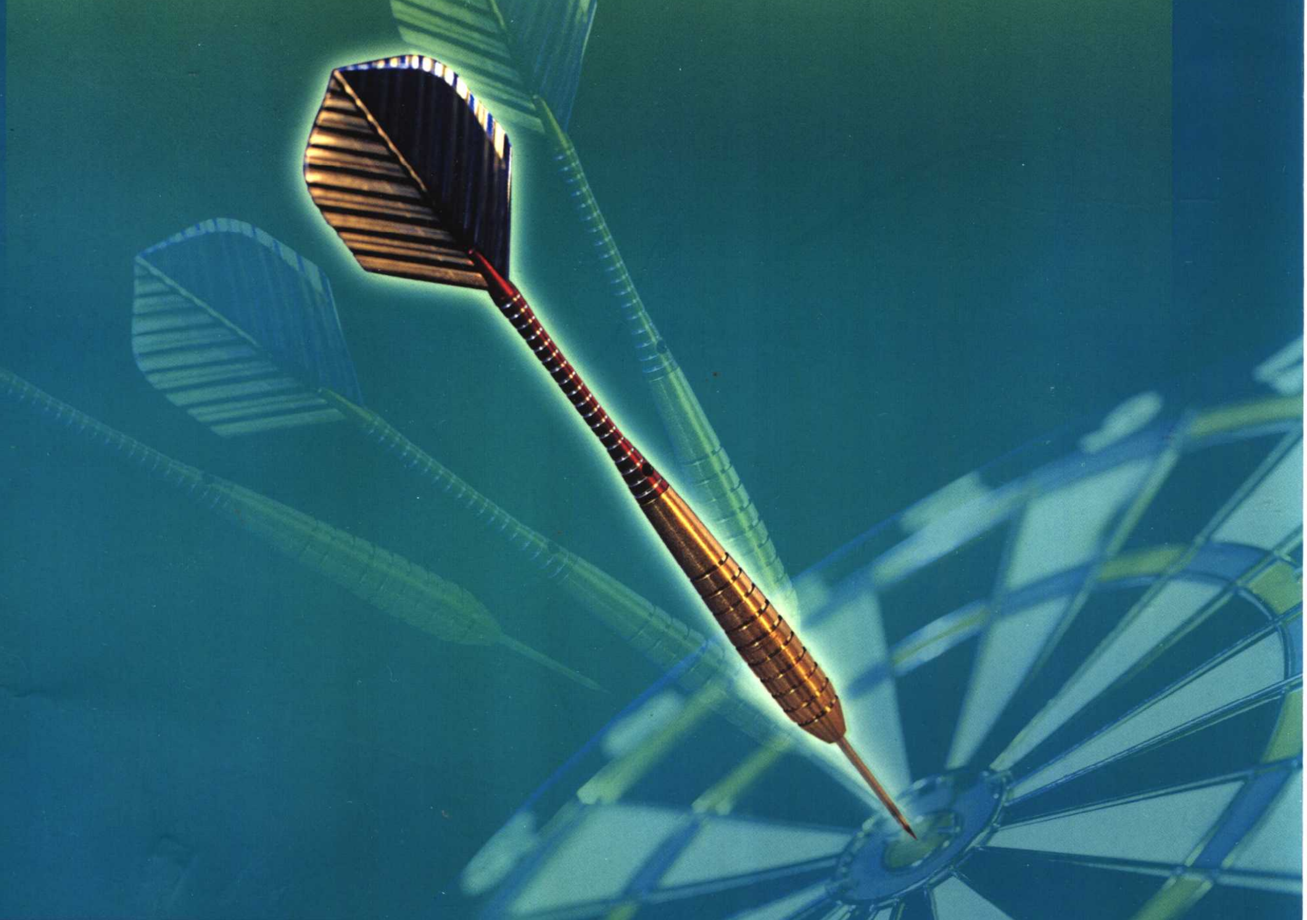
计算机专业考研指导丛书

离散数学

考点精要与解题指导

胡新启 编著



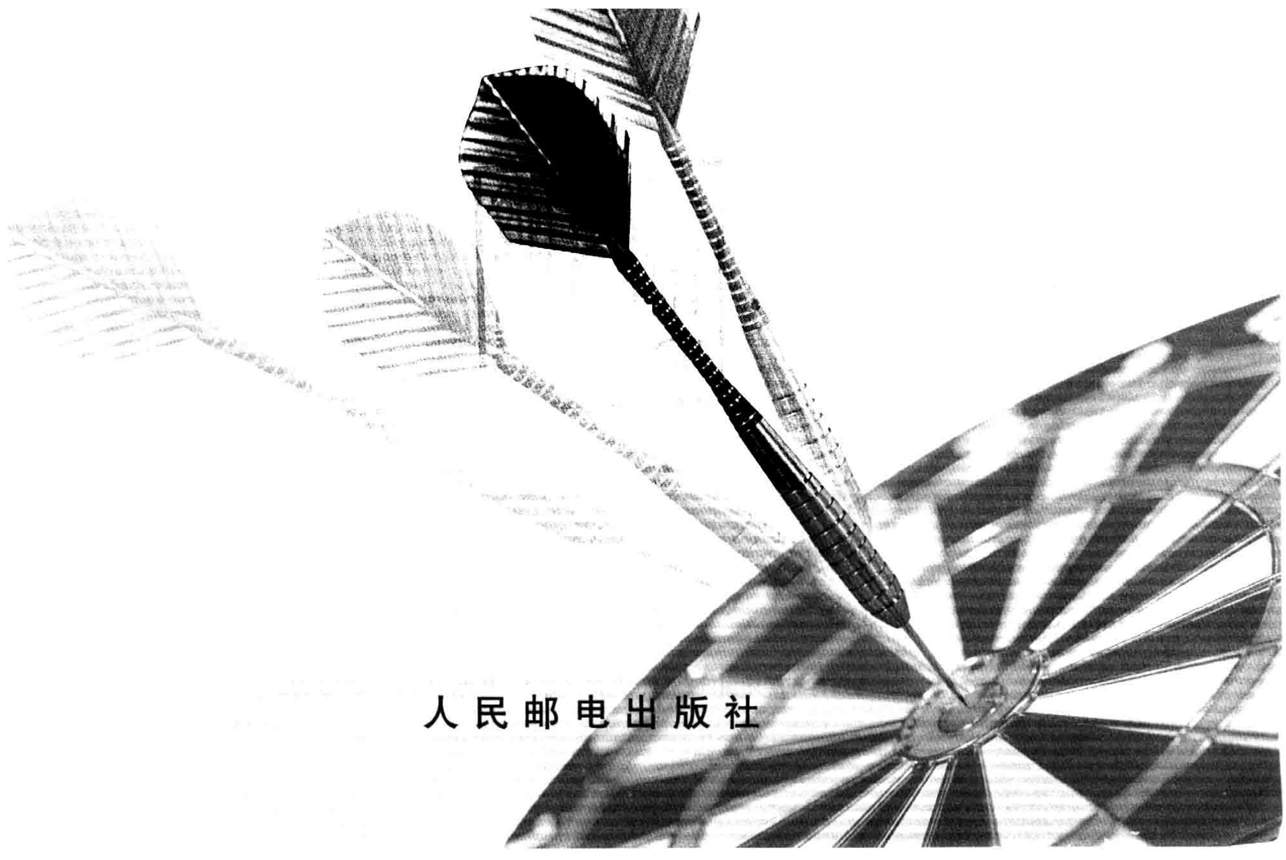
人民邮电出版社
POSTS & TELECOMMUNICATIONS PRESS

计算机专业考研指导丛书

离散数学

考点精要与解题指导

胡新启　编著



人民邮电出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学考点精要与解题指导/胡新启编著. —北京：人民邮电出版社，2002.9
（计算机专业考研指导丛书）
ISBN 7-115-10491-3

I. 离… II. 胡 III. 离散数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 061676 号

计算机专业考研指导丛书

离散数学考点精要与解题指导

◆ 编　　著　胡新启
　责任编辑　邓革浩
　执行编辑　贾鸿飞

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www. ptpress.com.cn
　读者热线　010-67180876
　北京汉魂图文设计有限公司制作
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
　新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：14
　字数：335 千字　　2002 年 9 月第 1 版
　印数：1-6 000 册　　2002 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN7-115-10491-3/TP · 3000

定价：20.00 元

本书如有印装质量问题，请与本社联系 电话：（010）67129223

内容提要

“离散数学”课程是计算机专业的一门核心课程，也是很多高校招收计算机专业研究生考试的科目之一。

本书是针对考研者编写的，书中高度概括和总结了离散数学的基本考点，收集了大量的研究生入学考试试题并给出了分析和解答。全书共分为 9 章，其内容包括：集合论、二元关系、函数、代数系统、格、图论、树、命题逻辑和谓词逻辑。每章由 3 部分构成，即考点精要、例题解析、自测题及参考答案。考点精要部分高度概括了本章考试内容及注意要点；例题解析部分详尽地解答了精选的考研试题，各题都包含有相关知识、例题分析和例题答案；自测题及参考答案收集了大量的相关试题并给出了相应的参考答案。

本书的特点是概念准确，文字简洁明了，解题思路清晰，极便于考研者短时间内掌握解题要点，提高考试成绩。

本书适合于考研者应试复习，同样也适合于作为大专院校各专业离散数学课程的复习参考书，还可供计算机软件水平考试者和参加计算机等级考试者研习。

丛书序

计算机专业是当今最热门也是发展最迅速的学科之一，很多学生为了进一步提高专业水平和应用能力，纷纷报考计算机专业研究生。据统计，近几年报考计算机软件与理论、计算机应用和计算机与通信专业硕士研究生的考生远远超过报考其他专业的考生，其中有相当一部分考生原来所学专业并非计算机专业，还有很多考生是工作多年的在职人员。为了方便报考者复习计算机专业课程，我们特地组织一批计算机专业教学第一线的教授和副教授（其中大多数编写者多年参加硕士研究生入学试题命题工作）编写了本丛书。本丛书包含如下课程：

- 《C 程序设计考点精要与解题指导》
- 《离散数学考点精要与解题指导》
- 《数据结构考点精要与解题指导》
- 《操作系统考点精要与解题指导》
- 《编译原理考点精要与解题指导》
- 《计算机组成原理考点精要与解题指导》

本丛书具有以下特点：

◎ 讲述全面而详实

本丛书涵盖各门专业课程的内容，不是针对个别学校的命题特点，而是充分地讲授课程中的重点、难点和考点，并通过例题进行扩充与深化，使读者得以全面温习，不留“死角”。

◎ 阐述简洁而明了

不同于本、专科教材，本丛书的目的是使考生花较少的时间温习各门课程的内容，因此，不过多地解释简单的术语，只对基本知识点进行高度概括和总结，使读者将主要精力花在解题过程上。

◎ 重点突出解题思路

本丛书重点介绍解题的方式和方法，不仅授人以“鱼”，更在于授人以“渔”，选择的例题和习题大多是计算机专业研究生入学考试试题（题目前标有“★”号），并配上详解，具有很强的实战性。

◎ 强调内容的综合与提高

一般的教科书多是按照内容的先后顺序按步就班地介绍，这种方式有助于初学者学习，但不便于复习和综合，因为考研题一般都具有很强的综合性，往往一个题涉及好几章的概念，所以本丛书打破了一般教科书的教学模式，将相关的概念有机地融为一体，从而提高考生的解题能力。

◎ 答疑解惑

本丛书选择的例题和习题大部分具有较高的难度，书中不仅给出了答案，而且详细介绍了解题思路和解题过程，有助于考生纠正以往的概念误区。

本丛书希望在考研指导方面作一些探索和尝试，起到抛砖引玉的作用，书中的不妥之处敬请广大的读者和同行指教。

李春葆

2002.6

前　言

从2003年起，全国研究生入学考试由原来的5门课程改为政治、外语、基础和专业基础等4门课程。作为计算机专业的一门重要的专业基础课程——“离散数学”，其重要性在考研中日益显现。当前，摆在广大考生面前的问题是：如何在短期内，迅速拓展知识广度和知识深度。选择一本优秀的教辅材料将是十分重要而且必要的。

本书作者长期从事《离散数学》教学工作，多次参加《离散数学》研究生入学考试命题及阅卷，编者还收集了重点高校，如北京大学、南京大学、复旦大学、上海交通大学、东北大学、上海大学、西安交通大学、武汉大学、武汉水利电力大学、北京航空航天大学、北京理工大学、大连理工大学、重庆大学、华中理工大学及中科院计算所、软件所等近几年来的考研真题，掌握了大量的一手资料。在此基础上，针对考生们普遍感到的离散数学内容多，繁杂、枯燥的特点，从所有资料中围绕考研大纲，全面、系统地精选出重点、难点，既在理论上加以阐述，又在解题思路上加以引导，书中出现的标有★的即为考研真题。

全书包含4个部分：集合论、代数系统、图论和数理逻辑。按教学大纲，从内容上共分9章：第1章集合论，讨论了集合的定义、运算及相关运算性质、幂集、笛卡尔积，基本计数原理等；第2章关系，讨论了关系的定义及表示、关系的运算（复合与求逆）、关系的基本类型、关系的闭包、等价关系、相容关系等；第3章函数，讨论了函数的定义，复合函数和反函数及集合的基数；第4章代数系统，主要给出了代数系统的定义用性质，半群、群及子群、陪集等的定义和性质及其判定等；第5章格，讨论了格的两种等价定义，几种特殊的格、布尔代数等；第6章图论，讨论了图的基本定义、图的连通性及图的矩阵表示、最短路径、欧拉图和哈密顿图、二分图、图的着色等；第7章树，讨论了树的几种等价定义，根树、最小生成树、最优二元树等；第8章命题逻辑，讨论了命题及其符号化、命题公式及其真值、范式、重言式与自然推理；第9章谓词逻辑，讨论了谓词逻辑命题的符号化，谓词公式及其真值，前束范式、重言蕴涵式与推理规则等。

赵迎媛女士对本书的文字润色及部分章节的编写做了实质性的工作，并承担了全书的打印录入这一烦琐而辛苦的任务，在此表示深深的谢意。

作者是在多年讲授《离散数学》课程的教学积累基础上编写本书的，虽竭尽全力，但由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

读者若有问题或需要考研试题请与作者联系，联系方式：huxinqifox@163.com。

目　录

第1章 集合论

基本知识点：集合的表示与集合的基本运算、划分与覆盖、集合的笛卡尔积。

重点：幂集的确定、集合间的运算性质、序偶。

难点：集合的对称差、容斥原理、集合间关系的确定。

1.1 考点精要

1.1.1 集合的基本概念及表示

1. 集合的定义及常用记号

集合是没有给出精确定义的基本的数学概念，通常用大写英文字母表示集合，如 A，B，X 等，用小写英文字母表示元素，如 a, b, x 等。若 a 是集合 A 中的元素（或成员），则称 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；用 $x\notin X$ 表示元素 x 不在集合 X 中。当 $a_1\in A, a_2\in A, \cdots, a_n\in A$ 时，常简写为 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in A$。

集合由它的元素所决定，集合中的元素具有确定性、无重复性、无序性及抽象性等特点。

经常用到的几个集合有：

N　自然数集（有的教材用 N 表示正整数集，用 P 表示非负整数集，即是自然数集）

Z　整数集（有的教材用 I 表示整数集）

Q　有理数集

R　实数集

C　复数集

不含任何元素的集合称为**空集**，用 $\varnothing$（或 $\{\}$）表示。在所讨论的问题中，所涉及到的全体对象构成的集合称为**全集**，通常用 U（或 E）表示。空集是惟一的，但全集只能是相对惟一的，而非绝对惟一的。

集合中元素的个数可以是有限的，也可以是无限的，前者所对应的集合称为**有限集**，后者所对应的集合称为**无限集**。若 A 是有限集，则用 $|A|$ 记为 A 中元素的数目，也称为集合的基数，也记为 $\#(A)$ 或 $\mathrm{card}(A)$ 或 $\kappa(A)$。无限集的基数在第3章讨论。显然有：$|\varnothing|=0$。

2. 集合的表示

常用的表示集合的方法有列举法和描述法两种。

列举法是列出集合的所有元素，如 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$。

描述法是将集合中元素应当满足的条件描述出来，如：$B=\{n^2\mid n\in N\}$，$C=\{x\mid x\in R, 且 -1<x<1\}$ 等。

上面两种表示法中，列举法适用于元素不太多或元素的规律比较明显简单的情况，而描述法刻画了集合中元素的共同特征。

1.1.2 子集、集合的相等

集合的包含与相等是集合间的两种基本关系，也是集合论中的两个基本概念。

定义 1.1 设有 A,B 两个集合，若 B 中的每个元素都是 A 中的元素，称 B 是 A 的**子集**，也称 B 被 A 包含，或 A 包含 B，记为 $B\subseteq A$ 或 $A\supseteq B$。若 B 是 A 的子集，且 A 中至少有一个元素不属于 B，则称 B 为 A 的**真子集**，记为 $B\subset A$ 或 $A\supset B$，称为 B 真包含于 A。

按子集的定义，显然有：$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$。

据定义有：

$$B\subseteq A\Leftrightarrow \forall x\in B,\text{有}x\in A。\tag{1.1}$$

由此可得出：$B\not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x_0\in B, x_0\notin A$。

注意区分 $\subseteq$ 与 $\in$。例如：

$\{a\}\not\subseteq\{\{a\},b\}$，但 $\{a\}\in\{\{a\},b\}$。

$\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a\}\}$，但 $\{a,b\}\notin\{a,b,\{a\}\}$。

$A\in B$ 表示集合 A 是集合 B 的一个元素；$A\subseteq B$ 表示 A 中的每个元素都是 B 中的元素。$\in$ 是一个最基本的概念，$\subseteq$ 由 $\in$ 定义而得。

定义 1.2 若两集合 A 与 B 包含的元素相同，称 A 与 B **相等**，记作：$A=B$。也解释为：若 A 是 B 的子集且 B 是 A 的子集，称 A 与 B 相等，即

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\text{且}B\subseteq A。\tag{1.2}$$

这一定义很重要，我们很多时候证明两个集合相等都使用这一定义，即判定两个集合互为子集。

若 A 与 B 不相等，则 $B\not\subseteq A$ 和 $A\not\subseteq B$ 至少有一个发生。

注意　$\{a\}\neq\{\{a\}\}$，两个集合中元素不同，一个是 a，另一个是 $\{a\}$

由定义可知：空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集（当然也是 $\varnothing$ 的子集）；任一集合 A 是它自身的子集，称集合 A 的子集 $\varnothing$ 和 A 为 A 的平凡子集；任何集合都是全集的子集。

1.1.3 集合的运算及其性质

1. 集合的基本运算

给定集合 A 和 B，可以通过集合的并 $\cup$、交 $\cap$、相对补 $-$、绝对补 $-$、对称差 $\oplus$ 等运算产生新的集合，这也是表示集合的一种方法。

定义 1.3 任意两集合 A 与 B 的**并**是一个集合，它由所有至少属于 A 或 B 之一的元素所构成，记为 $A\cup B$。

任意两集合 A 与 B 的**交**是一个集合，它由所有属于 A 且属于 B 的元素所构成，记为 $A\cap B$。

任意两集合 A 与 B 的**差**是一个集合，它由所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成，记为

$A-B$（或 $A\setminus B$），也称为 B 相对 A 的补集。

任意两集合 A 与 B 的**对称差**（也称为环和）是一个集合，它由所有属于 A 不属于 B 和属于 B 不属于 A 的元素所构成，记为 $A\oplus B$（有的教材记为 $A\Delta B$）。

集合 A 的**补集**是一个集合，它由所有不属于 A 的元素所构成，记为 $\overline{A}$（或 $\sim A$、A^c、A' 等），也称为 A 的绝对补集。

对任意两集合 A 与 B，若 $A\cap B=\varnothing$，即 A 与 B 没有公共的元素，则称 A 与 B 是**不相交**的。

由以上定义，有：

$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$；

$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}$；

$A-B=\{x\mid x\in A\text{且}x\notin B\}$；

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$；

$\overline{A}=\{x\mid x\in U\text{且}x\notin A\}$。

2. 文氏图

集合之间的相互关系和运算可以用文氏图（John Venn）形象描述，它有助于我们理解相关问题，有时对解题也很有帮助。它的优点是形象直观、易于理解，缺点是理论基础不够严谨，因此只能用于说明，不能用于证明。

在文氏图中，用矩形代表全集 U，矩形内部的每一个点均为全集中的元素，用（椭）圆或其他闭曲线代表 U 的子集，其内部的点表示不同集合的元素，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示。图 1-1 中各图表示集合间的关系。图 1-2 中各图表示 5 种基本运算，阴影（斜线）部分表示经过相应运算得到的集合。

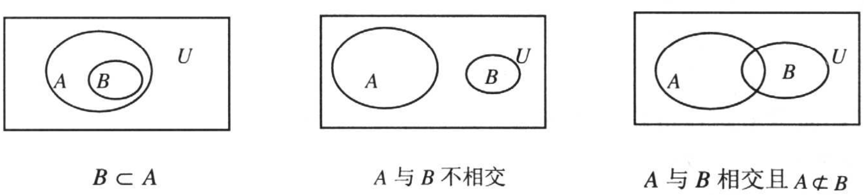


图 1-1

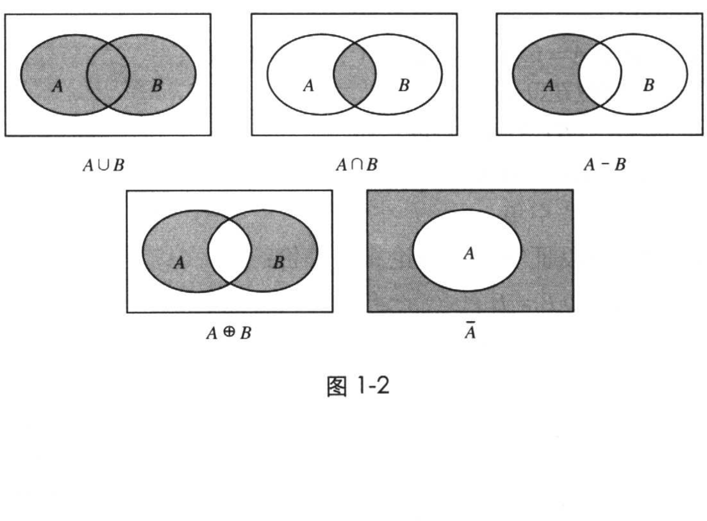


图 1-2

3. 运算的基本性质

集合的运算具有下面一些基本性质：

定理 1.1 对于全集U的任意子集A,B,C，有如表 1-1 所示的性质（在不同教材中，下面的运算律的名称可能有所不同）。

表 1-1

幂等律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
交换律	$A\cap B=B\cap A$	$A\cup B=B\cup A$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap U=A$
零律	$A\cup U=U$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
双补律	$A\cup\overline{A}=U$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
德摩根律 (De Morgan)	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$	$A\cup(A\cap B)=A$
对合律		$\overline{\overline{A}}=A$

除了上面的性质外，关于集合的差与对称差，还有下面一些性质。

定理 1.2 设A,B,C为任意集合，有

（1） $A-B=A\cap\overline{B}$；

说明：我们通常用此式将差运算转化为其他的集合运算。

（2） $A-B=A-(A\cap B)$；

（3） $A\cup(B-A)=A\cup B$；

（4） $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$；

（5） $A\oplus B=B\oplus A$；

（6） $A\oplus\varnothing=A$； $A\oplus A=\varnothing$； $A\oplus U=\overline{A}$； $A\oplus\overline{A}=U$；

（7） $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$；

（8） $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$；

说明：但$A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$不一定成立，如：$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a\}$，$C=\{b\}$，则等式右边为空集，但左边非空集。

借助于已知的结论，可以证明下面结论相互等价：

①$A\subseteq B$； ②$A\cup B=B$； ③$A\cap B=A$； ④$\overline{B}\subseteq\overline{A}$；

⑤$A-B=\varnothing$； ⑤$A\cap\overline{B}=\varnothing$； ⑥$\overline{A}\cup B=U$。

4 广义并和广义交

两个集合的并和交可以推广到n个集合的并和交：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\text{；}\quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\text{。}$$

上面定义中若$n=1$，则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1$，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1$。

并和交的运算还可推广到无穷集合的情形，设J为一非空指标集，有

$$\bigcup_{j\in J} A_j = \{x \mid \exists j_0 \in J, x \in A_{j_0}\}\text{；}\quad \bigcap_{j\in J} A_j = \{x \mid \forall j \in J, x \in A_j\}\text{。}$$

定义 1.4　若集合A的元素都是集合，则把A的所有元素的元素组成的集合称为A的**广义并**，记作$\cup A$；把A的所有元素的公共元素组成的集合称为A的**广义交**，记作$\cap A$。

取广义交时，要求$A \neq \varnothing$，否则$\cap A = U$。

广义并和广义交具有下面性质：

对集合的集合A和B，有

（1）若$A \subseteq B$，则$(\cup A) \subseteq (\cup B)$；

（2）若$A \subseteq B$，则$(\cap B) \subseteq (\cap A)$，其中$A$和$B$非空；

（3）$\cup(A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$；

（4）$\cap(A \cup B) = (\cap A) \cap (\cap B)$，其中$A$和$B$非空。

1.1.4　集合的幂集

定义 1.5　设A是一集合，A的所有子集构成的集合称为A的**幂集**，记为$P(A)$（或$\rho(A)$、2^A），即　$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$。

根据幂集的定义，因为$\varnothing \subseteq A$，$A \subseteq A$，所以：

（1）$\varnothing \in P(A)$；　　　　（2）$A \in P(A)$。

对于幂集，若A是有限集，则有：$|P(A)| = 2^{|A|}$。

对于幂集，还有下面的结论：

定理 1.3　对任意集合A，B，有

（1）若$A \subseteq B$，则$P(A) \subseteq P(B)$；反之，若$P(A) \subseteq P(B)$，则$A \subseteq B$。

（2）若$A = B$，则$P(A) = P(B)$；反之，若$P(A) = P(B)$，则$A = B$。

（3）$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$；

（4）$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$；

（5）$P(A - B) \subseteq (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\}$；

（6）$\cup(P(A)) = A$。

1.1.5　笛卡尔积

称$<a,b>$为由元素a和b组成的有序对（或序偶），其中a为第一元素，b为第二元素，a，b可以相同（有的教材也将此有序对表示为(a,b)）。

有序对具有这样的性质：

$$<x,y> = <u,v> \Leftrightarrow x = u, y = v\text{。}$$

定义 1.6 设 A，B 为两集合，取 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素，构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称为 A 与 B 的笛卡尔积（也称为直积或叉积），记作 $A\times B$，即 $A\times B=\{<a,b>|a\in A,b\in B\}$。

由上面定义可知：若 A 和 B 有一个为空集，则 $A\times B=\varnothing$，且一般来说，$A\times B\neq B\times A$。

推广上面概念，可以用 n 元组定义 n 阶笛卡尔积：

若 $n>1$ 为自然数，而 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合，它们的 n 阶笛卡尔积记作 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，并定义为：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<x_1,x_2,\cdots,x_n>|x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

注意　根据定义，一般情况下，有 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。

关于笛卡尔积，有下面几条性质：

定理 1.4　对任意集合 A,B,C，有

① $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$；

② $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$；

③ $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$；

④ $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$；

⑤ $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$；

⑥ $(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$；

⑦ 若 $C\neq\varnothing$，则 $A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C\Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$；

⑧ 若 A,B,C,D 非空，则 $A\times B\subseteq C\times D$ 的充要条件是 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$。

注意　上面的结论⑦在条件 $C\neq\varnothing$ 不满足时，其推论不一定成立。

关于有限集合的基数，有下面一些结论（假定下面出现的集合均为有限集合）：

（1）$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$；

（2）$|A\cup B|\leq|A|+|B|$；

（3）$|A\cap B|\leq\min\{|A|,|B|\}$；

（4）$|A-B|\geq|A|-|B|$；

（5）$|A\oplus B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$。

1.1.6 集合的覆盖与划分

定义 1.7 设 A 是非空集，称 Π 是集合 A 的划分（也称为分划），若 Π 是 A 的非空子集的集合，即 $\Pi=\{A_\alpha\mid A_\alpha\subseteq A,A_\alpha\neq\varnothing\}$，满足：

① $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing,\alpha\neq\beta$；

② $\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha=A$。

定义 1.8 非空集 A 的一个覆盖 C 是 A 的非空子集的集合，即

$C=\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \neq \varnothing\}$，满足：

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = A \text{。}$$

若 $C=\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \neq \varnothing\}$ 是集合 A 的一个覆盖，且 C 中任意元素不是其他元素的子集，则称 C 是 A 的完全覆盖。

集合的覆盖与划分的区别在于覆盖不要求各个子集两两之交集为空。

1.1.7 基本计数原理

1. 鸽巢原理（抽屉原理）

定理 1.5 把 $n+1$ 个物体放入 n 个盒子里，则至少有一个盒子里有两个或两个以上的物体。

推广的鸽巢原理：

定理 把 n 个物体放入 m 个盒子里，则至少有一个盒子里至少有 $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor+1$ 个物体。

这里 $\lfloor x \rfloor$ 表示小于等于 x 的最大整数，如 $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$。

2. 容斥原理

有限个有限集合的并仍是有限集合，容斥原理刻画了有限个有限集合的并集与各有限集合之间在元素个数上的联系。容斥原理在实际中有着广泛应用。

最简单情形：

定理 A,B 均为有限集，则有 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$；

有 3 个集合时，容斥原理的表现形式为：

定理 A,B,C 均为有限集，则有

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$$

一般情形为：

定理 1.6 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n\,(n\geq 2)$ 均为有限集，则有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

利用归纳法可以证明定理 1.6，留作习题。

推论

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|=|U|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$$

$$=|U|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n}|A_1\cap\cdots\cap A_n|$$

1.2 例题解析

计算机专业研究生入学考试题中经常出现关于集合的证明题或判断题，读者可借助集合运算的性质得出结论。

例 1.1 对任意集合 A,B,C，确定下述论断的真假：

A．若 $A\in B$，$B\subseteq C$，则 $A\in C$；

B．若 $A\in B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

C．若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\in C$；

D．若 $A\subseteq B$，$B\in C$，则 $A\subseteq C$。

【相关知识】 元素与集合之间的相互关系、集合与集合间的相互关系。

【例题分析】 由于集合的性质，集合中元素是抽象的，也可以是集合，从而可证明或通过举例说明结论的正确与否。

【例题答案】 A 是正确的，由集合与集合之间的关系及集合与元素之间的关系直接可得。

可以举例说明 B，C，D 均是不正确的，如：

对选项 B，取 $A=\{1\}$，$B=\{\{1\}\}$，$B=C$。

对选项 C，取 $A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{\{1\}\}$。

对选项 D，取 $A=B=\{1\}$，$C=\{\{1\}\}$。

例 1.2 设 A,B,C 是集合，求下列各式成立的充分必要条件。

（1）$(A-B)\cup(A-C)=A$；

（2）$(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$；

（3）$(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$；

（4）$(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$。

【相关知识】 集合的运算性质。

【例题分析】 借助于集合运算的性质简化等式。

【例题答案】

（1）因 $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=A-(B\cap C)$，故当 $A-(B\cap C)=A$，即 $B\cap C\subseteq\overline{A}$ 时，上式成立；上面推导可以反过来，故 $B\cap C\subseteq\overline{A}$ 为（1）成立的充分必要条件。

（2）要使 $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$ 成立，即 $A-(B\cap C)=\varnothing$，故当 $B\cap C\supseteq A$ 时（2）成立；

（3）因 $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=A-(B\cup C)$，要使 $(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$ 成立，得 $A\subseteq B\cup C$ 时（3）成立；

（4）$A\oplus B=\varnothing$ 的充要条件是：$A=B$。事实上，由 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$，等价于 $A-B=\varnothing$ 且 $B-A=\varnothing$，等价于 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，等价于 $A=B$，可得 $A\oplus B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$。对本题，有 $A-B=A-C$。

例 1.3 证明：$(A-B)-C=A-(B\cup C)=(A-C)-B=(A-C)-(B-C)$。

【相关知识】 集合运算性质。

【例题答案】 由集合差运算的等价定义 $X-Y=X\cap\overline{Y}$，有

$$(A-B)-C=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

$$A-(B\cup C)=A\cap(\overline{B\cup C})=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

$$(A-C)-B=(A\cap\overline{C})\cap\overline{B}=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

$$(A-C)-(B-C)=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{B\cap\overline{C}})=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{B}\cup C)$$

$$=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C}\cap C)=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup\varnothing=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

故有：$(A-B)-C=A-(B\cup C)=(A-C)-B=(A-C)-(B-C)$。