数学的学习方法

吕传汉 编著

高等教育出版社

内容提要

本书根据数学的特点和教育学、心理学、生理学、方法论等理论，分析、讨论了数学的学习方法. 内容包括：历史的回顾，数学是什么，大学生的能力发展与自我设计，数学的学习特点，数学学习的典型方法，自学，发展数学思维能力，学会科学记忆，学会科学用脑等. 可供大、中学生阅读、参考.

本书由毛鸿翔副教授审阅.

数学的学习方法

吕传汉　编著

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张5.75　字数130 000

1990 年1月第 1 版　1990 年11月第 1 次印刷

印数 0 001—5 (4)

ISBN 7-04-002522-1/O·840

定价1.45元

前　言

今天，人类满怀豪情地跨进了“信息时代”！

在这个时代里：

煤、电、原子能给人提供了丰富的能源；

相对论、量子力学、分子生物学的发展为人类揭示自然和探索自身的秘密奠定了基础；

控制论、广义信息论、系统论的建立，把人们对客观物质世界和主观世界的研究引向“科学技术—社会—自然”更大的有机结合的系统；

电子计算机的迅速发展，导致一个脑力劳动自动化的新时代；

宇航技术的发展，使人类智力探索的领域拓广到了太空！

科学技术的飞速发展，使现代科学技术自身的知识结构发生了巨大的变化．自然科学、技术科学和专业技术三者的相互渗透和统一形成了现代科学技术的庞大的知识体系，使得门类纷繁的、大量的边缘学科、交叉学科、横向学科如雨后春笋般出现，知识信息量急剧猛增．预计20世纪这100年内的著作量，将超过20世纪以前的著作总量，而50年后人类知识的总量又将是今天的32倍．知识的海洋如此浩瀚，增长的速度如此迅猛！一个人要学习知识，也许耗尽毕生精力，也只能似在大海中喝到一碗水，况且所学的知识还会遗忘．而只有不断地培养自己索取知识的方法和能力，才能伴你终身，不断地驱使你去成功地探索通往新的知识彼岸的途径．

因此，学会读书，掌握学习规律和学习方法，以培养索取知识的能力，乃是当今青年学习中十分重要的任务．只有凭借着良好的学习方法，才能在学习中寻求到伟大的科学真理；也只有掌握了良

好的学习方法，才能达到“事半功倍”的学习效果．正如笛卡儿所言，“没有正确的方法，即使有眼睛的博学者也会象瞎子一样盲目摸索．”也正如第三次浪潮的作者托夫勒所言：“未来的文盲不再是不识字的人，而是没有学会学习的人．”可见，学习方法是学习活动中带根本性的问题．这就必须从读书中学会读书，从学习中学会学习！一旦你掌握了科学的学习方法，就象找到了打开知识宝库的钥匙；又好似驾驭了一只全能之舟，在知识的海洋里自由的遨游，帮助你从“不知”的此岸顺利地通达“知的”彼岸！

学习方法如此重要，那么，什么是科学的学习方法呢？它是指人们为了达到学习的目的所采取的步骤和手段，是人们对学习过程的思维活动和实践经验、方式的概括和总结．为了在数学学习活动中能自觉地、主动地掌握科学的学习方法，在本书中，首先简要地回顾了数学发展的史实，并叙述了不同的时代背景及与之相适应的数学思维的演进，为在学习中自觉地培养数学思维能力打下基础．书中叙述了当今时代的特征，强调了科学、技术及数学的迅猛发展，从而提出发展学生能力，进行自我设计乃是时代对青年在学习上的紧迫要求．为此，必须重视学习方法，特别是自学的方法．因而，在书中以较多的篇幅重点阐述了数学自学能力的培养和数学思维能力的培养，并相应地介绍了数学学习的有关方法．意在向青少年提供自然科学，特别是数学的一些学习方法和工具．它虽达不到向读者奉送“点金术”，但期望以此作借鉴引发读者炼就出自己的“点金术”来！如果本书对读者在学习数学的方法上尚能有所裨益，作者将颇感欣慰．

由于作者是个数学教育工作者，因此本书是以作者多年来的学习和教学经验为基础，结合青少年的学习心理特征和数学学科的实际，运用现代教育学、心理学、逻辑学、数学史、科学思想史和自然辩证法原理中的一些基本观点，对数学的学习方法进行综合、

概括而成.它可作为中学生,中专学生,普通大专院校学生及电视大学、函授大学、职工大学、业余大学的学生学习数学时的方法性指导书,对于中学数学教师、理科研究生及业余的数学爱好者也有一定的指导和参考价值.

尽管作者力图介绍学习数学的一些方法,但由于数学的学习方法是一个十分复杂的问题,涉及到许多方面的知识,由于资料的缺乏及自己能力的局限,诚恐难以达到预期的目的,况且书中缺点、错误在所难免,恳请广大读者多多予以批评赐教!

吕传汉

1988年11月于贵州师范大学

目　　录

纵观自然科学发展，上下五千年，数学作为一门历史悠久的科学流传至今；横观自然科学发展的现状，有数学、物理学、化学、天文学、地学、生物学六大基础学科以及建立在此基础上的两千多个具体专业，无不包含或依赖着数学的发展. 数学，人类思维的"王国"，可谓源远流长，深邃浩瀚，应用广泛，充满人间.

一 历史的回顾

回首远古，人类就已根据自己生活和生产的实际需要，不断发现和积累数学知识. 早在公元前十几世纪，人类历史从铜器时代过渡到铁器时代，由于使用铁器，促进了生产力的发展，社会财富增长很快，商业贸易随之迅速发展. 由于生活、生产和社会经济的需要，人们不断地需要计算产品的数量、劳动时间的长短和分配物品的多少，需要丈量土地的面积和测定建筑物形状和大小，需要进行天文、气象的观测等等. 人们在围绕着数与形这两个概念的研究中，使数学逐渐地发展起来. 实际上，数(读 shù) 的概念正是起源于对现实物体多少的数(读 shǔ). 经过"结绳记数"，运用人手的十个指头计数等方式，逐渐创造了"十进制记数"法和数的运算方法. 正如恩格斯所说："人们曾用来学习计数，从而用来作第一次算术运算的十个指头，可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物. 为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果. "① 形的概念也源于现实世界. 因为自然界的物体本来就以各种形状存

---

① 恩格斯《反杜林论》，人民出版社，1970 年版，第 35 页.

在着. 人类出现以后，在制作石器、采集果实、烧土制陶、丈量田亩、天文观测等活动中，对各种物体形状加以比较，区分直和方圆，从中逐渐产生了形的概念，并促成了几何学的初步发展. 虽然这个时期出现了实际的计算和测量，形成了数和图形的初步概念. 然而，在这一时期中，人类改造自然的实践能力和实践水平都很低，人类与自然界的一些交换活动，基本限制在与自然之间的实体交换水平上，而能量交换和信息交换活动，仅处于一种从属或间接的低级状态. 那时社会物质生活条件和生产水平对人们认识的精确性要求不高，精确思维仅处于萌发和缓慢发展的水平. 而颇具神秘色彩的原始思维，则把人类的意识栖身在模糊认识的王国里，人们对自然界的认识是笼统的、模糊的，不可能形成系统的科学知识. 相应地，数学亦不可能有多大的发展，它被长期囿于迟缓而漫长的"数"的演变历程里. 对"形"的认识也是直观而肤浅的. 这些"数"与"形"的知识仅是些片断、零碎的，尚未形成严谨的体系，更缺乏逻辑知识的整理，它只能作为数学的萌芽载入史册. 这就是所谓的"数学萌芽时期"(公元前 600 年以前).

生产的发展，社会的进步，促使人的社会分工扩大，于是生产力显著提高，社会经济不断发展，随之数学的应用范围也越来越广，应用数学的人与日俱增. 如果说在日出而作，日入而息的古代社会里，会数(shǔ)数(shù)能足以满足客观的需要，那么，到了公元前 6、7 世纪，仅限于对数的这种认识就已远远不能适应社会发展的需要了. 当时，地中海一带已成为文化昌盛的地区，在生产、商业、航海以及社会政治生活发展的影响下，人们的认识已开始摆脱神秘的色彩，积极探究大自然的奥秘的愿望正逐渐代替着旧的宗教神话的世界观. 为了要定四时，测田亩，就需要去窥天测地，随之初等几何、三角学逐步发展起来. 商业发展，计算日繁，便出现了代数学. 这段时期，人们在数学方面已积累起大量的资料，对

“数”与“形”的概念有了进一步的认识，并建立了数的运算．这是数学生长的第一步，也是人类知识数学化的第一步．可见，数学正是从扬弃人类关于数的模糊意识而萌发的．到了古希腊时代（约从公元前6世纪到2世纪），数学才在巴比伦和古埃及文化的基础上，逐渐作为一门独立的理性学科出现．这一时期涌现出了一批杰出的数学家及学派，诸如：

毕达哥拉斯学派　(Pythagoras 等，公元前6世纪，古希腊)；

亚里士多德学派　(Aristoteles 等，公元前4世纪，古希腊)；

欧几里得　(Euclid，约公元前330—275，古希腊)；

阿基米德　(Archimedes，约公元前287—212，古希腊)；

刘徽　(公元263年前后的魏晋时期，中国)；

祖冲之　(429—500，南北朝时代，中国)；

祖暅　(祖冲之之子，约6世纪，中国)；

秦九韶　(1202—1261，南宋时代，中国)；

杨辉　(约13世纪，南宋时代，中国)

等等．其中，尤以历史上第一个数学公理范式体系的欧几里得《几何学原本》十三卷和第一个逻辑理论体系亚里士多德的《工具论》的诞生，使希腊人对数学和逻辑学的贡献受到举世公认，影响深远．它们标志着希腊人的数学思维在扬弃模糊性的过程中出现了质的飞跃．尽管在这一历史阶段中，人与自然界交换活动的总水平依然停留在实体交换水平上，人们的认识能力和手段还不具备普遍高度精确化的条件，人类认识尚以模糊化为基本特征．然而，希腊人的数学思想，特别是欧几里得《几何原本》所指出的数学的发展方向：一切数学结果必须根据明确规定的公理，以严谨的无懈可击的演绎法推导出来．它引导着人们领会和掌握着数学推理的原则和方法，有力地训练着人们数学思维朝着严谨化、精密化的道路前进．从来没有一本科学书籍，能象《几何原本》那样长期而巩

固地成为广大学生所传诵的读物．从1482年到19世纪末，《几何原本》的印刷本竟用各种文字出了一千版以上．其影响之深远，以致欧几里得和“几何学”变成了同义语．以后，直到16世纪，初等几何、算术、初等代数、三角学等逐步完善起来，并形成了独立的科目．若和17世纪中叶以后的解析几何、微积分相比，这一时期研究的内容可以用“常量数学”或“初等数学”来概括．这就是所谓的“常量数学时期”（公元前600年—17世纪中叶）．

17世纪开始了人类的科学时代．由于人们掌握了科学方法，自然科学在各方面都呈现出一派突飞猛进的大好形势，而其中由牛顿一手奠定了基础的物理科学两大支柱：力学和数学，尤其起了带头和主力军的作用．这时，“运动”成为自然科学研究的中心课题，就迫使数学要建立相应的概念和理论．17世纪上半叶，变量的概念随之而生．伟大的数学家笛卡儿（R. Descartes，1596—1650，法国）以力学的要求为背景，把几何内容与代数形式结合起来，引进了笛卡儿“变数”，他把过去对立着的两个研究对象“数”和“形”统一起来，于1637年建立了解析几何学，完成了数学史上一项划时代的变革．从此，开始了变量数学的新纪元．恩格斯对笛卡儿的变革思想给予了极高的评价：“数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的．”①这一时期的特征是进一步扩大了数学的研究对象．函数的思想以及与函数有关的连续性和运动的思想，在数学中占有牢固的地位．数学分析的出现，使数学成了认识自然的强有力的工具；解析几何的出现，在几何、代数与数学分析之间架设了一座奇异的

① 恩格斯《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第236页．

"桥梁". 另外,在公理方法的发展和应用方面取得的巨大成就,将数学的逻辑基础的问题提到了首要的位置,这样才创造了从数学本身出发来研究数学的本质的可能. 虽然这段时间中几何、数论、代数也相继发展,也出现了概率论和射影几何等新的数学学科,但似乎都被微积分过分强大的浪潮所淹没. 从1637年到18世纪末的大约200年间,分析学以汹涌澎湃之势向前发展,以微积分为基本思想的变量数学达到了空前灿烂的程度,其内容的丰富,应用的广泛,使人目不暇接. 这就是所谓"变量数学时期"(17世纪中叶—19世纪20年代).

变量数学的长足发展,促使许多新兴的数学学科蓬勃向前,其内容和方法不断地充实、深入和扩大. 到19世纪初,业已枝繁叶茂,硕果累累,似乎数学的宝藏已挖掘殆尽,无多大发展的余地了. 数学这块鏖战的阵地上出现了胜利后的暂时的宁静. 这宁静——孕育着新的激战前的宁静,预示着巨大革命潮流的到来. 随着自然科学及工程技术的迅猛发展,19世纪20年代,数学革命的狂飙终于来临了.

从19世纪20年代到第二次世界大战,称为"近代数学"时期. 这一时期的特征是数学的研究对象急剧拓广,一切可能的和更为一般的量及其关系,都成为数学的研究对象. 数学发生了一系列重大的本质性变化. 首先,是罗巴契夫斯基(Н. И. Лобачевский, 1792—1856,俄国)非欧几何的出现. 其产生是由围绕着企图证明欧几里得几何的第五公设① 而引起的. 在两千多年中许许多多数学家绞尽脑汁的证明、探索都未得出结果. 罗巴契夫斯基也没有放弃对第五公设的证明,他企图用归谬法去证明它. 结果,他不但没有发现任何矛盾,反而在严格的推导下,导出一系列连贯的命

① 欧几里得第五公设:如果一直线和两直线相交,所构成的两个同旁内角之和小于两直角,那么,把这两直线延长,它们一定在那两内角的一侧相交.

题．这些命题构成了逻辑上既无矛盾，又与“绝对几何”（即不依赖于第五公设得到的命题构成的几何）不相冲突，但又异于欧氏几何系统的新几何．罗巴契夫斯基称它为“虚几何学”，即所谓非欧几何．非欧几何的发现是几何发展史上一个有深远意义的事件．它开阔了人们的眼界，扩大了几何学的意义和空间概念的内容．1854年黎曼（B. Riemann，1826—1866，德国）发表了“论几何学作为基础的假设”一文，对空间与几何的概念，作了深入而广泛的研究，提出并建立了黎曼几何学．黎曼对几何的创造性工作开辟了拓扑学研究的新领域，在此基础上，庞加勒（H. Poincare，1854—1912，法国）等人又以不同方式进行了推广．由于科学技术中提出的许多数学问题都导致了空间的连续性与连通性这类几何性质的研究，遂促进了拓扑学这门崭新的几何学分支的蓬勃发展．其次，是关于近世代数的研究．我们知道，一元二次、三次、四次方程都有求根公式，这些公式是由方程中各项的系数经过有限次加、减、乘、除、开方等运算组成的．那么，五次及五次以上的方程能否找到这种由系数组成的根式所表达的一般的公式解呢？在18世纪以前的200多年中，虽然没有任何人怀疑过这种一般的公式解的存在性，可是却无一人找出它的表达形式，尽管他们付出了十分艰辛的劳动．1824年阿贝尔（N. Abel，1802—1829，挪威）证明了当方程的次数$n\geqslant5$时，除特殊方程外，任何一个由系数组成的根式都不可能是方程的根．然而他没有回答有多少种不同类型的特殊的高于四次的方程是可以用根号解出的？法国年青的杰出数学家伽罗华（E. Galois，1811—1832）正是抓住了方程根的排列与方程能否用根式解出这个联系，发现了方程的根的对称性和平等性是解决全部问题的关键．他第一次提出了“群”这一十分深刻的概念，认为每个代数方程必有反映其特殊性的“置换群”存在，利用群的性质他给出了方程可用根式解的充要条件，最终彻底地解决了这个

问题．由于“群”这一新概念的出现，就为“群论”的建立奠定了基础．它大大拓广了代数学的研究范围，使由过去专门研究方程解的代数学，发展成为研究各种代数系统的性质与结构的学科——“近世代数”．再者，到了 19 世纪，数学分析开始转向逻辑基础的研究．由柯西(A. Cauchy, 1789—1857, 法国) 关于极限概念精确化的工作开始,最后由外尔斯特拉斯(K. Weierstrass, 1815—1897, 德国)、狄特金(R. Dedekind, 1831—1916, 德国)和康托 (G. Cantor, 1845—1918, 德国)等人相继完成了连续统的理论，为数学分析理论奠定了坚实的基础.

可见，近代科学发展的日益数学化，体系日益公理化，方法由定性分析转向定量分析，促使人类思维中朴素的模糊思维方式被扬弃，大大巩固了精确思维在人类认识活动中的支配地位．从而促使人类数学思维发生了历史性的演化：数学理论在经过 17、18 世纪大规模的扩张以后，通过 19 世纪各数学分支的公理化，首先走上了严密化的道路．特别是由于希尔伯特数学形式系统思想的提出，标志着数学公理化发展史的重要转折——“元数学”的建立(1900 年前后)．它明确提出了人们实现思维确定化的方向：将各门数学形式化，构成形式系统，然后用一种初等方法证明各个形式、系统的无矛盾性，从而导出全部数学的无矛盾性.

从 17 世纪这一“英雄世纪”开始的近 300 年中，科学得到急速的发展，数学的进展更是百花齐放、方兴未艾．一大批伟大而杰出的数学家，把科学数学化的潮流推向高峰，终于使数学踌躇满志地掌握了自然科学的加冕权．诸如上面提到的笛卡儿、牛顿(I. Newton, 1642—1727, 英国)、莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716, 德国)、柯西、罗巴契夫斯基、阿贝尔、黎曼、康托、庞加勒以及伽利略(G. Galilei, 1564—1642, 意大利)、开卜勒(J. Kepler, 1571—1630, 德国)、费尔马(P. Fermat, 1601—1665, 法国)、惠更斯(C. Huygens,1629—1695,荷兰)、伯努利家族(Jacob. Bernoulli等11人,17—18世纪,瑞士)、欧拉(L. Euler,1707—1783,瑞士)、拉格朗日(J. Lagrange,1736—1813,法国)、拉普拉斯(P. Laplace,1749—1827,法国)、高斯(C. Gauss,1777—1855,德国)、伽罗华(E. Galois,1811—1832,法国)、克莱因(F. Klein,1849—1925,德国)、柯瓦列芙斯卡娅(C. B. Ковалевская,1850—1891,俄国)、希尔伯特(D. Hilbert,1862—1943,德国)、罗素(B. Russell,1872—1970,英国)、柯朗(R. Courant,1888— 美籍德国人)等等. 他们卓越的工作成就,把近代数学营造成一座高度严密和抽象的确定性的"数学迷宫". 数学表述的精确化和理论系统的公理化思想,深深渗透到人类知识的各个领域,数学的日益抽象,似乎成了人类的"自由创造". 不少数学家也认为数学大厦即将竣工,数学理论的严密性已经完成. 数学胜利的进军使他们陶醉在严密、抽象的"迷宫"之中. 难怪乎庞加勒①于1900年在巴黎召开的第二届国际数学家代表会议上自豪地宣布:"现在我们可以说,完全的严格性已经达到了."

然而,形势并不乐观. 正当人们津津乐道数学的严密性时,天边却飘来了一片乌云,这乌云迅速扩大,使精确数学的万里晴空中出现了阴影. 这就是1902年英国的数学家、逻辑学家B.罗素提出的"集合论"上的悖论,它导致了数学上的第三次"危机". 这一悖论是如此简明清晰,使得数学家几乎没有辩驳的余地. 因为这时康托创立的集合论已开始为大家所接受并逐渐深入数学各分支,

① 庞加勒,是19世纪末20世纪初数学的代表人物,是继高斯和柯西之后无可争辩的大师. 他的研究领域既深又广,主要有三体问题、微分方程的定性理论、拓扑学,也涉及非欧几何、不变量理论、分析力学、弹性力学、热力学、光学、电学、宇宙学等等. 后人形象地说"他是一个征服者,但不是殖民者".

突然宣布作为数学基础的集合论本身是自相矛盾的，自然犹如晴空霹雳，使数学家们目瞪口呆．数理逻辑学的前驱、数学家与逻辑学家弗雷格(1848—1925，德国)在他的《论数学基础》卷二的书后写道："对一个科学家来说，没有一件事比下列事实更令人扫兴：当他工作刚刚完成的时候，突然它的一块奠基石崩塌下来了．当本书的印刷快要完成时，罗素先生给我的一封信就使我陷于这样的境地．"

这个晴空霹雳——"罗素悖论"是怎么叙述的呢？

试把集合分成两类：自己属于自己的元素的集合为甲类；自己不是自己的元素的集合作为乙类．这样，任给一个集合 M，要么 $M\in$甲，要么 $M\in$乙，二者必居且仅居其一．

罗素问：乙类集合的全体也是一个集合，它属于哪一类？

回答：若乙$\in$甲，则依甲的定义应有 乙$\in$乙，这和乙$\in$甲矛盾，不可能；若乙$\in$乙，则仍依甲的定义应有乙$\in$甲，又产生矛盾．总之，都陷于左右为难、自相矛盾的困境．

"罗素悖论"好似一颗重磅炸弹，震撼了数学界，号称天衣无缝、绝对正确的精确数学居然也出现了自相矛盾．这一悖论使数学家们惶恐不安，许多人努力设法去消除这个怪物，于是引起了一场涉及数学基础的大论战．它刺激着大批数学家去奋力探索如何进一步建立严格的数学基础．比如希尔伯特形式化公理方法及罗素对数理逻辑的探讨，都对数学发展有着十分重要的影响．由于这些崭新的数学领域的出现，使得数学又迈进了一个新的历史时期——"近代数学时期"．

当历史的进程步入本世纪以后，特别是在第二次世界大战前后的40—50年代，世界科学史上发生了惊天动地的巨大变化．1945年7月16日在美国新墨西哥州的洛斯阿尔莫沙漠中爆炸了第一颗原子弹，开辟了原子能利用的新纪元；1945年12月在美国费城

宾夕法尼亚大学诞生了第一台电子管的电子计算机 ENIAC①，标志着人类正进入一个脑力劳动自动化的新时代；1957年10月4日苏联发射了第一颗人造地球卫星，打开了人类征服宇宙的大门. 以这三大发明为代表的现代科学技术，给数学提出了大量的新课题，促使基础数学、应用数学和计算数学飞速发展. 这个时期数学的特征表现为概括性、抽象性很强的“数学结构”思想的形成；广泛应用“模型方法”处理数学问题；数学与其它学科相互渗透出现了大量的边缘、交叉的新学科(详见本书第二节). 数学，这门基础科学，已经越来越渗透到各个领域，成为各种科学技术、生产建设以至日常生活所不可缺少的有力武器. 可谓“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学.”②在现代科学技术中，如果不借助数学，不与数学发生联系，就不可能达到应有的精确度与可靠性. 数学，是打开一切科学大门的金钥匙. 任何一门学科知识，如不经历“数学化”的过程，它就不能成为真正的科学. 正如马克思早就指出的那样，“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步.”③

从上面极其简要的历史回顾中，已初步可以看出，数学这人类思维精华的结晶，真可谓：源远流长，深邃浩瀚，应用广泛，充满人间.

① 是 Electronic numerical integrator and calculator(电子数字积分仪与计算器)的缩写.

② 华罗庚《数学的用场与发展》，见《现代科学技术简介》，科学出版社，1978年版，第221页.

③ 转引自吴文俊《数学概况及其发展》中引文，见《现代科学技术简介》，科学出版社，1978年版，第225页.