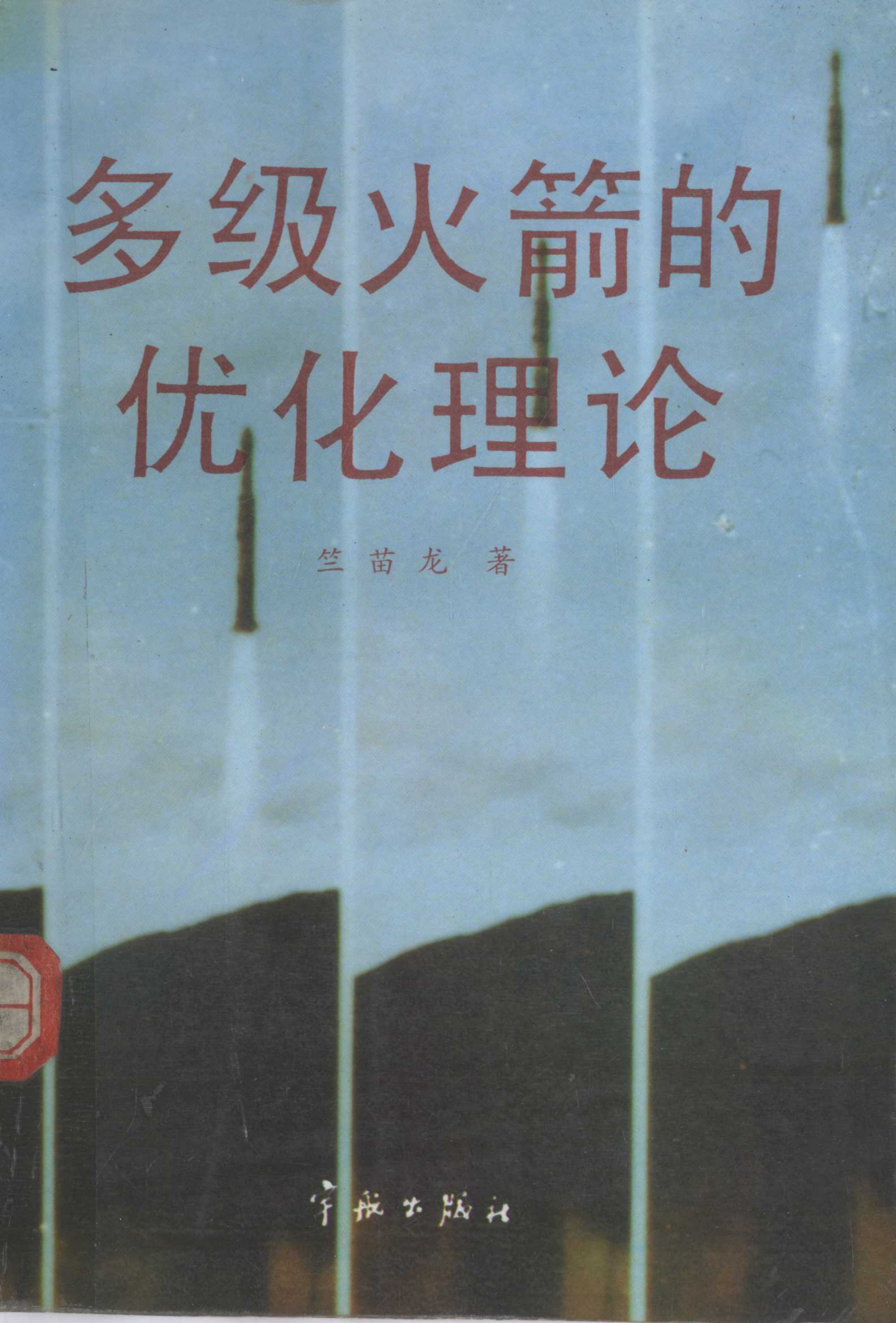
多级火箭的优化理论

竺苗龙 著



宇航出版社

多级火箭的优化理论

竺苗龙　　著

宇航出版社

内 容 簡 介

作者把数学、相对论力学与航天力学这几门学科进行交叉，对多级火箭从基础理论角度提出了一系列新的问题，并对其中的一些问题进行了多年深入的研究。本书为作者研究所得到的一系列结果的系统总结。

本书除介绍了多级火箭的优化理论外，还涉及了多级火箭的速度极限、相对论力学中的多级火箭表达式等航天力学中的基础理论问题。

本书可作为有关部门的科研工作者、有关专业的研究生及高年级本科生的参考书。

多级火箭的优化理论

竺苗龙 著

责任编辑：李明观

*

宇航出版社 出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

中国科学院印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：10.875 字数：290 千字

1988 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数：1—1500 册

ISBN 7-80034-135-6/E · 013 平装定价：8.00 元 精装定价：12.00 元

作 者 简 介

竺苗龙，男，1942 年生，浙江宁波人，中国著名中年知识分子。1966 年毕业于浙江大学，先后在研究所和高等院校工作，1985 年任青岛大学教授、副校长，并兼任中国科技大学、北京科技大学、山东大学等校兼职教授。

作者长期从事航天基础理论研究，曾先后出版“关于多级火箭和最佳轨道若干问题的探讨”、“狭义相对论与火箭飞行”、“星际飞行中的几个问题”等著作。

序

本世纪下半叶是航天技术兴起的时代，而其基本理论的研究早在上世纪末就已发端了。到本世纪50年代，火箭运动及其优化的研究已获得具体成果；维特里吉特（M. Vertregt）和威廉斯（M. L. Williams）等人的工作即是其代表。但是，当时的研究在数学方面是不求严格的。最近10年来，竺苗龙同志及其合作者，对有关问题作了更为全面和系统的数学研究，取得了一系列重要成果，这些成果已写入作者1980年的《星际飞行中的几个问题》一书中。

在此以后，作者又进行了许多更深入的研究，并彻底地解决了上述著作中所提出的全部问题，这些结果就收在本书中。

作者的这一系列研究，以数学的严格性和彻底性为其特色，形成了自己的独特学派，在火箭运动及其优化的国际学术领域里占居先进地位。

本书的主要部分是作者曾单独发表过的一些论文，书中在一定程度上还保留这些内容的独立性。由于作者熟悉数学，在采用数学工具时较为自由。但正是作者所说明的，具有一定数学基础的读者是可以接受的。相信有关专业的科学工作者、研究生，以及其他对火箭运动的数学研究感兴趣的读者，一定会认为本书对他们是有益处的。

吕茂烈

1985年11月

前　　言

在拙著《星际飞行中的几个问题》中，基本上写入了1979年前其它同志与我合作以及我个人所作的关于多级火箭和最佳轨道的论文的全部结果。

阅完那本书的读者一定了解到：那本书里提出的关于多级火箭的问题，有的已完全解决了，有的则只解决了一部分。

从那之后，在吕茂烈教授等前辈的指导帮助下，经过紧张的工作，我们已全部解决了这些问题中所遗留的部分。把这些新成果与那本书中有关内容有机地拟合起来就形成了本书。当然趁此机会也改正了前书中已发现的一些错漏之处。

一般说来，具有一定力学和高等数学知识（包括极大值原理等)的读者是可以阅读本书的。

前书中还有一部分是关于最佳轨道的内容。其中所提出的问题也有一些在当时还只解决了一部分。从那之后，我们在这方面也取得了进展，并得到了不少新成果。作者打算不久也能把这方面的新成果和前书中有关最佳轨道的内容合并起来整理成一本书，作为本书的姐妹篇呈献给读者。

作　　者

1982年4月于西安

目　录

第一章　有关多级火箭的一些概念和最佳质量比探讨

1.1　三个宇宙速度

在星际科学里，经常遇到第一宇宙速度、第二宇宙速度和第三宇宙速度这三个概念。

所谓第一宇宙速度 V_1，是指物体绕着地球旋转且其旋转半径等于地球半径时物体所具有的速度，如图 1-1 所示。

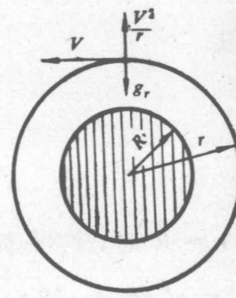


图　1-1

由于地球的实际形状接近圆球，所以上面就假设地球是圆球形的。这个假设在很多问题中所导致的误差很小，但计算却大大简化了。

设 M 为地球的质量，m 为物体（例如卫星）的质量，R 为地球的半径（$R \doteq 6371\mathrm{km}$），g 为地球表面的引力常数，V 为物体绕地球旋转的速度，r 为物体绕地球旋转时的旋转半径。

大家知道，地球表面上物体的重力就是地球对这物体的吸引力，即

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}$$

所以

$$g = G\frac{M}{R^2} \tag{1.1.1}$$

这里 G 为万有引力常数：

$$G = (6.6720 \pm 0.0041) \times 10^{-11}\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

在离地心 r 处单位质量的物体所受的引力为

$$g_r = G\frac{M}{r^2}$$

由于

$$G = g\frac{R^2}{M}$$

所以

$$g_r = g\frac{R^2}{M}\frac{M}{r^2} = g\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

另一方面，要使这单位质量的物体在离地心为 r 的圆形轨道上旋转而不掉下来，显然应有

$$g\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{V^2}{r}$$

所以

$$V^2 = gR\frac{R}{r}$$

即

$$V = \sqrt{gR}\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.2}$$

当 $r = R$ 时，就得地面上的第一宇宙速度

$$V_1 = \sqrt{gR} \doteq \sqrt{9.81 \times 6371000}\,(\mathrm{m/s}) = 7.91(\mathrm{km/s}) \tag{1.1.3}$$

从 (1.1.2) 可见，对半径为 r 的圆形轨道的卫星而言，其周期为

$$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi r}{\sqrt{gR}\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{1.1.4}$$

如果 $r = R$，则得与第一宇宙速度 V_1 相对应的卫星周期 $T_1(R)$ 为：

$$T_1(R) = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 84.5(\mathrm{min}) \tag{1.1.5}$$

从公式（1.1.4）可见，卫星的旋转周期是距离 r 的函数，距离越远则周期越长。这一方面是因为旋转半径 r 增加了，另一方面则因为 r 增加使引力变小而旋转速度降低，两者都导致旋转的周期加长。

如果卫星的周期为 24h（1440min），其轨道与赤道同心同面，且旋转方向与地球自转方向相同，则在地球上的人看来，那个卫星将是不动的（这就是所谓同步卫星）。这时，卫星离地面的高度 h 可通过下式求出：

$$T(r)=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}\doteq(84.5)\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}=1440$$

所以

$$r=\left(\frac{1440}{84.5}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot R=6.63R$$

所以

$$h=r-R=5.63R\doteq35840(\mathrm{km})$$

这种轨道是在地球的外辐射带范围内。地球的内辐射带是在离地面 600km 到 6000km 之间，而外辐射带则是在离地球中心 20000km 到 60000km 之间。

所谓地球表面的第二宇宙速度 V_2，是指从地面发射一个能离开地球引力场的物体所需要的速度，

请注意，这里只考虑引力的作用而不计空气阻力等。

从公式

$$g_r=g\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

可知：一个单位质量的物体从地面出发，飞到无限远处，它对地球引力场所作的功为：

$$\int_R^{+\infty}g\left(\frac{R}{r}\right)^2dr$$

由动能定理有

$$\frac{1}{2}(V_2^2)=\int_R^{+\infty}g\left(\frac{R}{r}\right)^2dr=gR$$

从而可得

$$V_2 = \sqrt{2gR} \doteq 11.18(\mathrm{km/s}) \tag{1.1.6}$$

显然，从地面上发射高轨道卫星所需的能量，等于把卫星从地面发射到 r 轨道所做的功再加上卫星在轨道上的动能。

对单位质量的物体而言，从地面发射到 r 轨道所作的功为

$$\int_R^r g\left(\frac{R}{r}\right)^2 dr = gR\left(1 - \frac{R}{r}\right)$$

而在 r 轨道上其动能从式 (1.1.2) 知为

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{gR}\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2} gR \frac{R}{r}$$

故若所需的总能量以相当于速度 $\bar{V}$ 的动能来代表，则有

$$\frac{1}{2}(\bar{V})^2 = \frac{1}{2} gR\left(\frac{R}{r}\right) + gR\left(1 - \frac{R}{r}\right)$$

所以

$$\bar{V} = V_2\sqrt{1 - \frac{1}{2}\frac{R}{r}} \tag{1.1.7}$$

对同步卫星而言，$r = 6.63R$，所以从式 (1.1.7) 可得

$$\bar{V} = V_2\sqrt{1 - \frac{1}{2}\frac{R}{r}} \doteq 0.961V_2 = 10.74(\mathrm{km/s})$$

这个速度已经是第二宇宙速度的 96.1%。所以，发射高轨道的卫星比发射低轨道的卫星要困难。然而，按照目前实际可行的轨道去发射同步卫星，其所需要的速度比 V_2 大得多。关于这一点读者可看拙著“星际飞行中的几个问题”中的后半部分。

所谓地球表面的第三宇宙速度 V_3，是指物体从地面起飞，最后脱离太阳引力场所需的最小速度。为此，在充分利用地球绕太阳旋转所具有能量的基础上，还要再增加一部分能量使卫星脱离太阳的引力场。

因为地球绕太阳旋转的实际椭圆轨道与圆周轨道差别很小，所以为使推导简化，这里假设地球绕太阳旋转的轨道是圆形。同时，由于其它各行星对地球的吸引力比起太阳对地球的吸引力来

小得多可以忽略，因而只需考虑太阳对地球的引力作用。

假设

$M_{\odot}$ 为太阳的质量；$\mathscr{R}$ 为地球到太阳的距离；

$g_{\odot}$ 为太阳对地球表面的引力常数（由于R比起 $\mathscr{R}$ 小得多，故可忽略R的大小，而把地球当作为一个质点，所以 $g_{\odot}$ 也可看作太阳对地球的引力常数）。

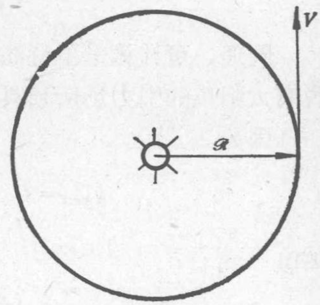


图 1-2

由于

$$g_{\odot}=G\frac{M_{\odot}}{\mathscr{R}^2}$$

但是

$$G=g\frac{R^2}{M}$$

所以

$$g_{\odot}=g\frac{M_{\odot}}{M}\left(\frac{R}{\mathscr{R}}\right)^2 \tag{1.1.8}$$

上式所表示的引力常数 $g_{\odot}$ 在计算轨道速度及脱离太阳引力场速度中所起的作用和前面计算第一宇宙速度及第二宇宙速度时的 g 所起的作用一样。

例如，要计算地球绕太阳的旋转速度，记它为 $V_{\odot 1}$。

因为

$$g_{\odot}=g\frac{M_{\odot}}{M}\left(\frac{R}{\mathscr{R}}\right)^2$$

而向心加速度为

$$\frac{(V_{\odot 1})^2}{\mathscr{R}}$$

又，

$$\frac{(V_{\odot 1})^2}{\mathscr{R}}=g_{\odot}$$

可得

$$V_{\odot 1} = \sqrt{\mathscr{R} g_{\odot}} \tag{1.1.9}$$

同理，可计算出单位质量的物体在地球绕太阳运转的轨道上脱离太阳系的引力场所须具备的速度 $V_{\odot 2}$

因为

$$g_{\odot r} = G\frac{M_{\odot}}{r^2} = g\frac{M_{\odot}}{M}\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

所以

$$\frac{1}{2}(V_{\odot 2})^2 = \int_R^{+\infty} g\frac{M_{\odot}}{M}\left(\frac{R}{r}\right)^2 dr = g_{\odot}\mathscr{R}$$

所以

$$V_{\odot 2} = \sqrt{2g_{\odot}\mathscr{R}} \tag{1.1.10}$$

如果从地球表面以第三宇宙速度 V_3 发射一单位质量的物体，则由动能定理知，此物体的总能量应为

$$\frac{1}{2}(V_3)^2 - gR = \frac{1}{2}(V_{\odot 2} - V_{\odot 1})^2$$

等式左端为地面上物体的总能量，右端则为脱离地球引力场后该物体的总能量。于是由上式求得

$$V_3 = 16.63(\mathrm{km/s}) \tag{1.1.11}$$

以上计算是为求出最小的脱离太阳系速度，在计算中充分利用了地球在其轨道上的公转速度，使火箭对太阳运动的方向与地球的公转方向一致(任何其它的方向都会增大速度的要求)；并采用使火箭一开始就加足到 V_3 的办法；而不是先加速到 V_2 等火箭脱离了地球引力场之后已经对地球没有相对速度后，再加速到它离开太阳系。在这种情况下，如果分这样两段去加速，则计算表明，所加的速度总和将大于 V_3 即

$$V_2 + (V_{\odot 2} - V_{\odot 1}) > V_3$$

所以，从能量的角度来看，一次加足速度比分两次加速好。

1.2 单级火箭飞行的齐奥尔科夫斯基公式和多级火箭

设 M 为火箭的瞬时质量；

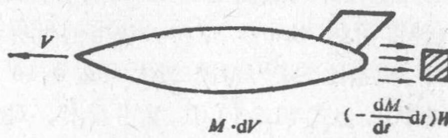


图 1-3

W 为相对于火箭的喷气速度；

$M^{(1)}$ 为火箭起飞时的质量；

$M^{(2)}$ 为火箭在发动机关机时的质量；

V 为火箭在发动机关机时的速度；

dV 为速度增量。

那么根据动量守恒原理可得（见图 1-3）

$$MdV = -WdM$$

即

$$-\frac{dM}{M} = \frac{dV}{W}$$

所以有

$$V = W\ln\frac{W^{(1)}}{M^{(2)}} \qquad (1.2.1)$$

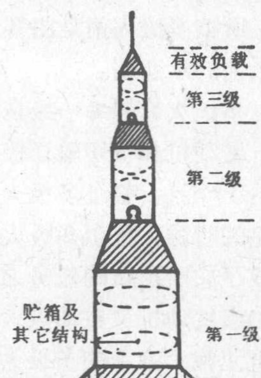


图 1-4

这就是火箭飞行的基本公式，即齐奥尔科夫斯基公式，它是在没有考虑空气阻力和地球引力的影响时建立的。

从此公式可见：若要提高火箭的有效载荷G的最终速度V，可提高喷气速度W，或提高火箭的质量比$M^{(1)}/M^{(2)}$。但是提高喷气速度W效果最显著，而提高质量比效果则不明显，因为速度仅与质量比的对数成正比。

采用目前通常使用的化学推进剂，喷气速度可达到2.5～3km/s；若采用性能较好的低温推进剂(如液氧、液氢或液氧、液氟)，那么喷气速度可达4km/s左右。在当前世界各国的科技水平和工艺水平下，质量比$M^{(1)}/M^{(2)}$最大可达到16左右。

把这些数据代入公式(1.2.1)中，就可看出，对于单级火箭而言，目前其有效载荷能达到的最大速度约为9km/s；若考虑由地球引力和空气阻力所引起的速度损耗，那么单级火箭当前能达到的最大速度约为7km/s，这个量值还达不到第一宇宙速度。

所以，在当前的情况下，为了发射人造地球卫星及进行星际航行，就必须采用多级火箭。

所谓多级火箭是由各子级和有效载荷组成。图1-4是一个三级火箭的示意图。

多级火箭的每一级是一个独立的工作单元，它本身装有推进剂，发动机和一切输送控制系统等。当多级火箭的第一级发动机开始工作时，整个多级火箭就起飞了。而当火箭的第一级推进剂烧完的时候，整个多级火箭已达到了一定的速度。火箭的第一级完成了它所担负的任务之后，便自动脱离了这个多级火箭。同时第二级发动机又自动点火开始工作，它在第一级已达到的速度基础上使整个余下的多级火箭进一步加速；当此火箭的第二级的推进剂烧完之后，第二级又自动脱离……，直至最后一级的推进剂烧完。

重复应用公式(1.2.1)可知，对N级火箭而言，当其最后一级的推进剂烧完的时候，载荷所具有的速度应为

$$V_N = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \cdots + \bar{V}_N = \sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i \qquad (1.2.2)$$

这里

$$\bar{V}_i = W_i \ln \frac{M_i^{(1)}}{M_i^{(2)}} \tag{1.2.3}$$

式中 W_i 为此多级火箭的第 i 级的喷气速度，而 $M_i^{(1)}$ 和 $M_i^{(2)}$ 则分别表示此多级火箭的第 i 级开始点火时整个组合系统的质量和第 i 级的推进剂燃烧完时整个余下的组合系统的质量。显见 $M_i^{(1)}$ 和 $M_i^{(2)}$ 不但包括了第 i 级的有关质量，而且包括了第 i 级之后各级的质量和有效载荷。

公式（1.2.2）就是多级火箭的载荷在末级火箭的发动机关机时所具有的速度的一种表示式。

由于多级火箭的每级独立地进行工作，当它的推进剂烧完之后就自动脱离了多级火箭，随时丢掉不需要的质量，这样就节省了动力，减小了推进剂的消耗，使它在飞行中能达到很高的速度。

在本书的第四章中将证明：即使对于目前通常使用的推进剂及通常采用的质量比来说，从理论上讲，若无限地增加火箭的级数，即可使载荷最终达到的速度无限地向光速逼近，这当然是多级火箭的一个很大的优点。

另外，多级火箭还有其它许多优点：如能将加速度控制在人能适应的范围内；各级在空中的不同高度工作可采用不同的发动机等等。这些这里就不再细述了。

当然，随着多级火箭的级数增多，必然会引起其结构和控制的复杂化，这不但给工程设计和制造带来了困难，而且还会使多级火箭的工作可靠性降低。所以在目前的情况下，要发射人造地球卫星或登月舱，都用多级火箭，但级数不宜过多。

一般地讲，按照当前世界各国的科技及工艺水平，发射低轨道的卫星(即几百 km 高的轨道)，采用目前通常使用的推进剂，那么用二级火箭或三级火箭就行了；若要发射高轨道的卫星或要飞向月球，那么其级数就应增加为三级或四级。

随着科学的不断发展，将来新型的火箭，像氘火箭、原子火箭、