泡利物理学讲义

5

波动力学

人民教育出版社

泡利物理学讲义

5. 波动力学

洪铭熙
苑之方 译

人民教育出版社

内 容 简 介

泡利物理学讲义是理论物理学的一套十分严谨、精练的经典教材．现根据 MIT 出版社 1973 年出版的英译本 (Charles P. Enz 主编，S. Margulies 和 H. R. Lewis 合译的 Pauli Lectures on Physics) 并参考德文原版翻译出版，以供我国大学理工科师生参考．

本套讲义分六册出版，内容分别为：1. 电动力学．2. 光学和电子论．3. 热力学和气体分子运动论．4. 统计力学．5. 波动力学．6. 场量子化选题．

本书中译本责任编辑：曹建庭

泡利物理学讲义

5. 波动力学

洪铭熙
苑之方 译

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张6.25字数 150,000
1982 年 4 月第 1 版 1983 年 5 月第 1 次印刷
印数 00,001—13,500
书号 13012·0759 定价 0.57 元

前　言

人们常说：科学方面的教科书很快会过时．可是泡利讲义，尽管其中一些是早在二十年以前讲授的，为什么现在还要出版呢？理由是简单的，因为泡利介绍物理学的方式一点也不过时．他的论量子力学基础的著名论文发表在1933年德国百科全书《物理学手册》中①．二十五年后，该文几乎未作改动地重新出现在新版本②中，而投给这部百科全书的大多数文稿却必须完全重写．出现这种惊人事实的原因就在于泡利的风格，在论文的透彻性和影响力方面，他的这种风格是与论文主题的伟大相称的．科学写作的风格是一种品质，这种品质当今正濒于消失．快速出版的压力是如此之大，以致人们把草率地写成的文章和书籍匆忙付印，而很少关心概念的细心阐述．目前，数学和仪器手段的技巧变得又复杂又困难，人们写作与学习上所花费的精力，大部分是用于获得这些技巧，而不是用于深入吃透重要概念．物理学的主要概念往往消失在数学论证的茂密丛林之中．这种情况并非一定如此．泡利讲义说明怎样才能够清晰地并用优美的数学形式把物理概念表达清楚，而不致被形式化的专门技巧所掩盖．

从宣讲技能来讲，泡利不是一个有才艺的演说家．人们跟上他

---

① 这部《物理学手册》(*Handbuch der Physik*)是H. Geiger和K. Scheel主编的．泡利这篇论文《*Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*》曾载入该手册第二版，第二十四卷，第一分册(1933)．——中译者注

② 泡利这篇论文的新版本载入S. Flügge主编的《*Handbuch der Physik*(*Encyclopedia of Physics*)》第五卷，第一分册(1958)．——中译者注

的课程往往是不容易的．但是，当他的思想脉络和他的逻辑结构变得明显时，注意听讲的追随者就会对主要概念留下一个新的更深刻的理解，并对精美的推理结构留下一个更透彻的领悟，这个精美的推理结构就是理论物理．这套讲课笔记不是他本人而是他的一些同事写的，这一事实，并不降低它们的价值．在其概念结构和数学严谨上，它们体现了大师的特点．只是间或在某些地方人们确实没见到大师的一些词语和说明．除了场的量子化那些讲义，人们对他的讲义并无过时之感，在场的量子化讲义中，有些概念的表达方式，今天对有些人说，也许显得陈旧．尽管如此，由于这些讲义的简洁性和直截了当地逼近中心问题，它们对现代的学生来说该是有益的．

愿本卷作为一个范例，说明创造理论物理学的伟人之一，是怎样表达和讲授理论物理学概念的．

维克托F．外斯科夫

于麻省　坎布里奇市

序

令人惊讶的是，泡利只有一次在 1956—57 年冬季学期中给出“波动力学”这一课程的完整文本. 这是由于这样一个事实：尽管量子力学是苏黎世联邦工业大学的物理学位课程的组成部分，然而有关这一课题的正规课程却长期没有开设. 著名专著“波动力学的普遍原理”[“Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik” (*Handbuch der Physik*, Band 24/1, Springer, Berlin, 1933)]的作者于 1928 年即执教于联邦工业大学，就此而言，令人感到意外.

尽管“大全中的论文”的精神大部分反映在这一课程中，泡利还是趁机把他的大量关于由 Whittaker 和 Watson 的“近代分析教程”(*A Course of Modern Analysis*)所代表的十九世纪数学的广博知识增添到这一课程中，他同他的老师 A. 索末菲同样爱好“近代分析教程”. 这是本书的特色之一，在其他关于量子力学的书籍中尚未见到如此详尽和严谨的. 因而，对今日的学生来讲，它也是值得一读的课本.

但是除了这一偏重技术性的方面之外，饶有兴趣的是看一看，量子理论的创始人中最有批判性的人物是怎样讲授他的课题的. 如在学生序言中所述，他讲课主要用数学语言，带有极少的，但却是透彻的评论. 而且他在选择了这一课程的题材时，是根据它们的概念的和历史的重要性. 例子是：量子理论的几率本性，自旋的概念，全同粒子问题，以及双原子分子转动态的统计法与核自旋的关系. 由于上述原因，并由于泡利与量子力学发展的渊源，我已在

附录中试行评述其历史的一些引人入胜的最精采部分.

泡利对此课程的第二次讲授，始于 1958 年 10 月. 由于他在当年 12 月逝世，这次讲授不幸中断. 我被约请接替这一课程时，他已讲授过前 16 节以及球坐标中的氢原子. 如学生序言中所述，泡利曾打算校订他们在第一次讲授中所记的笔记；所以他只对上述部分的讲述内容作了校订. 因此，本课程的其余部分，特别是习题部分的措辞的一些责任就落在我的肩上.

由海尔拉荷(Herlach)和克诺普费尔(Knoepfel)精心制备的笔记使得这一英译本的编辑工作能够相当顺利，英译者们所做的工作对本讲义有很大的帮助.

查里 P. 安兹

日内瓦，1971 年 10 月 27 日

学 生 序 言

泡利教授亲自参与了波动力学的发展．因此，他能不用讲稿每周讲授本课程四小时，而且特别胜任愉快，堪称这一课题的硕才大师．

按泡利教授的要求，我们在 1956年—1957 年的冬季学期中记录下他讲授这一课程的笔记，并整理成目前的形式．他拟根据1958年—1959 年冬季学期的笔记通过讲授来修订我们的手稿．遗憾的是，他未能达到这一目的．然而，在他审核的部分（直到氢原子）中他只作了很少量的修订，这促使我们出版整套笔记，我们希望这将是我们尊敬的老师所曾希望的．

在这些讲义中，他特别想充分地论述理论的数学基础．这一关于波动力学的论述，也在另一方面与通常教科书中的论述有所不同．

泡利教授喜爱用公式和简单的言词表达他的思想．有一次他曾说过，“人们不应写得那样繁多．”在从事笔记的整理时，我们力求保持泡利教授讲课的本来面目和他讲授中的独特风格．我们也在本书中私自插入了他的一些独特的言论．

我们特别感谢 C. 安兹博士校订了本书的第二部分．

F. 海尔拉荷

H. E. 克诺普费尔

苏黎世

1958 年 12 月

引　言

1900 年普朗克关于作用量子的发现开创了波动力学的发展．在开始阶段，存在许多与理论有关的问题．直到波动力学被表述为一个自洽的理论，一共花费了整整 25 年．当然，只有扬弃了一些直观性才能取得这一成就；特别是，几个粒子的系统不再能用具体的波来描述．在 1927 年德布罗意、海森伯和薛定谔的第一批论文发表后不久，这一理论的基本原理在逻辑上就已臻完善．自那时起，就已证明这一理论在物理学的许多领域中是有用的，并且已由实验反复地证实．

目　录

第五章　本征值问题. 数学物理函数

第六章　碰撞过程

第七章　解波动方程的近似方法

第八章　矩阵和算符. 微扰理论

第九章　角动量和自旋

第十章 具有自旋的全同粒子

习 题

第一章　自由粒子的波函数①

§1. 波和粒子的联系

一个具有能量 E 和动量 $\boldsymbol{p}$ 的粒子能以如下方式与一个波 $A\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]$ 相联系 ($\boldsymbol{k}=(2\pi/\lambda)\boldsymbol{n}$ 为波矢，$\boldsymbol{n}$ 为波的法线).

对于光量子

$$E=\hbar\omega,\quad \boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

关系式成立. 它们是相对论性不变式. 此外还有关系式

$$\left.\begin{aligned} |\boldsymbol{k}|\equiv k=\frac{\omega}{c},\qquad |\boldsymbol{p}|\equiv p=\frac{E}{c}\\ \boldsymbol{k}^2=\frac{\omega^2}{c^2},\qquad \boldsymbol{p}^2=\frac{E^2}{c^2}\end{aligned}\right\}. \tag{1.2}$$

根据相对论性质点力学，我们有公式:

$$\frac{E}{c}=\sqrt{p^2+m^2c^2}\quad (m=\text{静质量}), \tag{1.3}$$

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \boldsymbol{p}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{1.4}$$

其中，[1.3]式是由[1.4]式导出的. 根据力学的普遍公式

$$\mathrm{d}E=\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p},\ \text{或(用分量的形式)}\quad v_i=\frac{\partial E}{\partial p_i}, \tag{1.5}$$

---

① 1a 在本讲义中，我们用符号 h 代表 1.05×10^{-34} 焦耳·秒. 在较早期的文献中，这个量通常用 $\hbar$ 来表示.

1b 通常将略去积分限 $-\infty$ 和 $+\infty$.

我们也能从[1. 3]式导出[1. 4]式:

$$\left.\begin{aligned}
&v_l=\frac{\partial E}{\partial p_l}=c\frac{p_l}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}=c^2\frac{p_l}{E}\textcircled{1}\\
&\frac{v^2}{c^2}=\frac{c^2p^2}{E^2},\ 1-\frac{v^2}{c^2}=1-\frac{c^2p^2}{E^2}=\frac{m^2c^4}{E^2}\\
&\frac{v^2}{c^2}=\frac{p^2}{p^2+m^2c^2},\quad p^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=m^2v^2
\end{aligned}\right\}. \qquad [1.6]$$

也可将[1. 5]式和[1. 6]式结合起来而给出关系式

$$(1/c^2)E\mathrm{d}E=\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

德布罗意的思想是: [1. 1]式对于实物粒子也应该是正确的,但在实物粒子的情况中,[1. 2]式必须以下式来代替

$$\frac{\omega}{c}=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\frac{m^2c^2}{h^2}},\quad \frac{\omega^2}{c^2}=\boldsymbol{k}^2+\frac{m^2c^2}{h^2}. \qquad [1.7]$$

此式由[1. 1]式和[1. 3]式导出. 对于光($m=0$)来说,我们又得到[1. 2]式.

将[1. 1]式代入[1. 5]式,得

$$v_l=\frac{\partial\omega}{\partial k_l}; \qquad [1.8]$$

即, 粒子的速度=粒子所联系的波的群速度. 从[1. 1]式和[1. 6]式得到$|\boldsymbol{v}|=c^2(k/\omega)$;因此,对于相速度$u$,有

$$u=\frac{\omega}{k}=\frac{c^2}{v}. \qquad [1.9]$$

由于$v<c$,所以$u>c$.

§ 2. 波函数和波动方程

a. 平面波的叠加. 波包

① 此式原书有误,已改正.——中译者注

最普遍的波包具有如下形式①

$$\psi(\boldsymbol{x}, t)=\iiint A(k_1, k_2, k_3)\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3, \quad [2.1]$$

式中 ω 现在由[1.7]式给出.

这一波函数 ψ 满足相对论性标量波动方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\boldsymbol{x}, t)=\frac{m^2c^2}{h^2}\psi(\boldsymbol{x}, t), \quad [2.2]$$

正如将[2.1]式代入[2.2]式会看到的那样. 由于[1.7]式, 于是波动方程同样被满足. 所以,我们也能写出

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\sim ik_l, \quad \frac{\partial}{\partial t}\sim -i\omega. \quad [2.3]$$

这些对应关系, 和[1.1]式一起, 给出时间和空间的微分算符与经典量 $\boldsymbol{p}$ 和 E 间的重要联系:

$$-ih\frac{\partial}{\partial x_l}\sim p_l, \quad ih\frac{\partial}{\partial t}\sim E. \quad [2.4]$$

这些关系构成经典力学量与波动力学算符间转化的关键.

b. 过渡到非相对论性近似

在力学中, 对于 $v\ll c(c\to\infty)$ 和 $p\ll mc$ 的情况, 我们有

$$\frac{E}{c}=\sqrt{p^2+m^2c^2}\sim mc\left(1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{c}\left(mc^2+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}+\cdots\right). \quad [2.5]$$

由[1.7]式我们也得到

$$\omega=\frac{E}{h}=\frac{mc^2}{h}+\frac{h}{2m}k^2+\cdots \quad [2.6]$$

(式中 $E=mc^2+E_{动}$, $E_{动}=p^2/2m$). 我们定义

---

① 参见 W. Pauli, *Lecture in Physics: Optics and the Theory of Electrons* (M. I. T. Press, Cambridge, Mass. 1972). [中译本: 泡利物理学讲义(1973 年版), 第二卷, 光学和电子论, 洪铭熙译, 人民教育出版社出版. ——中译者注]

$$\omega' = \frac{h}{2m} k^2, \qquad [2.7]$$

即

$$\omega = \frac{mc^2}{h} + \omega', \qquad [2.8]$$

和

$$\psi'(\boldsymbol{x}, t) = \iiint A(\boldsymbol{k}) \exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega' t)] \mathrm{d}^3 k, \qquad [2.9]$$

由此,

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \exp\left[-\frac{imc^2}{h} t\right] \psi'(\boldsymbol{x}, t). \qquad [2.10]$$

代入[2.2]式,给出,

$$\nabla^2 \psi' + \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi' + 2\frac{im}{h} \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi',$$

从而导出非相对论性波动方程①

$$\nabla^2 \psi' + i\frac{2m}{h} \frac{\partial \psi'}{\partial t} = 0 \qquad [2.11]$$

除了虚系数外,此式对应于热传导方程. 虚系数保证了时间无特殊方向;在 $t \to -t$, $\psi' \to \psi'^*$ 的变换中,[2.11]式为不变式. 因此,$\psi^* \psi$ 保持不变②.

今后我们将总是用这里引进的带撇的量来计算;然而,为了简化,将省去"撇"的符号. ω 和 ω' 两个量只相差一常数;然而,这不是一个本质的差别,因为在波动力学中,只有频率差才是重要的.

§ 3. 测不准原理

在波的运动学中,我们不能在指明波的位置的同时指明精确

---

① 此式按德文原本写出. 英译本中,此式左端尚有一项 $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2}$. 实际上,对于非相对论性近似,$c$ 看作 ∞,该项应略去. ——中译者注

② 以后我们将看到,物理上可测量的量并非波函数 ψ,而只是几率密度 $\psi^* \psi$.

的波长.的确,人们只能对限制于空间局部区域的波包的情况来谈论波的位置. 当波包变得更集中时，包含在傅里叶谱中的不同的波长的数目增加. 推测形式为$\Delta k_i \Delta x_i >$常数的关系是合理的，我们现在要定量地导出这一关系. 为了简化，我们只对一维情况进行计算;可直接推广到三维情况.

我们考察一个在一定时刻t的波包[2.1],并令此时刻为$t=0$. 如在傅里叶积分变换中所要求的，可将[2.1]式写成对于x和k是对称的形式:

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int A(k)\exp[ikx]\mathrm{d}k, \tag{3.1}$$

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \psi(x)\exp[-ikx]\mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

由于这些公式的对称性,当进行下列诸代换时

$$\updownarrow \begin{matrix} \psi & A & x & k & i \\ A & \psi & k & x & -i \end{matrix} \tag{3.3}$$

所有的方程仍然保持其正确性. 此外,著名的帕塞瓦耳(Parseval)公式成立

$$N=\int \psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x=\int A^*(k)A(k)\mathrm{d}k. \tag{3.4}$$

a. 函数和算符的平均值. 归一化

对于一个归一化的波包,按定义,归一化积分N等于1. 一个无限广延的平面波给出$N=\infty$，因此，它不能被归一化. 我们定义函数F的平均值等于下列诸量:

$$\bar{F}(x)=\frac{\int F(x)\psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x}{\int \psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x},\quad \bar{F}(k)=\frac{\int F(k)A^*(k)A(k)\mathrm{d}k}{\int A^*(k)A(k)\mathrm{d}k}.$$

在这些公式中,量$\psi^*\psi$和A^*A具有密度的意义. 后面，将更好地证实这一诠释.