# 离散数学基础

【美】C. L. Liu 著

刘振宏 译

人民邮电出版社

ELEMENTS OF
DISCRETE
MATHEMATICS

C. L. Liu

McGRAW-HILL BOOK COMPANY

1977

## 内 容 提 要

《离散数学基础》(Elements of Discrete Mathematics) 是美国大学的教科书，因为它需要的基础知识不超过高中数学的内容，所以也可供具备高中数学知识，希望学习离散数学的读者阅读。全书共有九章，内容包括离散数学中具有代表性的专题如集论、组合、图论和抽象代数等几方面。本书写得深入浅出、通俗易懂、例子生动有趣。各章最后都附有约40个习题和参考资料供读者学习参考。

本书适合理工院校师生和工程技术人员阅读，同时也可供具备高中数学知识的读者学习参考。

# 离 散 数 学 基 础

〔美〕C. L. Liu 著

刘振宏 译

*

人 民 邮 电 出 版 社 出 版
北京东长安街27号
北 京 丰 华 印 刷 厂 印 刷
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售

*

开本：787×1092 1/32　　1982年2月第一版
印张：12 24/32　页数：204　1984年6月北京第2次印刷
字数：293千字　　印数：16,001—31,000册

统一书号：15045·总2543-有5229

定价：1.30元

# 出 版 说 明

Liu Chung Laung 所著《离散数学基础》(Elements of Diecrete Mathematics)一书的翻译出版，可以供开设离散数学课程的学校师生作教材或数学参考书；同时也可以供希望学习离散数学的读者作自学读物。这本书写得比较通俗、易懂、深入浅出、并把比较抽象的数学概念用生动的饶有趣味的举例与工程学中的问题联系起来，读者只要具备高中数学知识就可以阅读。

学习数学离不开演算习题，为了读者学习和参考，便于自学，我们约请 复旦大学李为鑑、胡美琛；上海工业大学刘永才；上海科技大学邱伟德等同志，把本书全部 326 个习题作了题解，将单独出版。为使本书和题解一书所使用的名词术语和符号一致，我们请《离散数学基础题解》的作者，对《离散数学基础》一书的译稿做了统一校阅。

人民邮电出版社

# 译 者 序

这是一本研究离散对象的数学基础书。目前，我国工科院校的高等数学课程的内容一般都是以连续对象为基础的。然而随着现代科学技术的发展，特别是计算机的广泛使用，愈来愈多地要求学生掌握和研究离散对象的数学工具，离散数学就是在这样的历史条件下产生的。Liu Chung Laung 先生所著的«离散数学基础» 一书，集中地介绍了集论，组合，图论，抽象代数等几方面的内容，这是在离散数学范畴中具有代表性的几个专题，其中某些内容仅在理科大学的某些专业课程中讲授，还有一些内容至今还没有引起人们的广泛重视。虽然国内外论述离散数学的专题的著作不少，但都比较抽象难懂，而且与工程技术领域联系不多。本书则与此相反，尽管所涉及的数学内容很抽象，但作者通过大量生动的举例和深入浅出的叙述，说明了有关专题的丰富实践背景。其中有些是历史上著名的数学问题，还有许多是现代科技领域中广泛应用的实例。这对提高学习兴趣和帮助理解概念，无疑是十分有益的。

本书写得通俗易懂，语言生动，实例较多，相信读者不仅可学到有用的数学工具，而且也能提高描述和解决数学问题的能力。本书适合于理工院校与离散信息处理有关专业的师生及工程技术人员阅读，同时也可作为大学应用数学及计算机专业的教学参考书。由于本书所要求的基础知识没有超过高中数学基础的水平，所以它也可供具有高中文化水平的读者阅读。

由于译者水平所限，译文中难免出现错误和不当之处，欢迎读者批评指正。

# 序

本书是集论、组合、图论和代数中一些专题的选编。我认为，所选的这些专题对于应用数学、计算机科学及工程等专业的学生来说，是基本的、有用的。本书是为离散数学专业的二、三年级学生写的教科书。由于书中并未要求超出高级中学的任何基础数学知识，所以也可以用作一年级大学生的教本。如果进度较快的话，一学期可以讲完本书的材料，如果进度较慢，完全可以删去某些专题。带星号的那些节可以删去，而并不破坏内容的连贯性。

本书是根据我在(Urbana-champaign)伊利诺斯大学计算机科学系教学时所写的讲义编写成的。我希望，本书不仅是我在课程中讲了些什么的记录，而且也是我在课堂上怎样讲这些材料的反映。我力求严格、准确地描述数学概念，同时避免用繁杂的形式体系和记号。一般说来，如果我不能在后面用有效的方式说明定义和事实的应用，那么我就不提它们。因此，本书完全可能遗漏了某些重要的定义和事实。不过我相信，当学生们需要这些定义和事实时，他们完全能够在别的书中查找到。我试图用一种引人入胜的方式，给学生讲些有用的数学，我希望教会他们，怎样用数学解决实际生活中的某些重要问题。而且我希望学生们不仅在课堂上学到些非常有用的数学工具，而且还提高他们理解、描述和解决数学问题的能力，主要由于时间的考虑，我没有把算法直接写成计算机的程序，但是我尽力用算法的观点来处理一些课题。最后我希望，我个人的某些

观点和爱好，在某种程度上能与使用本书的教师所共享。

我感谢系主任詹姆斯(James N. Synder)对我的鼓励与支持；感谢默里(Murray Edelberg)、珍妮(Jane W. S. Liu)和安德鲁(Andrew H. Sherman)仔细地阅读了本书的手稿；感谢唐纳德(Donald K. Friesen)为“教师手册”的编辑作出的贡献；还要感谢爱德华(Edward M. Ringold)和弗朗西斯(F. Frances Yao)对本书提出了很多好建议。几年前，我有机会参加计算数学对数学的影响专门小组的工作，这个小组是“美国数学协会大学数学大纲委员会”组织的。我从小组关于离散数学的教学讨论中，得到很多教益，在此对小组的成员深表谢意。我还要感谢格伦纳(Glenna Gochenour)、康妮(Connie Nosbisch)、裘迪(Judy Watkins)和琼妮(June Wingler)，他们对本书的打印和出版给予了很大帮助。最后对凯思琳(Kathleen D. Liu)在本书的索引编辑工作中给予的帮助表示感谢。

这本书与几年前我写的“组合数学导引”一书之间有些重叠，在某些情况下，我沿用了相当接近于“组合数学导引”一书的表达方式。

C. L. Liu

# 目　录

# 集合和命题 1

## 1.1 引言

本书的主题是研究离散对象及其相互关系的。**离散对象**这个术语是相当一般的概念，它包含大量各式各样的项目，例如：人、书、计算机、晶体管、计算机程序等等。在日常生活以及技术工作中，我们经常要涉及到这些项目。如语句："这个房间里的人是计算机科学专业二年级的学生"、"我买的所有书都是查尔斯(A. B. Chanles)写的侦探小说"以及"我们要选购一台适合于科学和商业两用的、价格不超过＄200,000的计算机"。我们希望从所涉及的各种不同类型的离散对象中，抽象出某些基本概念，同时对涉及到的概念规定某些共同的专门术语。

当我们注意到上述三个语句都有某种共同"东西"时，这就明显地暗示了这种抽象是完全可能的。具体地说，在第一个语句里，我们谈到的人有两种属性：一是计算机科学专业的，二是二年级的学生。在第二个语句中，所谈到的书也有两种属性：是侦探小说，是查尔斯写的。而第三个语句中所谈到的计算机则具有三种属性：一是适合于科学上使用，二是适合于商业上使用，三是价格不超过＄200,000。换一种方式来表达，在

第一个语句中，我们把该大学里所有计算机科学专业的学生看作一组，把所有二年级的学生看作另一组，那么我们谈到的学生是同时属于这两个组的。其次，在第二个语句中，把所有的侦探小说列为一类，而把查尔斯写的小说列为另一类，则我们谈到的书是同时属于这两类的。最后，在第三个语句中，把适合于商业上使用的计算机作为一类，把适合于科学上使用的计算机当作一类，而把价格不超过＄200,000的计算机当作第三类，那么我们要选购的计算机是同时属于这三类的。

这些例子说明，在许多情况下，我们涉及到研究对象的某些类别，而要讨论的对象同时属于所有的类别。类似地，人们立即想到，也有的时候我们所考虑的对象只属于这些类别的某一类。例如语句，“我要会见所有讲德语或法语的学生”。这儿所考虑的学生，或者属于讲德语的那一组学生，或者属于讲法语的那一组学生。

下面我们开始介绍初等集合论里的一些基本术语和概念。

一个集合就是一些不同对象的总体。因此，这个大学里所有二年级学生的总体就是一个集合，而这个大学里的计算机科学专业的所有学生也构成一个集合。同样地，计算机科学专业的所有二年级学生也是一个集合。我们用符号$\{a, b, c\}$表示由对象$a$、$b$和$c$组成的集合。集合中的对象也称为集合的**元素**或**成员**。通常我们也给集合起个名字，例如，我们写成$S=\{a, b, c\}$，它表示集合$S$是对象$a$、$b$和$c$的总体。因此，我们提到集合$S$就象提到集合$\{a, b, c\}$一样。另一个例子是

计算机科学专业二年级学生

$$=\{\text{Smith, Jones, Wong, Yamamoto Vögeli}\}$$

(集合{Smith, Jones, Wong, Yamamoto, Vögeli}的名字是计算机科学专业二年级学生。这个名字相当长，读者会希望另外

起个名字，如 $S$ 或 $CS$。然而，用长的名字在概念上是没有错误的。我们用记号 $a\in S$表示，$a$是集合 $S$ 的元素，在这种情况下，我们也可以说集合 $S$ 包含元素 $a$。用记号 $d\notin S$ 表示 $d$ 不是集合 $S$ 的元素，在这种情况下，我们也可以说集合 $S$ 不包含元素 $d$。因此，在上述例子里，Jones$\in$计算机科学专业二年级学生，而 Kinkaid$\notin$计算机科学专业二年级学生。

注意，一个集合仅包含不同的元素，因此，$\{a, a, b, c\}$ 是集合$\{a, b, c\}$的一种累赘的表示。类似地，{“子夜访问者”，“子夜访问者”，“失踪的证人”，“114 大街”} 是查尔斯著的侦探小说的累赘表示。人们可能要问：如果查尔斯写的侦探小说“子夜访问者”在一个图书馆里确有两本，那将怎样表示呢？在这种情况下，集合{“子夜访问者”，“失踪的证人”，“114大街”}是图书馆里查尔斯著的侦探小说的不同书名的集合，而{“子夜访问者—1”，“子夜访问者—2”，“失踪的证人”，“114 大街”}则是图书馆里查尔斯著的侦探小说的集合，其中“子夜访问者—1”是子夜访问者的第一本复本，“子夜访问者—2”是子夜访问者的第二本复本。注意这两本书在后一集合中是两个不同的元素。

还要注意，集合中的元素没有任何方式的顺序。因此 $\{a, b, c\}$和$\{b, a, c\}$表示同一个集合。以后还要介绍有序集的概念。

上面介绍了，描述集合的成员的一种方法是把集合的所有元素全部都列出来。在很多情况下，当一个集合的元素有一些共同的性质时，我们可以用表明集合中元素独特性质的方法来描述集合中的成员。例如，$S=\{2,4,6,8,10\}$。我们也可以说：$S$ 是不大于 10 的所有正偶数的集合。对于集合$\{2,4,6,8,10\}$可以用下述记号表示

$$S=\{x \mid x \text{ 是不大于10的正偶数}\}$$

一般地，我们用记号

$$\{x \mid x \text{ 具有某些性质}\}$$

表示具有某些共同性质的对象所组成的集合。因此

$$S=\{\text{Smith, Jones, Wong, Yamamoto, Vögeli}\}$$

和

$$S=\{x \mid x \text{ 是计算机科学专业二年级学生}\}$$

是同一个集合的两种不同的描述方式。

应该指出，我们的集合定义并未排除不包含元素的集合存在的可能性。不包含元素的集合通称为**空集**，记作$\emptyset$。(根据我们规定的记号：用括号括起集合的所有元素，因此，也可以用$\{\ \}$表示空集)。例如，用$S$表示1924年出版的查尔斯的侦探小说集合，倘若查尔斯生于1925年，那么显然$S$就是空集。

注意，我们对集合的元素未加任何限制，因此，$S=\{$Smith，“子夜访问者”，“CDC-6600”$\}$是一个确定的集合，其中Smith(人)，“子夜访问者”(书名)和“CDC-6600”(计算机)之间似乎毫无共同之处，但是这并不妨碍他们都是同一集合的元素。我们还要指出，某些集合完全可能是另一个集合的成员。例如，集合$\{\{a,b,c\},d\}$包含两个元素$\{a,b,c\}$和$d$，而集合$\{\{a,b,c\},a,b,c\}$则包含四个元素$\{a,b,c\}$，$a,b$和$c$。美国参议院里所有的委员会的集合，可以表示为$\{\{a,b,c\},\{a,d,e,f\},\{b,e,g\}\}$，其中集合的每一个元素都是一个委员会，而每个委员会自身也是一个集合，其成员是该委员会的参议员。类似地，$\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$是三个不同元素$a,\{a\}$和$\{\{a\}\}$所组成的集合。另外，集合$\{\emptyset\}$只包含一个元素—空集，而集合$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$包含两个元素——一个是空集，另一个是以空集为其唯一元素的集合。

给定两个集合$P$和$Q$，如果$P$的每个元素也是$Q$的元素，

那么$P$就称为$Q$的**子集**，记作$P\subseteq Q$。例如，集合$\{a,b\}$是集合$\{y,x,a,b,c\}$的子集，但它不是集合$\{a,c,d,e\}$的子集。所有计算机科学专业二年级学生的集合是所有二年级学生集合的子集，也是计算机科学专业所有学生集合的子集。另一方面，所有计算机科学专业学生的集合不是所有二年级学生集合的子集。令$A=\{a,b,c\}$和$B=\{\{a,b,c\}, a,b,c\}$，我们注意到，$A\in B$及$A\subseteq B$确有可能同时成立。作为进一步的例子，请读者验证下述结论。

对于任意集合$P$，$P$是$P$的子集。

空集是任何集合的子集。

集合$\{\emptyset\}$不是集合$\{\{\emptyset\}\}$的子集。

如果两个集合$P$和$Q$包含相同的元素，则$P$和$Q$就称为**相等的**。例如，两个集合：

$P=\{x\mid x$ 是不大于 10 的正偶数$\}$

$Q=\{x\mid x=y+z$，其中$y\in\{1,3,5\}$，$z\in\{1,3,5\}\}$是相等的。还有一种绕弯的说法：如果$P$是$Q$的子集，而$Q$也是$P$的子集，则说两个集合$P$和$Q$相等。稍后将看到，某些时候，这是确定两个集合相等的方便方法。

令$P$是$Q$的子集，假如$P$不等于$Q$，即$Q$中至少存在一个元素不在$P$内，那么我们就说$P$是$Q$的**真子集**。例如，集合$\{a,b\}$是集合$\{y,x,b,c,a\}$的真子集。我们用记号$P\subset Q$表示$P$是$Q$的真子集。

## 1.2 集合的组合

现在我们来说明，如何用各种方式来组合集合，以产生出新的集合。例如，令$P$是上“计算理论”课的学生集合，$Q$是上

“音乐欣赏”课的学生集合。如果在“计算理论”班和“音乐欣赏”班分别宣布同一通知，那么知道这个通知消息的学生集合是什么呢？显然，这个集合是由上“计算理论”课或上“音乐欣赏”课或者同时上这两门课的学生组成。又如果这两门课程安排在同一时间进行期终考试，那么参加这两门课考试发生冲突的学生集合又是什么呢？显然，该集合就是同时攻读这两门课的学生集合。为了使这些概念公式化，我们定义集合的併与交。两个集合 $P$ 和 $Q$ 的併是一个集合，其元素恰好是 $P$ 的元素或者 $Q$ 的元素（或者同时是 $P$ 和 $Q$ 的元素），并记作 $P\cup Q$*。例如，

$$\{a, b\}\cup\{c, d\}=\{a, b, c, d\}$$

$$\{a, b\}\cup\{a, c\}=\{a, b, c\}$$

$$\{a, b\}\cup\emptyset=\{a, b\}$$

$$\{a, b\}\cup\{\{a, b\}\}=\{a, b, \{a, b\}\}$$

两个集合 $P$ 和 $Q$ 的交也是一个集合，记作 $P\cap Q$，其元素恰好是同属于 $P$ 和 $Q$ 的元素。例如

$$\{a, b\}\cap\{a, c\}=\{a\}$$

$$\{a, b\}\cap\{c, d\}=\emptyset^{**}$$

$$\{a, b\}\cap\emptyset=\emptyset$$

如果 $P$ 的元素用某一共同性质来描述，而 $Q$ 的元素用另一共同性质来描述，那么 $P$ 和 $Q$ 的併是至少具有这两个共性之一的那些元素所组成的集合。而 $P$ 和 $Q$ 的交，则是同时具有这两种共性的元素所组成的集合。根据定义 $P\cup Q$ 和 $Q\cup P$ 表示同一个集合。同样，$P\cap Q$ 和 $Q\cap P$ 也表示同一个集合。

---

* 第八章之前不打算引进代数运算的概念，所以此时把 $P\cup Q$ 只作为一个集合的名字。

** 如果两个集合的交是空集，则称这两个集合是不相交的。

一般地，$k$ 个集合 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 的併也是一个集合，记作 $P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k$，它恰好包含 $P_1$ 的元素，$P_2$ 的元素，$\cdots$ 和 $P_k$ 的元素。类似地，$k$ 个集合 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 的交也是一个集合，记作，$P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_k$，它恰好包含同时属于 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 的那些元素。例如，一个大学的全体大学生的集合是一年级大学生的集合、二年级大学生的集合、三年级大学生的集合和四年级大学生的集合的併。四年级毕业学生的集合，是四年级学生的集合、具有累计学分不小于 144 的学生集合和平均分数级别不低于 $C$ 的学生的集合的交。

设 $P$ 表示读“计算理论”的学生集合，$Q$ 表示读“音乐欣赏”课的学生集合，而 $R$ 表示有 AB 血型的学生集合。假定在“计算理论”班和“音乐欣赏”班里，宣布一紧急通知，要求 AB 血型的人献血，我们要确定听到紧急通知后，可以献血人的集合。因为 $S = P \cup Q$ 是听到紧急通知的学生集合，而 $R \cap S$ 是听到紧急通知又能献血的人的集合。用 $P \cup Q$ 代替 $S$，我们可以直接写成 $R \cap (P \cup Q)$，其中圆括号用作分界以免混淆。注意，听到紧急通知可以献血人的集合，是下述两个集合的併：一个是“计算理论”班里的 AB 血型的学生集合，另一个是“音乐欣赏”班里的 AB 血型的学生集合，即 $(R \cap P) \cup (R \cap Q)$。此例有力地指出，对任意的集合 $P$、$Q$、$R$，集合 $R \cap (P \cup Q)$ 和集合 $(R \cap P) \cup (R \cap Q)$ 是相等的。下面我们证明确实是如此。

首先证明 $R \cap (P \cup Q)$ 是 $(R \cap P) \cup (R \cap Q)$ 的子集。这只要证明 $R \cap (P \cup Q)$ 的每一个元素也是集合 $(R \cap P) \cup (R \cap Q)$ 的元素就行了。令 $x$ 是集合 $R \cap (P \cup Q)$ 的任意一个元素，$x$ 必在 $R$ 里，并且也必在 $P$ 里或者 $Q$ 里。如果它在 $P$ 里，则 $x$ 在 $R \cap P$ 里；如果 $x$ 在 $Q$ 里，则 $x$ 在 $R \cap Q$ 里。总之 $x$ 在 $(R \cap P) \cup (R \cap Q)$ 里，从而推出 $R \cap (P \cup Q)$ 是 $(R \cap P) \cup (R \cap Q)$ 的