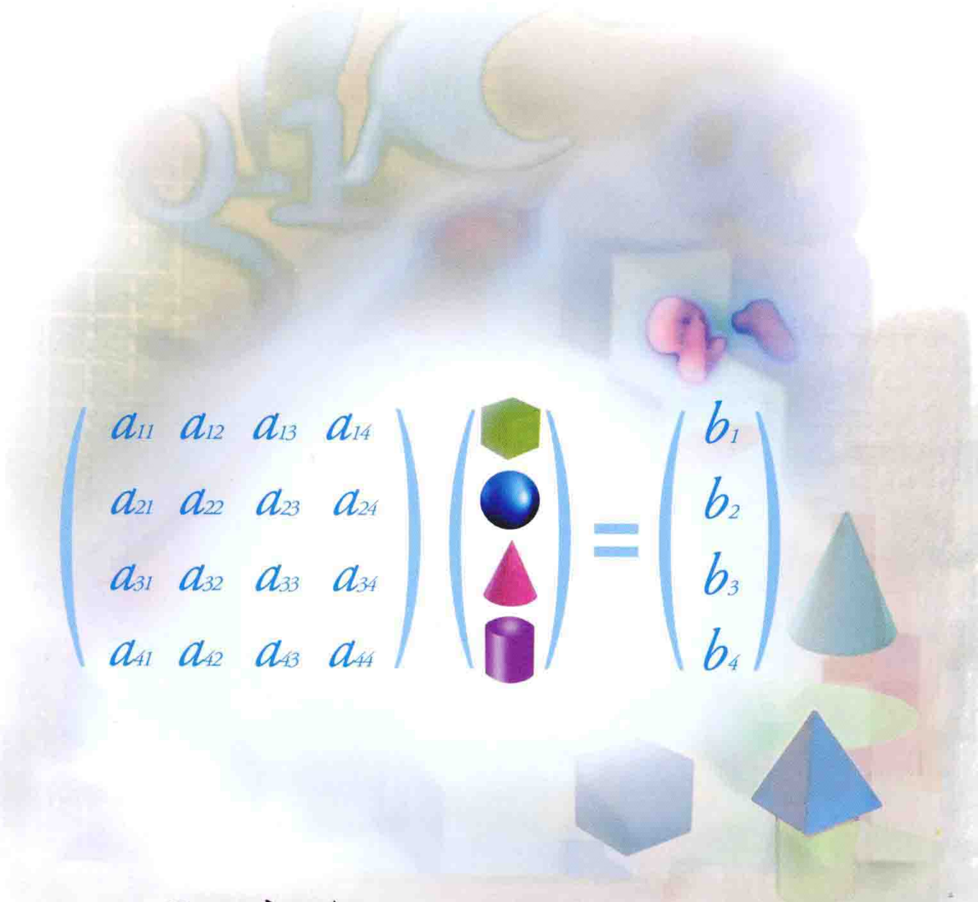
21世纪高等院校数学规划系列教材

主编 肖筱南

线性代数

XIANXING DAISHU

许振明 周牡丹 周小林 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪

高等院校数学规划系列教材 / 主编　肖筱南

线性代数

许振明　周牡丹　周小林　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/许振明，周牡丹，周小林编著. —北京：北京大学出版社，2014.8
(21世纪高等院校数学规划系列教材)
ISBN 978-7-301-24665-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①许… ②周… ③周… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第189404号

书　　　名：**线性代数**
著作责任者：许振明　周牡丹　周小林　编著
责 任 编 辑：曾琬婷　潘丽娜
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-24665-8/O·0996
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　　新浪官方微博：@北京大学出版社
电 子 信 箱：zpup@pup.cn
电　　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62767347　出版部62754962
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
　　　　787mm×980mm　16开本　12.5印张　220千字
　　　　2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷
印　　　数：0001—3000册
定　　　价：28.00元

内容简介

本书是"21世纪高等院校数学规划系列教材"之《线性代数》.它是根据教育部颁发的《本科理工科、经济类数学基础教学大纲》,并在总结编者多年讲授线性代数课程经验的基础上,精心编写而成的.

全书共分六章,内容包括:行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的特征值与特征向量、二次型等.本书取材适当、叙述清楚、逻辑清晰、深入浅出、简明易懂、难点分散、重点突出,便于教学与自学.每章的最后都设置了"综合例题"一节,希望通过对各种典型且综合性较强的例题的剖析,进一步开阔读者的解题思路,提高读者的综合解题能力,

本书每节均配有习题,每章也配有题型多样的复习题.对每道习题与复习题,书末均附有参考答案;对大部分的"证明题"给出了提示或证明思路;对难度较大的"计算题",除了给出结果的参考答案,还给出计算过程提示,目的是为了给使用本书的读者提供更多的帮助信息.

本书可以作为高等院校理工科、经济类各专业本科学生学习线性代数的教材;同时,由于所配置的各章复习题,题型多样,且具有一定的代表性,因而本书也适合有志于考研的学生,作为考研的参考书之用.

“21世纪高等院校数学规划系列教材”编审委员会

“21世纪高等院校数学规划系列教材”书目

高等数学(上册)	林建华等编著
高等数学(下册)	林建华等编著
微积分	曹镇潮等编著
线性代数	许振明等编著
新编概率论与数理统计(第二版)	肖筱南等编著

前 言

随着我国高等教育改革的不断深入，根据2009年教育部关于要求全国高等学校认真实施本科教学质量与教学改革工程的通知精神，为了更好地适应21世纪对高等院校培养复合型高素质人才的需要，北京大学出版社计划出版一套对国内高等院校本科大学数学课程教学质量与教学改革起到积极推动作用的“21世纪高等院校数学规划系列教材”. 应北京大学出版社的邀请，我们这些长期在教学第一线执教的教师，经过统一策划、集体讨论、反复推敲、分工执笔编写了这套教材，其中包括：《高等数学(上册)》《高等数学(下册)》《微积分》《线性代数》《新编概率论与数理统计(第二版)》.

在结合编写者长期讲授本科大学数学课程所积累的成功教学经验的同时，本套教材紧扣教育部本科大学数学课程教学大纲，紧紧围绕21世纪大学数学课程教学改革与创新这一主题，立足大学数学课程教学改革新的起点、新的高度狠抓了教材建设中基础性与前瞻性、通俗性与创新性、启发性与开拓性、趣味性与科学性、直观性与严谨性、技巧性与应用性的和谐与统一的“六突破”. 实践将会有力证明，符合上述先进理念的优秀教材，将会深受广大学生的欢迎.

本套教材的特点还体现在：在编写过程中，我们按照本科数学基础课要“加强基础，培养能力，重视应用”的改革精神，对传统的教材体系及教学内容进行了必要与精心的调整和改革，在遵循本学科科学性、系统性与逻辑性的前提下，尽量注意贯彻深入浅出、通俗易懂、循序渐进、融会贯通的教学原则与直观形象的教学方法. 既注重数学基本概念、基本定理和基本方法的本质内涵的辩证、多侧面的剖析与阐述，特别是对它们的几何意义、物理背景、经济解释以及实际应用价值的剖析，又注意学生基本运算能力的训练与综合分析问题、解决问题能力的培养，以达到便于教学与自学之目的；既兼顾教材的前瞻性，注意汲取国内外优秀教材的优点，又注意到数学基础课与相关专业课的联系，为各专业后续课程打好坚实的基础.

为了帮助各类学生更好地掌握本课程内容，加强基础训练和基本能力的培养，本套教材紧密结合概念、定理和运算法则配置了丰富的例题，并做了深入的剖析与解答. 每节配有适量习题，每章配有复习题或综合例题，以供读者复习、巩固所学知识；书末附有习题答案与提示，以便读者参考.

本套规划系列教材的编写与出版，得到了北京大学出版社及厦门大学嘉庚学院的大力支持与帮助，刘勇副编审与责任编辑曾琬婷、潘丽娜为本套教材的出版付出了辛勤劳动，在

此一并表示诚挚的谢意.

本书第一、二章由许振明编写,第三、四章由周牡丹编写,第五、六章由周小林编写.全书由肖筱南制定编写计划,并负责最后审稿、定稿.

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正!

编　者

2014 年 3 月

目　　录

第一章 行列式

行列式是伴随着线性方程组的求解而发展起来的基本数学工具，在线性代数、多项式理论和微积分中都有着重要的应用. 本章将着重介绍行列式的定义、性质、计算及其在线性方程组求解中的简单应用，为后续章节的学习打下必要的基础.

§1.1 矩　　阵

由于行列式是对某一种特殊矩阵定义的一种运算，因此在介绍行列式之前，我们先介绍一下矩阵的基本概念和一些特殊的矩阵.

一、矩阵的概念

矩阵其实是现实生活中随处可见的纵横排列的二维数据表. 矩阵在其他学科和生产实践中有着许多应用，比如密码学、数字图像处理、模式识别、电阻电路、人口流动、医疗监控数据处理、组织管理、质量管理、文献管理等等.

定义　由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的数表，称为一个 **m 行 n 列矩阵**，也称为 **$m\times n$ 矩阵**，简称为**矩阵**. 为了表示它是一个整体，通常加上一个中括号或圆括号，并用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等来表示它，记做

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵的**元素**，位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 称为矩阵的 **(i,j) 元**，记为 $(\boldsymbol{A})_{ij}$.

上面矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 (i,j) 元为 a_{ij}，即 $(\boldsymbol{A})_{ij}=a_{ij}$. 以后也可以用 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 表示这种以 a_{ij} 为 (i,j) 元的一般矩阵，用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 表示一个 m 行 n 列矩阵.

元素均为实数的矩阵称为**实矩阵**，元素中含有复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书研究的均为实矩阵，以后就不再特别强调.

元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记做 $\boldsymbol{O}$. m 行 n 列零矩阵也记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

行数和列数均为 n 的矩阵称为 **n 阶矩阵**或 **n 阶方阵**(简称**方阵**)，记做 $\boldsymbol{A}_n$. 方阵在矩阵中具有特殊且重要的地位，下面先介绍几种特殊的方阵.

二、特殊方阵

1. 对角矩阵

在方阵中，从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为**副对角线**. 而主对角线以外的元素均为 0 的方阵称为**对角矩阵**，形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中主对角线上的元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 也可以是 0. 由于对角矩阵的特征，上述对角矩阵也简记做

$$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}).$$

注意 对角线上的元素不管是不是 0，均需按顺序出现在对角矩阵简记的括号中.

2. 数量矩阵

把主对角线上的元素均相同的对角矩阵称为**数量矩阵**.

3. 单位矩阵

把主对角线上的元素均为 1 的数量矩阵称为**单位矩阵**，记做 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$(有的教材也记做 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$). 单位矩阵在整门线性代数课程中有着重要的应用，要把单位矩阵跟矩阵中所有元素均是 1 的全 1 矩阵区分开来.

4. 上三角矩阵和下三角矩阵

主对角线下方的元素均为 0 的方阵称为**上三角矩阵**，而主对角线上方的元素均为 0 的方阵称为**下三角矩阵**，它们分别形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

显然，对角矩阵既是上三角矩阵，又是下三角矩阵.

5. 对称矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**. 例如，矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

就是一个 3 阶对称矩阵.

6. 反对称矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**. 在条件 $a_{ij}=-a_{ji}$ 中，当 $i=j$ 时，即有 $a_{ii}=-a_{ii}$，从而 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$，即反对称矩阵主对角线上的元素均为 0. 例如，矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

就是一个 3 阶反对称矩阵.

以上 6 种特殊的 n 阶方阵在今后的学习中将陆续遇到，因此要做到了然于胸.

§1.2 行列式的定义

对于方阵有一种重要的运算，即行列式(注意：只有方阵才有行列式这种运算).

在高中时，大家都接触过 2 阶行列式，并知道 2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

从中我们可以看出，2 阶行列式是对 2 阶矩阵定义的一种运算，而且运算的结果是一个数值. 那么，对于任意 n 阶的行列式又是怎么定义的呢？这是我们这一节将要讨论的内容.

一、行列式的定义

设 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**，记做 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$（有时候也用英文单词“determinant”的首字母 D 来表示行列式），它是对 n 阶方阵定义的一种运算，运算的结果是一个数值.

注意 矩阵是一个数表，用中括号或圆括号括起来，行列式是一个数值，用两条竖线围起来，两者是完全不同的东西，因此符号不能用错.

为了给出 n 阶行列式的具体定义，我们先来介绍两个基本概念：余子式和代数余子式.

定义 1 在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式中，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素去掉，剩下的元素按原来的顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记做 M_{ij}. 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

注意 其中符号项 $(-1)^{i+j}$ 中的 i 和 j 分别为元素 a_{ij} 当前所在的行和列，并不一定是元素当前的下标，因为后面我们学了行列式的性质之后，就可以对行列式进行变换，变换后元素所在位置和它的下标就不一定一致了.

例 1 求 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ 第 2 行所有元素的余子式和代数余子式.

解 $M_{21}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=-6,\quad M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-10,\quad M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=12;$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=6,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-10,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-12.$$

有了余子式和代数余子式的概念，就可以给出 n 阶行列式的递推定义了.

定义 2 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $|\boldsymbol{A}|$ 定义如下：

当 $n=1$ 时，1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，假设 $n-1$ 阶行列式已经定义过，则 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(1\leqslant i\leqslant n). \tag{1}$$

(1)式也称为行列式按行展开的展开式，可以表述为：行列式等于某一行的所有元素和它们对应的代数余子式的乘积之和. 它是计算行列式的手段之一. 其中 i 的取值为 1 到 n 之间的任意一个数，说明行列式按哪一行展开均可以，结果都一样. 通过行列式的展开式可以

把一个 n 阶行列式的计算转化成 n 个 $n-1$ 阶行列式的计算，以此类推，直到最后全部转化成 1 阶行列式（具体计算中，到 2 阶即可），从而达到计算行列式的目的.

例 2 计算例 1 中的 3 阶行列式.

解 根据行列式按行展开的展开式和例 1 的结论，可得

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$= 3\times 6 + (-1)\times(-10) + (-2)\times(-12)$$
$$= 52.$$

读者可以自己验证一下，按第 1 行或第 3 行展开的结果是不是也是 52.

因为行列式中，行和列的地位是相同的（这一点我们将在下一节进行说明），所以行列式定义的最后一步又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{2}$$

(2)式称为行列式按列展开的展开式，可以表述为：行列式等于某一列的所有元素和它们对应的代数余子式的乘积之和. 其中 j 的取值为 1 到 n 之间的任意一个数，说明行列式按哪一列展开均可以，结果都一样，而且和按行展开的展开式计算出的结果也一样.

例 3 将例 1 中的行列式按第 3 列展开.

解 $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$
$$= 1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-2)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$
$$+ (-3)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 22 + 24 + 6 = 52.$$

显然，利用行列式的展开式对行列式进行计算的时候，应该挑选含 0 最多的行或列进行展开，以减少计算量. 行列式中若有一行或一列均为 0，则行列式的值等于 0.

二、对角线法则

对角线法则是一个用于记住 2 阶和 3 阶行列式定义结果的方法，它本身不是定义，且对 4 阶和 4 阶以上的行列式不适用. 在**对角线法则**中，主对角线和平行于主对角线方向上的元

素用实线相连,线上元素的乘积冠正号,副对角线和平行于副对角线方向上的元素用虚线相连,线上元素的乘积冠负号,则所得各乘积的代数和刚好与 2 阶或 3 阶行列式的定义结果吻合.

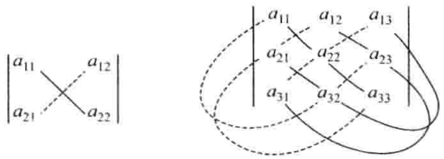
根据行列式的定义,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

上述结果可分别利用对角线法则记忆为



三、三角行列式

上三角矩阵和下三角矩阵的行列式分别称为**上三角行列式**和**下三角行列式**,它们统称为**三角行列式**.

根据行列式的展开式可以得到几个三角行列式的值,这些结果是后面计算行列式的重要依据,因而在此特别给出.

对于上三角行列式,一直按第 1 列展开可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,对下三角行列式,一直按第 1 行展开可得一样的结论:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

也就是说，上三角行列式和下三角行列式的值均等于主对角线上所有元素的乘积.

同样利用展开式，可以得到以副对角线为分界线的三角行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

即以副对角线为分界线的三角行列式的值等于副对角线上所有元素的乘积再乘上一个符号项$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，其中的 n 为行列式的阶数. 直接展开得到的符号项可能是$(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}$，虽与结论中的符号项形式不一致，但代表的符号是一样的.

关于行列式，也有使用逆序数和全排列来定义的，有兴趣的读者可以查阅其他书籍.

习 题 1.2

1. 计算下列 3 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & 1-y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1-y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1-y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1-y \\ 1-y & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$.

§1.3 行列式的性质

虽然利用行列式的展开式已经可以计算行列式了，但是对于阶数较高的行列式，其计算量是相当大的，甚至是不可能完成的. 因此，单纯用行列式的展开式来计算行列式是完全不够的，我们需要考查行列式有没有什么特点或性质可以简化行列式的计算. 这就是这一节我们要研究的主要内容. 当然，也不能因此完全否定行列式展开式的作用，在计算行列式的过程中或在某种特定情形下，行列式的展开式还是很有用的.

观察下面两个 2 阶行列式：