

高等学校教学用书



# 分析力学讲义

FENXI LIXUE JIANGYI

Ф. П. 甘特馬赫著  
钟奉俄 薛問西译

人民教育出版社

高等学校教学用书



52.1  
054-02

分析力学讲义

FENXI LIXUE JIANGYI

Ф. П. 甘特馬赫著

钟奉俄 薛問西译

人民教育出版社

本书系根据苏联国家物理数学书籍出版社(Физматгиз)出版的甘特馬赫(Ф. Р. Гантмахер)著“分析力学讲义”(Лекции по аналитической механике)一书1960年版譯出的。书中介绍了分析力学的研究方法和分析力学在李亚普諾夫稳定性理論、振动理論、剛体动力学等方面的应用。除振动理論的古典方法外,还闡述了現代頻率法的基础。也对于把分析力学方法推广到电的和机电的系統中所用的机电模拟进行了討論。

本书为讀者学习狭义相对論、量子力学和理論物理的其它部分打下足够深入的基础,并詳尽地闡述了力学的变分原理和积分不变量、正则变換和哈密頓-雅科毕方程。

本书可供綜合性大学数学力学系和物理系学生、研究生閱讀。也可以供工程研究人員和其他专家閱讀,以扩大并加深他們的力学知識。

## 分析力学讲义

Ф. Р. 甘特馬赫著

钟奉俄 薛問西譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

民族印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K1301·1090 开本850×1168<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 印张8<sup>1</sup>/<sub>16</sub>

字数202,030 印数0,071—5,500 定价(6) 0.80

1963年6月第1版 1963年6月北京第1次印刷

## 序

“分析力学”一詞，在力学著述中并无統一涵义。有的作者把分析力学和理論力学看作是等同的<sup>①</sup>。另一些人认为，以广义坐标叙述力学理論是分析力学的主要标志。本书作者所持的第三种观点則是：分析力学的特征既表現在叙述的体系方面，也表現在所探討的問題的范围方面。

以普遍原理(微分的或积分的)为基础，用分析的方法来导出运动基本微分方程，这就是分析力学叙述体系的特征。闡述力学的普遍原理、由这些原理导出基本运动微分方程，并研究这些方程本身及其积分方法——所有这些就构成分析力学的基本內容。

在綜合性大学及师范学院的数学力学系、物理系及工程物理系的教學大綱里，分析力学是理論力学課程的一部分。而在工科大学的理論力学教學大綱中，或者根本没有分析力学，或者仅有它的一部分。按照傳統方式分为“靜力学”、“运动学”和“质点及系統的动力学”，而讲授的理論力学教程对于解决現代技术所提出的各种問題是很不够的。在現代技术各領域工作的研究工程师們，对于分析力学的一般方法是應該掌握的，因为这些方法不仅对于研究那些属于純力学現象的复杂問題，而且也对于研究那些属于电学現象和机电現象的复杂問題，給出了一个通用的分析工具。

本书并不企图将分析力学的全部分內容包括无遺。本书系根据作者近六年来，在莫斯科物理技术学院对二年級第二学期学生的讲课內容写成的。这种情况也就决定了本书的取材及其讲述特点。

---

<sup>①</sup> 例如，Г. К. Суслев及Ш. Ж. Валде Пуссен的名著“理論力学教程”曾被作者自己称为“分析力学教程”。

分析力学課程是学习量子力学、狭义相对論及广义相对論等若干理論物理章节的基础。因此，书中詳細地闡述了力学的变分原理和积分不变量、正則变換、哈密頓-雅科毕方程以及具有循环坐标的系統(二、三、四、七諸章)。在引入了A. 龐伽雷及D. 卡当的思想之后，作者即以力学积分不变量作为叙述所讲材料的基础。积分不变量在这里并非理論上的裝飾，而是工具。

非自由系統的討論与技术应用有关。第一章中仔細地研究了这类系統。从这一章讲机电模拟的一节可以看出将力学的分析方法推广用于电学系統和机电系統的可能性。五、六两章讲述了分析力学在李亚普諾夫稳定性理論及振動理論方面的应用。除綫性振動理論的古典問題而外，还讲到了近代頻率法的基础。有关剛体动力学的若干問題是分散在几个例子中讲的。

本书設想讀者已經具有理論力学及高等数学的一般基础知识。本书供綜合性大学数学力学系、物理系及工程物理系学生及研究生之用，也可以供那些希望扩充并加深自己在力学方面的知識的工程研究人員及其他专家們閱讀。

# 目 录

序	v
第一章 任意质点系统的运动微分方程	1
§ 1. 自由系统和非自由系统·约束及其分类	1
§ 2. 可能位移和虚位移·理想约束	5
§ 3. 动力学普遍方程·第一类拉格朗日方程	13
§ 4. 虚位移原理·达朗伯原理	18
§ 5. 完整系统·独立坐标·广义力	26
§ 6. 独立坐标下的第二类拉格朗日方程	33
§ 7. 拉格朗日方程的研究	38
§ 8. 总能量变化定理·有势力·迴轉仪力和耗散力	42
§ 9. 机电模拟	48
§ 10. 非完整系统的阿沛尔方程·伪坐标	51
第二章 势场中的运动方程	60
§ 11. 有势力情况下的拉格朗日方程·广义势·非自然系统	60
§ 12. 哈密顿正则方程	65
§ 13. 罗司方程	73
§ 14. 循环坐标	75
§ 15. 泊松括弧	78
第三章 变分原理和积分不变量	84
§ 16. 哈密顿原理	84
§ 17. 第二种型式的哈密顿原理	91
§ 18. 力学基本积分不变量(龐伽雷-卡当积分不变量)	93
§ 19. 基本积分不变量的流体动力学解释·汤姆孙和亥姆霍兹关于环量和渦量的定理	101
§ 20. 广义保守系统·惠特克方程·雅科夫方程·莫培督-拉格朗日最小作用量原理	106
§ 21. 惯性运动·保守系统的任意运动与测地线的关系	112
§ 22. 龐伽雷通用积分不变量·全华宗定理	114
§ 23. 相空间的体积不变性·刘維定理	120
第四章 正则变换和哈密頓-雅科夫方程	123
§ 24. 正则变换	123
§ 25. 自由正则变换	127

§ 26. 哈密頓-雅科毕方程	131
§ 27. 分离变量法·例题	137
§ 28. 正则变换在振动理論中的应用	146
§ 29. 任意正则变换的结构	149
§ 30. 变换的正则性准则·拉格朗日括弧	154
§ 31. 正则变换雅科毕矩阵的耦对性	156
§ 32. 正则变换下泊松括弧的不变性	159
<b>第五章 系統的平衡稳定性及其运动稳定性</b>	<b>162</b>
§ 33. 关于平衡位置稳定性的拉格朗日定理	162
§ 34. 平衡位置不稳定准则·李亚普诺夫和契塔也夫定理	168
§ 35. 平衡位置的渐近稳定性·耗散系統	171
§ 36. 条件稳定性·問題的一般提法·运动或任一过程的稳定性·李亚普诺夫定理	174
§ 37. 綫性系統的稳定性	183
§ 38. 按綫性近似的稳定性	187
§ 39. 渐近稳定性准则	192
<b>第六章 微振动</b>	<b>197</b>
§ 40. 保守系统的微振动	197
§ 41. 簡正坐标	207
§ 42. 周期性外力对保守系統振动的影响	210
§ 43. 保守系統頻率的极端性质·頻率隨系統慣性和剛性而变的瑞利定理·約束对頻率的影响	212
§ 44. 彈性系統的微振动	218
§ 45. 在不显含時間的力的作用下, 平穩系統的微振动	224
§ 46. 瑞利耗散函数·小耗散力对保守系統振动的影响	226
§ 47. 与時間有关的外力对平穩系統微振动的影响·幅-相特性	231
<b>第七章 有循环坐标的系統</b>	<b>237</b>
§ 48. 导出系統·罗司势·隱运动·赫兹关于动能产生势能的概念	237
§ 49. 平穩运动的稳定性	247
参考书目	255
人名索引	257
索引	259

# 第一章 任意质点系统的运动微分方程

## § 1. 自由系统和非自由系统·约束及其分类

我们来研究质点系统  $P_\nu (\nu=1, \dots, N)$  相对于某惯性坐标系(伽利略系统)的运动。系统各个质点的位置和速度受有几何学的或运动学的限制, 这种限制称之为约束。具有这种约束的系统称为非自由系统, 以别于没有这种约束的自由系统。

约束可以用方程

$$f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu) = 0 \textcircled{1} \quad (1)$$

解析地表示。它的左端包含有时间  $t$  以及系统所有各质点  $P_\nu$  的矢径  $\mathbf{r}_\nu$  和速度  $\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu (\nu=1, \dots, N)$ 。在约束方程(1)中不包含速度  $\dot{\mathbf{r}}_\nu$  的特别情形的约束便称之为有限约束或几何约束。它的解析表达式可以写作

$$f(t, \mathbf{r}_\nu) = 0. \quad (2)$$

在一般情况下, 约束(1)称为微分约束或运动约束。今后我们仅限于讨论这样的微分约束: 在它的方程中, 速度是线性地出现的, 即

$$\sum_{\nu=1}^N l_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu + D = 0. \quad (3)$$

---

① 字母上加一点(如  $\dot{\mathbf{r}}_\nu$ )表示对应的量对时间的导数。所有矢径都是由固定在给定坐标系中的同一极点引出。往后, 我们将以  $f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu)$  表示函数  $f(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$  的缩写。这种缩写方式将在全书中采用。如果  $x_\nu, y_\nu, z_\nu$  是点  $P_\nu (\nu=1, \dots, N)$  在所讨论的坐标系中的笛卡尔坐标, 则函数  $f$  可以看作  $6N+1$  个纯量  $t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu (\nu=1, \dots, N)$  的函数。对于函数  $f$  以及今后在本书中遇到的所有函数, 在没有预先申明时, 我们都假定这些函数及其导数是连续的。



式中  $L_\nu \dot{r}_\nu$  是矢量  $L_\nu$  和  $\dot{r}_\nu$  的数积, 而矢量  $L_\nu$  和纯量  $D$  则是变量  $t$  和全体  $r_\nu$  的已知函数 ( $\mu, \nu=1, \dots, N$ )。同时我们还假设全体矢量  $L_\nu$  不同时为零。

当有形式(2)的有限约束存在时, 在每一给定时刻, 系统就不能够占据空间的任意位置。有限约束在系统于时刻  $t$  的可能位置上加上了一定的限制。当仅有微分约束存在时, 系统于任一时刻  $t$  可以占有空间的任意位置。但在这位置上, 系统各点的速度却不能是任意的。微分约束给这些速度加上了一定的限制。

由每个形式如(2)的有限约束都可以导出一个微分约束, 它的方程可由等式(2)经逐项微分而得到:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f}{\partial r_\nu} \dot{r}_\nu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

式中  $\frac{\partial f}{\partial r_\nu} = \text{grad}_\nu f$  ( $\nu=1, \dots, N$ )<sup>①</sup>。这样的微分约束称为可积微分约束, 因为它和有限约束

$$f(t, r_\nu) = c \quad (5)$$

是等价的。这里  $c$  是任意常数。

注意, 在笛卡尔直角坐标中, 约束方程(1)–(4)可以写成如下形式:

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = 0, \quad (1')$$

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0, \quad (2')$$

$$\sum_{\nu=1}^N (A_\nu \dot{x}_\nu + B_\nu \dot{y}_\nu + C_\nu \dot{z}_\nu) + D = 0 \text{②}, \quad (3')$$

① 若  $r_\nu = x_\nu i + y_\nu j + z_\nu k$ , 其中  $i, j, k$  是正交坐标轴的单位矢量, 则

$$\frac{\partial f}{\partial r_\nu} = \frac{\partial f}{\partial x_\nu} i + \frac{\partial f}{\partial y_\nu} j + \frac{\partial f}{\partial z_\nu} k \quad (\nu=1, \dots, N).$$

②  $A_\nu, B_\nu, C_\nu$  ( $\nu=1, \dots, N$ ) 都是  $t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$  的数量函数。

$$\sum_{v=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_v} \dot{x}_v + \frac{\partial f}{\partial y_v} \dot{y}_v + \frac{\partial f}{\partial z_v} \dot{z}_v \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (4')$$

在有限約束方程(2)或(2')中, 如果不明显地包含時間  $t$ , 即  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , 則这种約束称为平穩的。此时, 微分約束方程(4)的左端, 对速度而言, 是綫性齐次的。与此相仿, 如果方程(3)的  $D=0$ , 而且矢量  $l_v$  [相应地, (3') 的系数  $A_v, B_v, C_v$ ] 不明显地依赖于時間  $t$ , 則微分約束(3)或(3') 称为平穩的。

如果没有不可积微分約束加于质点系統的各点, 則这种系統称为完整系統。因此, 自由的质点系統以及具有有限約束或可积微分約束的非自由系統都是完整系統。完整系統所具有的一切約束都可以写成有限形式。

当有不可积微分約束存在时, 系統称为非完整系統①。

仅仅具有平穩約束的系統称为平穩系統。有非平穩約束的系統称为非平穩系統。

**例題 1.** 质点只可以沿着曲面运动, 曲面方程为

$$f(\mathbf{r}) = 0 \quad (6)$$

或 
$$f(x, y, z) = 0. \quad (6')$$

这是有限的平穩約束。

如果曲面本身在运动或变形, 那么, 在曲面方程中将显含時間  $t$ :

$$f(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (7)$$

或

$$f(t, x, y, z) = 0. \quad (7')$$

在这种情况下, 約束是有限的但非平穩的。

2. 由长度为  $l$  的剛性杆联結着的二质点。在这种情况下, 約束方程为

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - l^2 = 0 \quad (8)$$

① 不可积微分約束往往又称为非完整約束, 而可积微分約束有时又称为半完整約束。

或

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0. \quad (8')$$

这是完整的平稳系统。

应当注意，刚体可以看作质点间距离不变的系统，即具有形式(8)的约束。从这种观点出发，自由刚体乃是自由的、完整的平稳质点系统的特殊情况。

3. 由变长度  $l=f(t)$  的杆联结着的二质点。 约束方程可以写作：

$$(r_1 - r_2)^2 - f^2(t) = 0 \quad (9)$$

或

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - f^2(t) = 0. \quad (9')$$

这是完整的非平稳系统。

4. 平面上二质点由一长度为  $l$  的刚性杆联结，运动中杆的中点速度可以沿着杆向(冰刀在平面上的运动)。 约束方程可以写成如下的形式：

$$\left. \begin{aligned} z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0, \\ \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

这是非完整系统，因为(10)中最后一个方程决定一个不可积的微分约束。

形式如(1)的约束称为固执约束。在力学中还会遇到一种非固执约束，它可以用如下形式的不等式来表示：

$$f(t, r_v, \dot{r}_v) \geq 0. \quad (11)$$

例如由长度为  $l$  的线所联结的二质点。这时的约束可以用下列不等式来表示：

$$l^2 - (r_1 - r_2)^2 \geq 0. \quad (12)$$

在方程(11)中，如果等号成立，我们就说约束是张紧的。

当有非固执约束存在时，系统的运动可以分段考虑：在约束是张紧的一段上，系统的运动和在固执约束情况下一样，而在约束是非张紧的一段上，则和没有约束的情况一样。因此，在各个阶段上，非固执约束或者可代之以固执约束，或者可以完全解除。有鉴于此，今后我们将仅讨论固执约束。

## § 2. 可能位移和虛位移 · 理想約束

設在質點系統上加有  $d$  個有限約束

$$f_{\alpha}(t, \mathbf{r}_v) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d) \quad (1)$$

和  $g$  個微分約束<sup>①</sup>

$$\sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \mathbf{v}_{\nu} + D_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g). \quad (2)$$

現在將有限約束代之以其微分形式

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \mathbf{v}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d). \quad (3)$$

若向量組  $\mathbf{v}_{\nu}$  滿足  $d+g$  個綫性方程(2)和(3), 則向量組  $\mathbf{v}_{\nu}$  稱為瞬時  $t$  系統在其可能位置的可能速度。

因此, 可能速度是約束所容許的速度。對於系統在時刻  $t$  的每一可能位置, 都存在無數組可能速度, 而系統在時刻  $t$  作實際運動時, 這無數組速度中僅有一組被實現。

我們將無限小位移

$$d\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu} dt \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (4)$$

叫做可能的無限小位移或簡稱為可能位移, 其中  $\mathbf{v}_{\nu}$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) 是可能速度。將方程(2)和(3)逐項乘以  $dt$  就得到決定可能位移的方程:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} d\mathbf{r}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d), \\ \sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} d\mathbf{r}_{\nu} + D_{\beta} dt &= 0 \quad (\beta = 1, \dots, g). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

取系統在同一時刻、同一位置的两組可能位移

① 在微分約束方程中, 我們將  $\dot{\mathbf{r}}_{\nu}$  寫成  $\mathbf{v}_{\nu}$ 。

$$dr_\nu = v_\nu dt, \quad d'r_\nu = v'_\nu dt \quad (\nu=1, \dots, N).$$

$dr_\nu$  和  $d'r_\nu$  同样都满足方程(5), 但差

$$\delta r_\nu = d'r_\nu - dr_\nu \quad (\nu=1, \dots, N) \quad (6)$$

却满足齐次关系式:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\nu} \delta r_\nu &= 0 \quad (\alpha=1, \dots, d), \\ \sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \delta r_\nu &= 0 \quad (\beta=1, \dots, g). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

差  $\delta r_\nu = d'r_\nu - dr_\nu$  称为虚位移。满足方程(7)的任意一组矢量  $\delta r_\nu$  都是一组虚位移。关于虚位移的方程(7)和确定可能位移的方程(5)之间的差别仅在于方程(7)没有  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$  及  $D_\beta dt$  两项。因此可以说, 当约束被“凝固”时, 虚位移与可能位移是一样的。

事实上, 当约束被“凝固”时, 出现在有限约束中的时间  $t$  就被固定了, 也就是说, 约束将保持它在时刻  $t$  的形状不变。因此, 在求函数  $f_\alpha$  的微分时就不出现  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$  这一项, 因之, (5)式的头  $d$  个方程就和(7)式中的头  $d$  个一样。对于微分约束而言, “凝固”就意味着使之具有平稳的特征, 即丢掉约束方程左端中的  $D_\beta$  并使显含在系数  $l_{\beta\nu}$  中的  $t$  固定不变。这样一来, 方程(5)中的后  $g$  个方程就和(7)中对应的方程完全相同。

我们也可以这样说: 虚位移乃是系统各质点从系统在时刻  $t$  的某一可能位置到系统在同一时刻  $t$  可能占有的另一无限临近位置的位移。

在平稳约束情况下, 虚位移与可能位移一致。

#### 例题 1. 点沿固定曲面运动(图1)。

在这种情况下, 从点  $P$  所引出的、在该点与曲面相切的任一矢量  $v$  都是可能速度。对应的可能位移  $dr = v dt$  则位于曲面在点  $P$  的切平面内。二切

綫矢量之差  $\delta r = d'r - dr$  也是与曲面在同一点相切的矢量。因此，由点  $P$  所作的位于切平面内的任何矢量既可以看作是某一个  $dr$  也可以看作是某一个  $\delta r$ 。在这个例子中，约束是平稳的，因之，虚位移和可能位移一致。

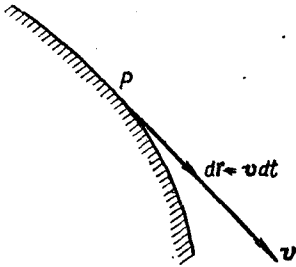


图 1.

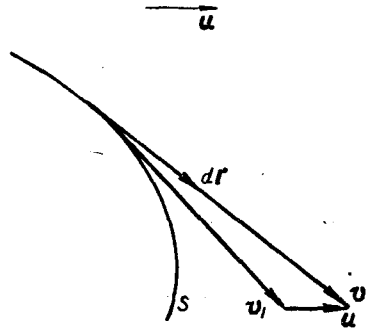


图 2.

2. 作为约束的曲面  $S$  以速度  $u$  相对于原来坐标系 (像刚体一样地) 运动 (图 2)。

此时，可能速度  $v$  可由与曲面相切的任一矢量  $v_1$  同曲面自身的速度  $u$  之和得出：

$$v = v_1 + u.$$

因此，

$$dr = v dt = v_1 dt + u dt.$$

与此相仿，对于另一个可能位移则有

$$d'r = v'_1 dt + u dt.$$

因而，虚位移

$$\delta r = d'r - dr = (v'_1 - v_1) dt$$

和  $dr$  不同，它是位于过  $P$  点的切平面上的矢量 (图 3)。矢量  $\delta r$  是当曲面  $S$  不动时的可能位移。

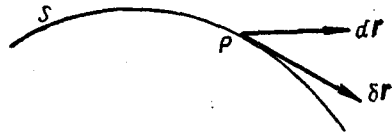


图 3.

在笛卡尔坐标中， $\delta r_v$  可用它沿坐标轴的三个投影  $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$  ( $v=1, \dots, N$ ) 来表示，因而，确定虚位移的方程 (7) 可以写成如下形式：

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_{\nu}} \delta x_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_{\nu}} \delta y_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_{\nu}} \delta z_{\nu} \right) &= 0 \quad (\alpha=1, \dots, d), \\ \sum_{\nu=1}^N (A_{\beta\nu} \delta x_{\nu} + B_{\beta\nu} \delta y_{\nu} + C_{\beta\nu} \delta z_{\nu}) &= 0 \quad (\beta=1, \dots, g). \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

如果这  $d+g$  个方程是独立的, 则  $3N$  个坐标虚增量  $\delta x_{\nu}, \delta y_{\nu}, \delta z_{\nu}$  中将有  $n=3N-d-g$  个是独立的。数  $n$  称为质点系统的自由度。

设在系统各质点  $P_{\nu}$  上分别作用有力  $F_{\nu} (\nu=1, \dots, N)$ ①。如果没有约束, 则按牛顿第二定律, 质量  $m_{\nu}$ 、加速度  $w_{\nu}$  和力  $F_{\nu}$  之间有  $m_{\nu} w_{\nu} = F_{\nu} (\nu=1, \dots, N)$  的关系。在有约束存在的情况下, 加速度  $w_{\nu} = \frac{1}{m_{\nu}} F_{\nu}$  (在给定的时刻  $t$  和系统各质点的给定位置  $r_{\nu}$  和速度  $v_{\nu}$  之下) 可能和约束不一致。事实上, 将等式 (3) 和 (2) 对时间逐项微分便得到约束加在系统各质点加速度  $w_{\nu}$  上的限制的解析表达式②:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r_{\nu}} w_{\nu} + \sum_{\nu=1}^N \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r_{\nu}} \right) v_{\nu} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} &= 0 \quad (\alpha=1, \dots, d), \\ \sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} w_{\nu} + \sum_{\nu=1}^N \frac{dl_{\beta\nu}}{dt} v_{\nu} + \frac{dD_{\beta}}{dt} &= 0 \quad (\beta=1, \dots, g). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

加速度  $w_{\nu} = \frac{1}{m_{\nu}} F_{\nu}$  可能不满足这些关系。因此, 实际存在的约束将在系统的质点  $P_{\nu}$  上作用以附加的力  $R_{\nu} (\nu=1, \dots, N)$ ; 这些由约束产生的作用力称之为约束反力③。所产生的反力应当使由

①  $F_{\nu}$  应理解为直接作用在质点  $P_{\nu}$  上的一切力的合力 ( $\nu=1, \dots, N$ )。

② (8) 式左端线性地依赖于加速度  $w_{\nu}$ 。不难看出, 这些左端部分在微分之后仍然依赖于  $t, r_{\nu}, v_{\nu} (\nu=1, \dots, N)$ 。

③ 当有若干个约束存在 ( $d+g>1$ ) 时,  $R_{\nu}$  就是作用在点  $P_{\nu}$  上的全体约束反力的合力 ( $\nu=1, \dots, N$ )。

方程

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \quad (\nu=1, \dots, N) \quad (9)$$

所确定的加速度为約束所容許。

为了和反力  $\mathbf{R}_\nu (\nu=1, \dots, N)$  相区别, 我們將預先給定的力  $\mathbf{F}_\nu (\nu=1, \dots, N)$  称为主动力。主动力通常是時間和系統各质点位置和速度的已知函数①。

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu) \quad (\nu=1, \dots, N) \quad (10)$$

非自由系統动力学的基本問題如下:

設主动力  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu)$  是已知的, 系統各质点的一組为約束所容許的初始位置  $\mathbf{r}_\nu^0$  和初始速度  $\mathbf{v}_\nu^0$  也是已知的 ( $\nu=1, \dots, N$ )。求系統的运动和約束反力  $\mathbf{R}_\nu (\nu=1, \dots, N)$  ②。

如果除方程(1)、(2)而外, 关于約束的特征一无所知, 因而, 关于这些約束所产生的反力  $\mathbf{R}_\nu$  我們也就一无所知, 則前述問題将无法确定。因为在这种情况下, 需要确定的未知数  $x_\nu, y_\nu, z_\nu, R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z}$  多于現有的方程  $m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{\nu x} + R_{\nu x}, m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{\nu y} + R_{\nu y}, m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{\nu z} + R_{\nu z}$  和約束方程(1)、(2) ( $6N > 3N + d + g$ )。

为使动力学基本問題成为能够确定的, 对未知量就还需要有  $6N - (3N + d + g) = 3N - d - g = n$  个补充的独立关系式。若仅限于討論理想約束这一重要类型, 这些关系式是可以得到的。

若約束反力在任何虛位移上所作功的总和等于零, 即

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0, \quad (11)$$

則这种約束就称为理想約束。式(11)还可以写成如下的展开形式:

$$\sum_{\nu=1}^N (R_{\nu x} \delta x_\nu + R_{\nu y} \delta y_\nu + R_{\nu z} \delta z_\nu) = 0. \quad (11')$$

① 在一般情況下, (10)式右端除  $t$  而外还依賴于所有的  $\mathbf{r}_\mu$  和  $\mathbf{v}_\mu (\mu=1, \dots, N)$ 。

② 对于自由系統, 无需确定反力而仅需确定系統的运动。



在  $3N$  个量  $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$  中有  $n$  个是独立的 ( $n=3N-d-g$  是系统的自由度数)。因此, 在(11')式中可以将  $3N-n$  个不独立的增量  $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$  通过  $n$  个独立的增量表出。令这些独立增量的系数等于零, 就得到所短少的  $n$  个关系式。有了这些关系式非自由系统的动力学基本问题就成为确定的了。

在讨论了下面几个理想约束的例子之后, 就可以看出引入理想约束的必然性及其在实践上的重要性是很显然的。

**例题 1.** 质点沿固定光滑曲面运动(图 4)。

在这种情况下, 任何可能位移  $dr$  和任何虚位移  $\delta r$  都位于曲面过  $P$  点的切平面上, 而光滑曲面的反力则沿曲面过  $P$  点的法线方向; 因此, 恒有

$$Rdr=0 \text{ 或 } R\delta r=0.$$

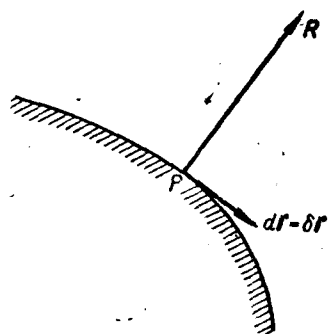


图 4.

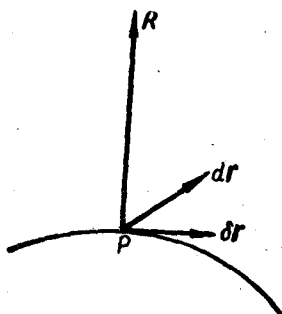


图 5.

**2.** 质点沿运动着的或形状变化着的光滑曲面运动(图 5)。

在这种情况下, 质点的可能速度不再位于切平面上, 因而无限小位移  $dr = vdt$  也不在切平面上(见第 7 页例 2)。但虚位移  $\delta r$  乃是当曲面“被阻止不动”或“被凝固不变”时的可能位移, 因而仍在切平面内。又由于光滑曲面在运动和变形的情况下反力还是沿曲面的法线方向, 所以  $R\delta r=0$  (但  $Rdr \neq 0$ )。

因此, 光滑曲面, 无论它是固定的, 还是运动的, 还是变形的, 都是理想约束。

例 2 很清楚地说明了在定义非平稳的理想约束时, 为什么必