как средство для создания базы, относительно которой могут оцениваться результаты прогнозирования многомерной динамики. Прогнозы, рассчитанные по одномерной динамике, могут также комбинироваться с прогнозами, полученными по другой информации, либо, как будет показано ниже, между собой в целях формирования совокупного прогноза. Наконец, прогнозы одномерных временных рядов позволяют оценить, насколько вариация прогнозируемой переменной может быть объяснена в терминах ее собственного прошлого поведения, тем самым способствуя более ясному пониманию того, когда характер экономической динамики требует для своего объяснения привлечения дополнительных факторов. В частности, при прогнозировании интересующего нас временного ряда может быть полезным другой временной ряд, который учитывает ошибку при прогнозировании.

В теории временных рядов сформировался определенный взгляд на структуру экономической динамики. Эта динамика, выраженная в виде временных рядов, содержит несколько компонентов: тренд — детерминированную функцию от времени, вероятностную часть и чисто случайную составляющую, так называемый «белый шум»¹. При этом предполагается, что тренд характери-

¹ Такое представление не противоречит другому, часто встречающемуся в экономической литературе: компонентами временного ряда считают тренд, циклический компонент и случайные колебания. Эти представления условны и не являются объективно заданными.

зует общую тенденцию развития данного процесса, отражающую влияние постоянно действующих факторов; вероятностная составляющая отражает влияние на процесс каких-либо случайных факторов; «белый шум» никаких закономерностей не несет и для целей прогнозирования бесполезен, хотя существует и его необходимо учитывать. Известную роль здесь сыграл спектральный подход, широко распространенный в математической статистике. С точки зрения спектрального подхода любой процесс представляет собой сумму колебаний с различными частотами. При разложении временных рядов на три компонента тренд имеет частоту, близкую к нулевой, вероятностная часть расположена в области средних частот, а «белый шум» — высокочастотные колебания. Эти компоненты считаются в какой-то мере независимыми, что позволяет отдельно исследовать каждый из них.

На практике чаще всего речь идет о выделении тренда, поскольку величина его составляет большую часть изучаемого временного ряда (иногда свыше 95%). Такое упрочение вполне допустимо. Создаются трендовые модели, т. е. модели, в которых тренд описывается в виде каких-либо гладких функций от времени: полиномов, экспонент, различного рода специальных кривых (кривая Гомперца, логистическая кривая) и т. д. Коэффициенты в моделях находятся с помощью метода наименьших квадратов. Подставляя затем в модель будущие значения времени, можно получить прогноз исследуемого экономического показателя.

Выделение тренда традиционно связано с процедурой сглаживания временных рядов, сущность которого заключается в замене фактических уровней временного ряда расчетными, характеризующими тренд временного ряда. Простейшие методы сглаживания (скользящая средняя, метод наименьших квадратов и др.) позволяют выделить тренд временного ряда, погасив при этом случайные колебания.

Если динамика процесса не имеет сильных колебаний, то описывающие ее временные ряды меняются достаточно медленно и механизм сглаживания успевает фиксировать такое изменение. В этих случаях модели тренда, полученные с помощью скользящей средней (простой и взвешенной) или методом наименьших квадратов (с различными его модификациями), дают иногда

приемлемые результаты. Иная картина при анализе сильно колеблющихся временных рядов, которые часто встречаются в системах оперативного планирования и управления, при описании динамики торговли, сельскохозяйственного производства и т. д. В этих случаях процедура сглаживания с помощью скользящей средней и метода наименьших квадратов дает слишком грубые результаты, так как сглаживаются все колебания ряда, учет которых необходим для правильного принятия решений. Кроме того, параметры моделей тренда, полученные такими методами, остаются неизменными в течение всего рассматриваемого периода. На практике же нередко случаи, когда параметры моделей изменяются, а сглаживающие процедуры с помощью скользящей средней и метода наименьших квадратов не могут уловить такие изменения.

Для решения этой проблемы можно использовать метод экспоненциального сглаживания, предложенный Р. Г. Брауном. Сущность его состоит в том, что временной ряд сглаживается с помощью взвешенной скользящей средней, в которой веса подчиняются экспоненциальному закону в отличие от симметричных весов относительно средней величины для классической взвешенной скользящей средней. Взвешенная скользящая средняя с экспоненциально распределенными весами характеризует течение процесса в конце интервала сглаживания, т. е. является средней характеристикой последних уровней ряда. Такой подход позволяет учитывать «свежесть» информации, что имеет существенное значение в условиях постоянно меняющихся уровней временного ряда.

Самая большая трудность применения на практике метода экспоненциального сглаживания — установление оптимального значения параметра сглаживания и адаптации метода к изменению структуры временного ряда. Очевидно, что эти вопросы в первую очередь связаны с качеством прогноза. Наиболее плодотворной идеей при их решении является применение трэкинг-сигнала (следающего сигнала). Смысл ее заключается в разработке индикатора, который бы следил за качеством прогноза и улавливал тот момент, когда это качество становится неудовлетворительным и требует вмешательства прогнозиста. Как и всегда в таких случаях, здесь сталкиваются два противоречивых требования. С одной стороны, искомый индикатор должен быть достаточно чувствитель-

ным, с другой — он не должен реагировать на случайные колебания и приводить к слишком большим ошибкам прогноза. Трэйкинг-сигнал, предложенный Триггом и Личем [4], позволяет адаптировать систему прогнозирования к изменениям временного ряда и в принципе решает проблему выбора параметра сглаживания. Однако он не в состоянии компенсировать недостатки самого метода экспоненциального сглаживания, основным из которых является инерционность и вследствие этого недостаточная адаптивность.

Регулирование процедуры экспоненциального сглаживания с помощью трэйкинг-сигнала исследовалось нами на примере временных рядов с различной по сложности структурой [5]. Для временных рядов со сравнительно простой структурой этот механизм работал устойчиво и позволял довольно быстро найти оптимальные значения параметров сглаживания. Для временных рядов со сложной структурой, в составе которых имелись высокодинамичные компоненты, процесс адаптации с помощью трэйкинг-сигнала не успевал за изменениями временного ряда, и, следовательно, был не в состоянии модифицировать параметр сглаживания. Более того, в конечном итоге этот процесс становился расходящимся.

Сглаживающие методы можно отнести к структурным методам анализа и прогнозирования временных рядов, так как подход, в основе которого лежит сглаживание временных рядов, базируется на построении модели ряда, отражающей структуру ряда в виде уравнения, состоящего из элементарных функций времени.

Как показывает практика, такой подход имеет ряд недостатков. Прежде всего сама модель выявляет лишь достаточно «грубые» связи в исследуемом процессе, которые могут быть выражены с помощью детерминированных функций времени. Для сложных экономических процессов этого, как правило, недостаточно. Кроме того, структура адекватных моделей для таких процессов становится слишком громоздкой, а в наиболее сложных случаях и меняется с течением времени. Это приводит к большим трудностям при использовании таких моделей для сглаживания временных рядов. Наконец, сама процедура сглаживания слишком инерционна и не успевает за динамикой сложных временных рядов. Методы адаптации (даже такие, как, например, тригговский трэйкинг-сигнал) здесь помогают мало. Поэтому для сложных

экономических процессов использование структурных моделей и методов сглаживания временных рядов оказывается малоэффективным.

В последнее время для одновременного исследования компонент временного ряда и построения модели прогноза стали использоваться адаптивные параметрические модели. В их основе лежит идея Г. Волда о построении объединенной модели авторегрессии — скользящего среднего.

В этой связи понятен наблюдаемый интерес к параметрическим моделям прогнозирования временных рядов. Он во многом определяется появлением метода построения объединенной модели авторегрессии — скользящего среднего (АРСС-модели), предложенного Боксом и Дженкинсом [6]. Такое объединение позволяет работать с моделями невысоких порядков, что существенно способствует их практическому использованию. Кроме того, такие модели носят более общий характер по сравнению с моделями сглаживания временных рядов. Можно показать, что прогнозирование временного ряда методом экспоненциального сглаживания на базе полинома p -й степени эквивалентно использованию объединенной модели авторегрессии — скользящего среднего порядка $(0, p, p)$. Тем самым можно ожидать, что параметрические модели позволят зафиксировать более сложные связи в экономических процессах по сравнению с моделями сглаживающего типа.

Стремлением к еще большему повышению адаптивных свойств модели прогнозирования можно объяснить появление метода адаптивной фильтрации. Поступление новых, более актуальных данных в методике Бокса — Дженкинса отражается не на параметрах модели, а на результатах прогнозирования. В методе же адаптивной фильтрации пересматривают и параметры модели с тем, чтобы они всегда оптимально соответствовали реальному набору данных. Последние модификации метода адаптивной фильтрации базируются на АРСС-моделях, что существенно сближает его с предыдущим методом.

В то же время, как показывает анализ, нецелесообразно использовать метод адаптивной фильтрации в качестве самостоятельного метода для прогнозирования временных рядов. Он может быть составной частью комплексной методики прогнозирования, которая представляла бы собой синтез из обоих методов, где на долю

адаптивной фильтрации приходилось бы уточнение параметров моделей, для которых предварительно проведена процедура идентификации.

2. Приведение нестационарных временных рядов к стационарному виду

2.1. Постановка задачи

Свойственная экономическим временным рядам нестационарность всегда будет требовать их приведения к стационарному виду, коль скоро мы хотим использовать для прогнозирования параметрические модели. Решение этой проблемы в методике Бокса—Дженкинса базируется на предположении, что при некоторой однородности k -я разность нестационарных временных рядов будет стационарной, поэтому процедура приведения нестационарного временного ряда к стационарному состоит в последовательном применении к исходному ряду разностного оператора ∇ :

$$(\nabla x = x_t - x_{t-1}).$$

Взятие последовательных разностей по сути есть процесс дискретного дифференцирования, и идея здесь состоит в том, что если тренд ряда описывается полиномом k -й степени, то k -я производная от тренда будет равна const, т. е. ряд станет стационарным. Применительно к предложенной в работе [7] классификации типов нестационарности это может быть справедливым, и то не всегда, лишь в отношении временных рядов с первым (т. е. простейшим) типом нестационарности. Для второго и особенно третьего типов нестационарности такой подход наверняка неприменим. Однако рассмотрим, к чему приводит взятие последовательных разностей в самом благоприятном случае. Пусть имеется временной ряд, который может быть представлен в виде

$$x_t = y_t + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где y_t — тренд, описываемый параболой k -го порядка; ε_t — стационарные случайные величины с нулевым средним и (пусть для простоты) с одинаковой дисперсией σ^2 .

Применим к x_t в выражении (1) оператор ∇ . Поскольку для этого оператора имеет место свойство дис-