数学

——它的内容、方法和意义——

第三卷

A.Д.亚历山大洛夫等著

科学出版社

数 学

——它的内容、方法和意义——

第三卷

A. Д. 亚历山大洛夫等著

王 元 万哲先 裘光明
孙从丰 田方增 刘紹学
吳品三 王雋驤 沈信耀 譯
李培信 江嘉禾

科 学 出 版 社

1962

А. Д. Александров и т. д.
Математика, её содержание, методы и значение
том 3
Издательство Академии наук СССР
Москва 1956

內容簡介

本書是苏联数学界普及数学知識的一部著名著作，全書共二十章，分三卷出版．本書各章都是由苏联科学院院士、通訊院士和第一流学者写成，有很高的科学水平．本卷共六章，其中講述了实变数函数論、綫性代数、抽象空間、拓扑学、泛函分析等．書內不仅叙述了近代数学的分支，还綜述了数学的历史发展及其在物理学和工程技术方面的应用．

本書第一卷与第二卷巳出版。第一卷內容如下：第一章数学概观；第二章数学分析；第三章解析几何；第四章代数-代数方程的理論。第二卷內容如下：第五章常微分方程；第六章偏微分方程；第七章曲綫和曲面；第八章变分法；第九章复变函数；第十章素数；第十一章概率論；第十二章函数逼近法；第十三章近似方法与計算技术；第十四章电子計算机。

数学

——它的內容、方法和意义——

第三卷

А. Д. 亚历山大洛夫等著

王元 万哲先 裘光明等譯

*

科学出版社出版（北京朝陽門大街 117 号）
北京市書刊出版業营業許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1962 年 5 月第一版 書号：2502 字数：282,000
1962 年 5 月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
（京）0001—9,900 印張：11

定价：1.40 元

目 录

第 三 卷

第十五章 实变数函数論

§1. 緒 論

在十八世紀末、十九世紀初的时候，微积分学已經基本上成熟了. 在这个时候(正确地說是十八世紀)，学者們开始建立它的各个分支，揭示了很多新而又新的事实，發展了微积分学在力学、天文学与技术科学方面的种种問題的日新月異的应用. 現在已經出現綜观所有获得的結果的可能性，使它們系統化并深入探究分析的基本概念的意义. 但在这个时候，已經可以看出来，分析基础本身并不是毫無問題的.

还在十八世紀，那时的大数学家关于什么是函数就沒有一致的見解，因此长期爭論着問題的这样与那样的解答，这样与那样的具体数学結果，弄不清究竟誰是正确的. 逐漸才知道了分析的另一些基本概念也需要进一步精确. 如果对什么是連續性及連續函数的性質是些什么，都沒有足够清晰的理解，那就常常会引起一系列錯誤的論断. 例如，認为連續函数总是可微的. 由于数学中已經处理着这样复杂的函数，以至于仅仅依憑直观与猜測已經是不可能的了. 因此，分析的基本概念的整理就成为燃眉之急了.

第一个在这方面認眞尝試的是拉格朗日，在他之后，柯西又走上了这条道路，柯西將直到今天还广泛运用的極限、連續性与积分的定义严格化了. 大約就在那个时候，捷克数学家波尔察諾也認眞地研究着連續函数的基本性質.

我們詳細地討論一下連續函数的一些性質. 命 $f(x)$ 是某个間隔 $[a,b]$（即滿足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有的点 x）上的連續函数. 如果在間隔的端点上，函数取異号的数值，那末在間隔

中間必定有一点，使函数的值为零。这件事在过去認为是显然的，現在这个命題已經得到了严格的論証。同样严格地証明了間隔上的連續函数必定在其上的某些点取自己的最大值与最小值。

連續函数的这些性質的研究，迫使人們深入地去探究实数的本性，因此就出現了实数的理論，而数軸的基本性質也得到了确切的表述。

数学分析的进一步發展，促使人們必須去研究愈来愈多的“坏”的函数，特别是間断的函数。例如，間断函数作为連續函数的極限而出現。早先，人們并不知道，極限函数是否連續。間断函数也在描繪突然改变的过程时出現，因此产生了一个新的問題——把分析的工具推广到間断函数上去。

黎曼研究了这样一个問題，即积分的概念可能推广到怎样的間断函数上去。由于所有这些奠定分析基础的活动，使一个新的数学分支——实变数函数論出現了。

如果古典数学分析是基于处理一些“好”的函数(例如連續函数和可微函数)，那么实变数函数論主要是处理更为广泛的函数类。如果在数学分析里对于連續函数給出了某些运算（例如积分）的定义，那么实变数函数論就以研究这样一些問題为特征，即这个定义可以应用于怎样的函数类，以及这个定义应該怎样改变，才能更为广泛。特别是，只有在实变数函数論里才能滿意地回答这样的問題，即什么是曲綫的長度？及对于怎样的曲綫，討論它的長度才有意义？

实变数函数論本身是建立在集合論的基础上的。

正由于这个原因，我們先叙述集合論的原理，然后轉入点集的討論，而以叙述实变数函数論的基本概念之一——勒貝格积分作为本章的結束。

§2. 集 合 論

人們經常需要考虑各种各样事物的集合，正如第一章(卷

1)所闡明的，这就引起了数的概念的产生，然后是集合的概念的产生；这是数学中基本而又簡單的概念之一，不能再加以精确的定义了。以下討論的目的，無非是要弄清楚集合是什么，而不必糾纏于它的定义。

不管按照什么特征或者依循什么規律結合起来的事物的总体都称之为集合。集合的概念是通过抽象化的途径而产生的。人們把任意东西的总和看成集合，是抽去了集合中各个东西之間的所有联系与关系，而仅仅保留了这些东西的个别特性。这样一来，由五个錢幣做成的集合与五个苹果做成的集合就完全不相同了。但是另一方面，圍成一个圓圈的五个錢幣做成的集合与一个个叠起来放的五个錢幣所做成的集合，則被看成是相同的。

我們試举几个集合的例子，例如，沙粒的集合，太陽系所有行星的集合，在給定的时間里，房子里所有的人的集合及一本書的全部書頁做成的集合。数学里也常常碰到各种各样的集合，例如，給定的方程所有的根的集合，全体自然数的集合及直綫上所有的点的集合等等。

研究集合不依賴于組成它的事物的特性的性质，即仅仅研究集合的一般性質的数学分支称之为集合論。这一分枝是在十九世紀末及二十世紀初才开始蓬勃發展起来的。德国数学家康脱 (G. Cantor) 是科学的集合論的奠基人。

康脫关于集合論的工作产生于三角級数收斂性問題的研究。由于具体数学問題的研究而引起非常抽象与普遍的理論的建立，已經是一种非常普通的現象了。这些抽象理論的意义在于它不仅与产生它的那个具体問題有联系，而且由于它对于另外一系列問題也有着应用。集合論也就是如此。集合的想法与概念已經浸透到所有的数学分枝，并且改变了它們的面貌，所以不熟悉集合論的原理就不可能对近代数学获得正确的理解。而集合論对于实变数函数論則有着特別巨大的作用。

假如对于任何东西，都可以知道它屬于集合或者不屬于集

合，那么集合就算被給出来了；换言之，集合是由所有屬于它的东西所完全确定的。如果集合 M 是由而且仅仅是由 a，b，c，…这些东西構成，那么就写成

$$M=\{a, b, c, \cdots\}.$$

組成任意集合的东西，通常称为它的元素。当一个东西 m 是集合 M 的元素时，就記作

$$m\in M.$$

讀做“m 屬于 M”或者“m 是 M 的元素”。如果有一个东西 n 不屬于集合 M，則記作 $n\bar{\in} M$。每一个东西只能是給定的集合的一个元素；换言之，一个集合中所有的元素彼此都是不同的。

集合 M 的元素，本身可以是集合。但是，为了避免矛盾起見，应該要求集合 M 本身不是組成它自己的一个元素，即 $M\bar{\in} M$。

不包含任何东西的集合称为**空集**。例如，方程

$$x^2+1=0$$

所有的实根組成的集合就是空集。以后我們用 θ 来表示空集。

对于两个集合 M 与 N，如果集合 M 的每个元素 x 同样也是集合 N 的元素，那么就說 M 含在 N 之中；M 是 N的一部分；M 是 N 的子集或者 N 包含 M。而記作

$$M\subseteq N \quad 或 \quad N\supseteq M.$$

例如集合 $M=\{1, 2\}$是集合 $N=\{1, 2, 3\}$的一部分。

显然 $M\subseteq M$ 恒成立。为了方便起見，我們把空集看作是任何集合的子集。

如果两个集合是由完全相同的元素構成的，那么就說这两个集合相等。例如，方程 $x^2-3x+2=0$ 所有的根的集合与集合$\{1, 2\}$是相等的。

我們来定义集合上的运算規律。

联或和 給出集合 M，N，P，…。集合

$$X=M+N+P+\cdots,$$

即由它的“被加数” M，N，P…的所有元素所組成的集合，称

为这些集合的联或和。但是，如果元素 x 屬于很多被加数，那么 x 只能归入和 X 一次。显然

$$M+M=M.$$

而且当 $M\subseteq N$ 时，有

$$M+N=N.$$

交 同时屬于所有的集合 M，N，P，…的那些元素的全体所組成的集合 Y，称为 M，N，P，…的交或这些集合的公共部分。

显然 $M\cdot M=M$。如果 $M\subseteq N$，則 $M\cdot N=M$。

如果集合 M 与 N 的交是空集，即 $M\cdot N=\theta$，則称这兩个集合不相交。

为了标記集合的和与交的运算，我們仍旧沿用記号 $\sum$ 与 Π。因此

$$E=\sum E_i$$

为諸集合 E_i 之和，而

$$F=\Pi E_i$$

为它們的交。

請讀者自己証明，集合的和与交服从普通的結合律

$$M(N+P)=MN+MP.$$

同样也服从規律

$$M+NP=(M+N)(M+P).$$

差 所有屬于 M 而不屬于 N 的元素所組成的集合 Z，称为兩个集合 M 与 N 的差：

$$Z=M-N.$$

如果 $N\subseteq M$，則差 $Z=M-N$ 也称为集合 N 关于 M 的补集。

不难証明，关系式

$$M(N-P)=MN-MP$$

与

$$(M-N)+MN=M$$

恒成立。

因此，集合上的运算規則与普通算术运算規則是完全不同的。

有限集合与無限集合　由有限多个元素組成的集合，称为有限集合。如果集合的元素的个数是無限的，那么这个集合就称为無限集合。例如全体自然数所組成的集合就是無限集合。

我們研究任意兩个集合 M 与 N，并且提出这样的問題，即这兩个集合的元素的数量是否一样。

如果集合 M 是有限的，那么它的元素的数量可以由某个自然数（即其元素的数目）来表达。在这种情形之下，为了比較集合 M 与 N 的数量，就只要計算一下 M 与 N 的元素的个数，然后比較一下所得到的这兩个数目就可以了。同样，假若集合 M 与 N 中，一个是有限的，另一个是無限的，那么很自然地可以認为無限集合包含着比有限集合更多的元素。

然而，如果兩个集合 M 与 N 都是無限集合，那末用簡單地計算元素的个数的方法是什么也得不到的。所以立刻引起这样的問題，即是否所有的無限集合的元素的数量都是一样的，或者是否存在元素数量互相不同的無限集合？假如后者是正确的，那么用什么方法可以比較無限集合的元素数量呢？我們就要討論这些問題。

一一对应　重新命 M 与 N 为兩个有限集合。如果不利用計算集合中元素的个数的方法，又如何来判断这兩个集合中那一个包含的元素更多一些呢？为此我們將要确定它的对应关系，即將 M 中的一个元素与 N 中的一个元素联結成一对。因此，假若 M 有任何一个元素在 N 中找不到它所对应的元素，那么显然 M 的元素較 N 为多。我們只要观察一些例子，就很清楚了。

假若大厅里有若干个人及若干把椅子。为了要知道哪样多一些，只要讓人們都去找座位。如果有人沒有位子坐，那么人就比椅子多。但是，假如所有的位子都有人坐上了，那么

人和椅子正好一样多。上面所講的比較集合元素的数量的方法比依次計算元素个数的方法有着無比的优越性。这是因为不需要特别的改变，这个方法就不仅能够用之于有限集合，而且可以用之于無限集合。

我們研究所有自然数的集合

$$M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$$

与所有偶数的集合

$$N=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}.$$

哪一个集合包含着更多的元素呢？一眼看去，似乎前者的元素更多些。然而，我們可以在这兩个集合的元素之間建立一对对的关系，如下表所示：

表 1

M	1	2	3	4	…
N	2	4	6	8	…

沒有任何 M 的元素，也沒有任何 N 的元素找不到它所对应的元素。我們也可以建立如下的对应关系：

表 2

M	1	2	3	4	5	…
N	—	2	—	4	—	…

因此M有很多元素找不到它所对应的元素。但是另一方面，我們也可以將对应关系确定为

表 3

M	—	1	—	2	—	3	—	…
N	2	4	6	8	10	12	14	…

現在 M 又有很多元素沒有对应的元素了.

因此，如果集合 A 与 B 是無限的，那么用不同的方法来建立对应关系，就得到完全不同的結果. 假如存在这样一个建立对应关系的方法，使 A 的每个元素与 B 的每个元素都有它所对应的元素，那么就說在集合 A 与 B 之間可以建立一一对应的关系. 例如，恰如表 1 所示，上面所考虑过的集合 M 与 N 之間，就可以建立一一对应的关系.

如果在集合 A 与 B 之間可以建立一一对应的关系，那么就說他們的元素有恒同数量，或者称它們同势. 如果用任何方法来建立对应关系，集合 A 中总有若干个元素沒有与之对应的元素，那么就說，集合 A 的元素比 B 多，或者 A 的势比 B 大.

因此，我們获得了上面提出的問題的解答，即如何比較無限集合的元素的数量. 然而这却一点也不能給另外一个問題以絲毫的回答，即是否存在不同势的無限集合？为了要回答这一問題，我們来研究某些簡單类型的無限集合.

可数無限集合 如果可以在集合 A 的元素与全体自然数所組成的集合

$$Z=\{1, 2, 3\cdots\}$$

的元素之間建立一一对应的关系，那么就称集合 A 是可数無限的. 換言之，假若集合 A 的元素可以用全体自然数来标記号碼，即可以將它写成叙列的形式

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

那么就說 A 是可数無限集合.

表 1 說明了全体偶数所組成的集合是可数無限的（前一列的数，現在被看成是它所对应的后一列各数的指标数）.

由上所述容易看出，最小的無限集合正是可数無限集合，即每一無限集合皆包含一个可数無限集合为其子集.

如果兩个非空的有限集合互不相交，那么它們的和的元素的个数比它們中的任何一个的元素个数都多，但对于無限集合，这个規律就可能不成立. 事实上，命 Y 是所有偶数所組成的

集合，H 是所有奇数做成的集合，而 Z 是全体自然数組成的集合。表 4 說明，集合 $Ч$ 与 H 都是可数無限集合。然而 $Z=Ч+H$ 仍然是可数無限集合。

表 4

$Ч$	2	4	6	8	…
H	1	3	5	7	…
Z	1	2	3	4	…

对于無限集合，“整体多于部分”这一法則被破坏了，这就表明無限集合有本質上異于有限集合的特性。从有限过渡到無限，完全符合了熟知的辯証法的規律——性質的質变。

現在我們来証明全体有理数所組成的集合是可数無限集合。为此我們將有理数排列成下表：

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
1	2	3	4	5	6	…
0	-1	-2	-3	-4	-5	…
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	…
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	…
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	…
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{8}{3}$	…
…	…	…	…	…	…	…

此处第一列按照大小遞升的次序安排了所有的自然数，第二列遵循遞降的順序安置着 0 及負整数，第三列又依照遞升的次序安放着分母为 2 的所有正的既約分数，第四列則又遵循着遞降的順序排列着分母为 2 的所有負的既約分数，如此等等。显然，每一有理数在这張表上都能够而且只能被找到一次，現在我們將这張表上所有的数都按箭头指示的方向，依次标以号碼。于是，所有的有理数都依次被安排成一个叙列如下：

有理数对应的指标数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
有　理　数	1	2	0	3	-1	$\frac{1}{2}$	4	-2	$\frac{3}{2}$	…

这样一来，在全体有理数与所有的自然数之間建立了一一对应，于是，全体有理数的集合是可数無限的。

連續統势的集合　假如可以在集合 M 的元素与間隔 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的全体点之間建立一一对应的关系，那么就称集合 M 具有連續統势。例如按照这个定义可知，間隔 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的点的集合本身，就具有連續統势。

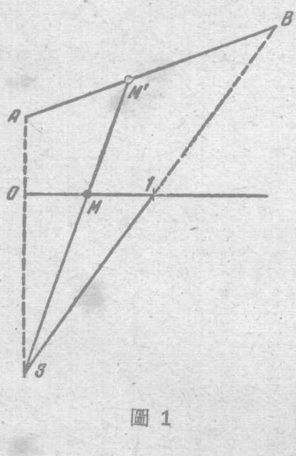

圖 1

由圖 1 可以看出，任何間隔 AB 的点的全体具有連續統势。由几何投影的方法，建立了它的点与間隔 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的点之間的一一对应关系。

不难証明，任何区間 $a<x<b$ 与直綫 $-\infty<x<+\infty$ 上所有点所組成的集合，都具有連續統势。

更为有趣的事情是正方形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 的点的集合有連續統势。因此，粗略地說，正方形中的点与間隔上的点“一样多”。

§3. 实　数[1)]

数的概念的發展已經在第一章(卷1)中詳細介紹过了，現在我們將粗略地介紹实数的理論. 这个理論是由于要建立分析的基本概念，在十九世紀产生的.

有理数　我們假定讀者已經熟悉有理数的基本性質. 这里我們只回忆一下这些性質，而不去詳細叙述它們. 有理数集合是由形如 m/n 的数所做成的数集，此处 m，n为整数，而 $n\neq 0$. 有理数有两个由一些規律（公理）所确定的运算（加法与乘法）. 以下用 $a,b,c,\cdots$来表示有理数.

Ⅰ. **加法公理**

1）$a+b=b+a$　（交換律）.

2）$a+(b+c)=(a+b)+c$　（結合律）.

3）方程

$$a+x=b$$

有唯一的解(存在逆运算).

由这些公理立刻可以看出，表达式 $a+b+c$ 有确定的意义. 存在有理数 0（零元素），使 $a+0=a$. 又存在加法的逆运算——减法，因而表达式 $b-a$ 是有意义的.

从代数的观点来看，对于加法的运算关系，全体有理数做成交換羣.

Ⅱ. **乘法公理**

1）$ab=ba$　（交換律）.

2）$a(bc)=(ab)c$　（結合律）.

3）方程

$$ay=b$$

当 $a\neq 0$ 时有唯一的解(存在逆运算).

由这些公理立即得知，表达式 abc 是有意义的，存在有理数 1 使 $a\cdot 1=a$. 又对于異于 0 的有理数，存在逆运算——除

1）写这段时，作者与闕尔莫果洛夫(А. Н. Колмогоров）作了有益的討論.

法．因此对于乘法运算来說，除0外的所有有理数做成交換羣．

Ⅲ．**分配律**

1） $(a+b)c=ac+bc$．

有理数满足所有的公理Ⅰ—Ⅲ．这說明了关于加法及乘法的运算关系来說，全体有理数組成一个所謂代数域．

Ⅳ．**艮序公理**

1） 对于任意两个有理数 a 与 b，下面三个关系中，有一个而且仅有一个成立：$a<b$，$a>b$ 或 $a=b$．

2） 若 $a<b$，$b<c$，則 $a<c$．

3） 若 $a<b$，則 $a+c<b+c$ （加法的不变性）．

4） 若 $a<b$ 与 $c>0$，則 $ac<bc$ （乘以 $c>0$ 的不变性）．

由于所有这些公理都滿足，所以我們称有理数集合为良序域．

除有理数外，还有其他事物的集合也满足这些公理，因而也是良序域．

我們还应該注意下面所講的有理数的两个重要性質：

稠密性 对于任何有理数 a 与 b，而 $a<b$，总可以找到有理数 c，使得 $a<c<b$．

可数性 全体有理数的集合是可数無限集合(見§2)．

量的度量 仅仅考虑量的度量这样一个重要的問題，就可以看出，对于数学的發展来說，仅仅有有理数是不足的．我們观察一个最簡單的例子，即間隔長度的度量問題．

考虑一条直綫．在直綫上确定了方向、原点(点O)及單位度量．这样一来，就确定了端点在$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$-\frac{2}{3}$等等的間隔 OA．一般說来，每一个有理数 a 都在直綫上对应一个点 A，即点 A 的座标 $x=a$．因此 a 就表示方向为 OA 的間隔的長度．然而用这个方法所定义的長度，并不是每一个間隔都是可以用某个(有理)数来度量的．例如，在古希腊时就已經熟知的，边長为單位的正方形的对角綫的长度，就不能用任何