模糊理论与工程系列丛书

模糊代数与粗糙代数

张振良 张金玲 肖旗梅 编著

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

模糊理论与工程系列丛书

模糊代数与粗糙代数

张振良 张金玲 肖旗梅 编著

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

模糊代数与粗糙代数/张振良,张金玲,肖旗梅编著.—武汉:武汉大学出版社,2007.8

模糊理论与工程系列丛书

ISBN 978-7-307-05522-3

Ⅰ.模… Ⅱ.①张… ②张… ③肖… Ⅲ.模糊代数 Ⅳ.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 052115 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:王　建　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北省孝感日报社印刷厂

开本:720×1000　1/16　印张:11.5　字数:184 千字

版次:2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-05522-3/O·359　定价:17.00 元

模糊理论与工程系列丛书编委会

张振良，男，1945年4月生，云南省大理市人，白族。云南省数学学会理事，昆明理工大学理学院院长，应用数学、系统理论硕士生导师，教授。1968年毕业于云南大学数学系，1983～1984年于北京师范大学数学系进修，2004年4～5月赴日本大阪产业大学访问。多年来从事模糊数学、幂集代数和粗糙集代数的研究，发表论文50多篇，国内外核心刊物30多篇。获云南省自然科学三等奖，云南省教育厅科研成果三等奖。曾赴新加坡、泰国参加国际会议，赴中国香港、日本访问，开展学术交流与合作。30多年来，一直从事本科生和研究生数学教学。曾编著和编写专著和教材5本，已出版的教材中作为教学改革的主要材料，曾获国家级教学成果二等奖。

张金玲，女，1974年4月生，湖北省襄樊市人，汉族。襄樊学院数学讲师。1996年本科毕业于湖北大学数学系，之后一直在襄樊学院数学系任教，2000～2003年于昆明理工大学理学院攻读系统理论方向理学硕士，并以优秀的毕业论文顺利毕业。毕业后仍回原校工作。主持了一项湖北省教育厅重点基金项目《模糊代数与粗糙代数研究》，公开发表论文5篇。多年来，曾两次荣获校级青年教学竞赛二等奖，多次荣获其他优秀奖励。

肖旗梅，女，1976年8月生，湖南双峰人，汉族。2004年3月昆明理工大学理学院系统理论专业硕士研究生毕业。毕业至今在长沙理工大学数学与计算机科学学院任教，期间主要担任学校的公共课程高等数学与概率统计的教学和学生毕业论文的指导工作，参与概率统计课程教材的编写工作和课程建设工作。近几年发表论文多篇，一篇被SCI检索。

前　言

1965 年，美国控制论专家 L. A. Zadeh 教授创立了模糊集合论。模糊集合论作为经典集合论的推广，它概括了更加多样化的数学概念的框架，建立了能处理模糊现象的确切的数学理论，以拓广数学基础，产生了模糊测度、模糊拓扑、模糊代数、模糊概率、模糊规划等新的研究方向，使经典数学的若干方向在更广阔、更深刻的意义下向前挺进，从而深化了人类对数学中若干基本概念的认识，拓广了数学的应用范围。

1982 年，波兰数学家 Z. Pawlak 首先提出了一种处理不确定性现象的数学理论——粗糙集理论。近年来该理论在机器学习与知识发现、数据挖掘、决策支持与分析、专家系统与智能控制等方向有广泛的应用。目前，粗糙集理论已成为信息科学最为活跃的研究领域之一。随着粗糙集理论研究的不断深入，粗糙集的数学结构，包括代数结构、拓扑结构、序结构等的研究也引起了数学工作者的重视，在许多方面已经取得了显著的研究成果，形成了一些新的研究方向。

本书的目的就是介绍模糊集、粗糙集和模糊粗糙集的基本理论。介绍国内外在模糊代数和粗糙代数方面的研究成果，主要介绍了我们在幂集代数与模糊幂集代数，以及粗糙集的代数结构方面的研究成果，期望为从事模糊集、粗糙集、模糊代数和粗糙集理论研究的学者及研究生进入这一领域提供捷径。

本书在写作过程中，参考了罗承忠教授的《模糊集引论》，张文修教授的《模糊数学引论》及《粗糙集理论与方法》，马骥良与于纯海教授的《模糊代数选论》等著作。在介绍幂群与模糊幂群等最新研究成果时，参考了李洪兴教授，罗承忠教授的研究成果。在写作第三章、第四章、第五章、第六章时引用了我的学生扬培亮、刘文军、张金玲、郭庆、张晓莉、肖旗梅、赵晓艳、高井贵、郭海刚、孔平、李扉、殷允强、张虹、黄春娥、黄晓昆、李红杰、曾亦洁等的部分研究成果。本书写作过程中始终得到了北京师范大学李洪兴教授，哈尔滨工业大学吴从炘教授，武汉大学胡宝清教授等的大力支持，借此机会，表示衷心感谢。

鉴于我们从事该领域研究的时间不长，加之我们自身的学识和水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

2006 年 10 月

序

1965年,美国计算机与控制论专家L. A. Zadeh教授提出了Fuzzy集概念,创造了研究模糊性或不确定性问题的理论方法,迄今已成为一个较为完善的数学分支。

近四十年来,模糊理论与技术得到了迅猛发展,国内外学者在这个领域做了大量卓有成效的工作,其中许多探索是具有突破性的。模糊理论与技术一个突出的优点就是能较好地描述与仿效人的思维方式,总结和反映人的体会与经验,对复杂事物和系统可进行模糊度量、模糊识别、模糊推理、模糊控制与模糊决策。尤其是模糊理论与人工智能在神经网络和专家系统等方面相互结合的研究已涉及到计算机、多媒体、自动控制以及信息采集与处理等一系列高新技术的开发与利用,有力地推动了应用科学、决策科学、管理科学与社会科学的进步,这种学术理论体系不断完善的新成果正在迅速地转变成生产力促进社会物质文明水平的不断提高。

为了系统地归纳总结模糊理论与技术的学术成就,系统地向广大读者介绍、普及模糊数学的基础理论与基本知识,进一步推动该学科的发展,使之有利于为社会经济建设服务,我们经过多年的酝酿、策划与探索,决定组织出版"模糊理论与工程系列丛书"。这套系列丛书中的大部分既可作为理工类本科生、硕士生的教材,也可作为高等院校教师、相关科技工作者与模糊理论爱好者的参考读本。

"模糊理论与工程系列丛书"能够顺利出版主要得益于两方面的大力支持:

其一,得益于我国模糊数学界广大专家、学者的支持。2002年11月全国第11届模糊数学年会在厦门集美大学召开,我们为组织该丛书的出版广泛征求了意见,得到了广大与会者的大力支持,不少学者表示愿承担该系列丛书的撰写工作。尤其是王国俊教授、吴从炘教授、应明生教授、张文修教授、罗懋康教授、韩立岩教授等,在表示支持组织出版该丛书的同时,对该丛书的理论构架、选题定位以及一些具体操作细节上提出了许多宝贵的指导性意见。特别值得提及的是,厦门会议以后,得到了刘应明院士以及广大专家、学者的大力支持,组成了以刘应明院士为名誉主编的本系列丛书编委会。组织这个编委会的目的一是对该丛书的指导思想、选题思路以及今后的趋势将经常听取编委们的意见,二是对本

系列丛书中拟将出版的每一本书都要由相关编委审核把关，尔后付梓，以确保丛书质量。

其二，得益于武汉大学出版社的大力支持，武汉大学出版社是被中共中央宣传部，国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。该社以出书严谨著称，建社二十多年来，所出版的一大批专著、教材曾荣获“中国图书奖”、“国家图书奖”、“五个一工程奖”等国家级奖励。武汉大学出版社社长、总编与相关编辑对本系列丛书的出版给予了大力支持，多年来他们做了许多深入细致的工作，使这套系列丛书的第一批作品得以顺利出版。

在此我代表本系列丛书的全体作者，对各位专家、学者，武汉大学出版社的领导与编辑表示由衷的感谢！真诚地希望广大专家、学者对本系列丛书提出宝贵的意见，使之日臻完善；热诚地欢迎广大专家、学者积极参与本丛书的编撰工作，使之日渐丰富。组织出版这套系列丛书本身就是一项系统工程。需要各位专家、学者以及方方面面的鼎力相助。倘若这套系列丛书能对广大读者有所裨益，能在浩瀚的书海中泛起一片闪光的涟漪，作为本系列丛书的主编，我就喜出望外了。谨此为序。

欧阳绵

2004 年 4 月于武汉大学

目　　录

第一章　模糊集的基本理论

§1.1　模糊集及其运算

设 X 是论域,A 是 X 的子集,A 可以用特征函数表示,即映射 $A:X\to\{0,1\}$,$\forall x\in X$

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\notin A\\ 1, & x\in A\end{cases}\tag{1.1}$$

X 的子集和子集的特征函数一一对应.

对于论域 X 上的一个模糊概念,确定了 X 上的一个模糊子集 A,对于任意的 $x\in X$,x 和 A 之间不是绝对属于或绝对不属于的关系. 为了表示 x 属于 A 的程度,我们用[0,1] 中一个数值来表示,所以论域 X 上的一个模糊子集可以用 X 到 [0,1] 的一个映射来描述.

定义 1.1.1　设 X 是论域,映射 $A:X\to[0,1]$ 称为 X 的一个模糊子集,简称为 F 集,映射 A 称为 F 集 A 的隶属函数,$A(x)$ 称为 x 关于 A 的隶属度.

论域 X 上的所有 F 集记为 $F(X)$,显然 $P(X)\subseteq F(X)$.(其中,$P(X)$ 是论域 X 上的所有经典集).

论域 X 上的 F 集有下列表示法:

(1) $A=\{(x,A(x))\mid x\in X\}$;

(2) 若 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,记 $A\triangleq(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$;

(3) 若 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$,记 $A\triangleq\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{A(x_i)}{x_i}$;

(4) 若 X 是不可数集,记 $A\triangleq\int\dfrac{A(x)}{x}\mathrm{d}x$.

例 1.1.1　设 $X=[0,100]$ 表示年龄论域,Zadeh 给出了年轻人"Y"和老年人"O"两个 F 集的隶属函数

$$Y(x)=\begin{cases}1, & 1\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 100\end{cases}$$

$$O(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 100\end{cases}$$

定义 1.1.2 设 $A,B\in F(X)$.

(1) 若 $\forall x\in X, A(x)\leqslant B(x)$,则称 A 包含于 B,或 B 包含 A,记为 $A\subseteq B$,或 $B\supseteq A$.

(2) 若 $\forall x\in X, A(x)=B(x)$,则称 A 和 B 相等,记为 $A=B$.

显然,$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

$\forall x\in X, \varnothing(x)=0, X(x)=1$.

由此,$(F(X),\subseteq)$ 是具有最小元 $\varnothing$ 和最大元 X 的偏序集.

定义 1.1.3 设 $A,B\in F(X)$,定义并、交、余运算如下:

(1) $$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x) \tag{1.2}$$

(2) $$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x) \tag{1.3}$$

(3) $$A'(x)=1-A(x) \tag{1.4}$$

分别称 $A\cup B, A\cap B$ 为 A 和 B 的并集、交集;称 A' 为 A 的余集,如图 1.1 ~ 图 1.3 所示.

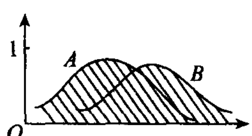

图1.1

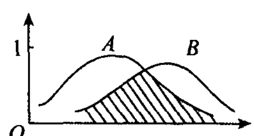

图1.2

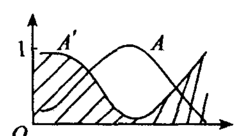

图1.3

设 T 是指标集,$A_t\in F(X)(t\in T)$,定义无限并、无限交如下:

$$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)(x)=\bigvee_{t\in T}A_t(x) \tag{1.5}$$

$$\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)(x)=\bigwedge_{t\in T}A_t(x) \tag{1.6}$$

定理 1.1.1 设 $A,B,C\in F(X)$,则并、交、余满足下列性质:

(1) 幂等律 $A\cup A=A, A\cap A=A$;

(2) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$;

(5) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(6) 同一律 $A\cup\emptyset=A, A\cap X=A$;

(7) 两极律 $A\cup X=X, A\cap\emptyset=\emptyset$;

(8) 对合律 $(A')'=A$;

(9) 对偶律 $(A\cup B)'=A'\cap B', (A\cap B)'=A'\cup B'$.

证明略.

F 集不满足补余律,即 $A\cup A'\neq X, A\cap A'\neq\emptyset$.

例 1.1.2 设 $X=[0,1], A(x)=x$,则 $A'(x)=1-x$,且

$$(A\cup A')(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ x, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$(A\cap A')(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 1-x, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

所以,$A\cup A'\neq X, A\cap A'\neq\emptyset$.

设 $A\in F(X)$,即 $A:X\to[0,1]$,所以 $A\in[0,1]^X$. 又 $\forall A,B\in F(X), x\in X$,

$$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)$$
$$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)$$
$$A'(x)=1-A(x)$$

即代数系统 $(F(X),\cap,\cup,')$ 中的运算分别是由代数系统 $([0,1]^X,\wedge,\vee,')$ 中的相应运算定义的,易证 $F(X)\cong[0,1]^X$,所以 $(F(X),\cap,\cup,')$ 是一个具有伪补的完全分配格,即模糊格.

§1.2 模糊集的模运算

定义 1.2.1 映射 $\triangle:[0,1]^2\to[0,1]$ 称为三角模,如果 $\triangle$ 满足:$\forall a,b,c,d\in[0,1]$

(1) 交换律:$\triangle(a,b)=\triangle(b,a)$;

(2) 结合律:$\triangle(\triangle(a,b),c)=\triangle(a,\triangle(b,c))$;

(3) 单调性:$a\leqslant c, b\leqslant d$,则 $\triangle(a,b)\leqslant\triangle(c,d)$;

(4) $\triangle(0,0)=0, \triangle(1,1)=1$.

若三角模 $\triangle$ 还满足:$\triangle(a,1)=a$,则称 $\triangle$ 为 T 模,记为 T;

若三角模 $\triangle$ 还满足:$\triangle(0,a)=a$,则称 $\triangle$ 为 S 模,记为 S.

例 1.2.1 (1) 下列五种运算是 T 模

$$T_0'(a,b)=\begin{cases}a, & b=1\\ b, & a=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$T_0(a,b)=a\wedge b$$

$$T_1(a,b)=ab$$

$$T_2(a,b)=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$$

$$T_\infty(a,b)=0\vee(a+b-1).$$

(2) 下列五种运算是 S 模

$$S_0'(a,b)=\begin{cases}b, & a=0\\ a, & b=0\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

$$S_0(a,b)=a\vee b$$

$$S_1(a,b)=a+b-ab$$

$$S_2(a,b)=\frac{a+b}{1+ab}$$

$$S_\infty(a,b)=1\wedge(a+b).$$

例 1.2.2 $\forall\lambda\geqslant0$,定义

$$T^{(\lambda)}(a,b)=\frac{ab}{\lambda+(1-\lambda)(a+b-ab)}$$

$$S^{(\lambda)}(a,b)=\frac{a+b+(\lambda-2)ab}{1+(\lambda-1)ab}$$

$T^{(\lambda)}$ 和 $S^{(\lambda)}$ 分别是 T 模和 S 模.

特别地,当 $\lambda=1$ 时,$T^{(1)}=T_1,S^{(1)}=S_1$,

当 $\lambda=2$ 时,$T^{(2)}=T_2,S^{(2)}=S_2$.

定理 1.2.1 三角模之间满足下列关系

$$T_0'\leqslant T_\infty\leqslant T_2\leqslant T_1\leqslant T_0\leqslant S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant S_\infty\leqslant S_0'.$$

证明略.

记

$$\mathscr{D}(T)=\{T\mid T\text{是}T\text{模}\},\mathscr{D}(S)=\{S\mid S\text{是}S\text{模}\}.$$

定理 1.2.2 三角模具有如下性质:

(1) $\forall T\in\mathscr{D}(T)$,有 $T_0'\leqslant T\leqslant T_0$;

(2) $\forall S\in\mathscr{D}(S)$,有 $S_0\leqslant S\leqslant S_0'$;

(3) $\forall T\in\mathscr{D}(T)$,$T$ 满足幂等律 $\Leftrightarrow T=T_0$;

(4) $\forall S\in\mathscr{D}(S)$,$S$ 满足幂等律 $\Leftrightarrow S=S_0$.

证明　(1) 因为 $\forall T \in \mathscr{D}(T)$，$T(a,1)=a$，而

$$T_0'(a,b)=\begin{cases}a, & b=1\\ b, & a=1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

则 $T_0' \leqslant T$. 由于 T 的单调性

$$T(a,b) \leqslant T(a,1)=a, T(a,b) \leqslant T(1,b)=b,$$

所以 $T(a,b) \leqslant a \wedge b$，即 $T \leqslant T_0$ 从而 $T_0' \leqslant T \leqslant T_0$.

同理证(2).

(3) 充分性显然. 设 T 满足幂等律，即 $T(a,a)=a$，则

$$T_0(a,b)=a \wedge b=T(a \wedge b, a \wedge b) \leqslant T(a,b) \leqslant T_0(a,b,),$$

从而 $T=T_0$.

同理证(4).

定义 1.2.2　$\forall a \in [0,1]$，$a'=1-a$ 是 a 的伪补，若 $T \in \mathscr{D}(T)$，$S \in \mathscr{D}(S)$ 满足

(1)　$$(T(a,b))'=S(a',b') \tag{1.7}$$

(2)　$$(S(a,b))'=T(a',b') \tag{1.8}$$

则称 T 和 S 是对偶模.

不难验证，T_0 与 S_0，T_1 与 S_1，T_2 与 S_2，T_∞ 与 S_∞ 是四对对偶模.

定义 1.2.3　设 T 和 S 是一对对偶模，$\forall A,B \in F(X)$，称

(1)　$$(A \,\dot\cup\, B)(x)=S(A(x),B(x)) \tag{1.9}$$

是 A 和 B 的模并；

(2)　$$(A \,\dot\cap\, B)(x)=T(A(x),B(x)) \tag{1.10}$$

是 A 和 B 的模交；

(3)　$$A'(x)=1-A(x) \tag{1.11}$$

是 A 的补.

定理 1.2.3　F 集的模运算满足下列性质：

(1) 交换律 $A \,\dot\cup\, B=B \,\dot\cup\, A$，$A \,\dot\cap\, B=B \,\dot\cap\, A$；

(2) 结合律 $(A \,\dot\cup\, B) \,\dot\cup\, C=A \,\dot\cup\, (B \,\dot\cup\, C)$，$(A \,\dot\cap\, B) \,\dot\cap\, C=A \,\dot\cap\, (B \,\dot\cap\, C)$；

(3) 同一律 $A \,\dot\cap\, X=A$，$A \,\dot\cup\, \varnothing=A$；

(4) 两极律 $A \,\dot\cup\, X=X$，$A \,\dot\cap\, \varnothing=\varnothing$；

(5) 对合律 $(A')'=A$；

(6) 对偶律 $(A \,\dot\cup\, B)'=A' \,\dot\cap\, B'$，$(A \,\dot\cap\, B)'=A' \,\dot\cup\, B'$；

(7) $A \,\dot\cap\, B \subseteq A$，$A \,\dot\cap\, B \subseteq B$，$A \subseteq A \,\dot\cup\, B$，$B \subseteq A \,\dot\cup\, B$；

(8) $\varnothing'=X$，$X'=\varnothing$.

证明略.

由此,三角模不一定满足幂等律、吸收律、分配律和补余律,所以代数系统 $(F(X), \dot{\cap}, \dot{\cup}, ')$ 不是格.

例 1.2.3 由例 1.2.1 中的四对模运算可以定义下列常用的四对 F 运算.

(1) 由 $T_0(a,b) = a \wedge b, S_0(a,b) = a \vee b$ 定义

$$(A \cap B)(x) = T_0(A(x),B(x)) = A(x) \wedge B(x)$$

$$(A \cup B)(x) = S_0(A(x),B(x)) = A(x) \vee B(x)$$

(2) 由 $T_1(a,b) = ab, S_1(a,b) = a + b - ab$ 定义

$$(A \hat{\wedge} B)(x) = T_1(A(x), B(x)) = A(x)B(x)$$

$$(A \hat{+} B)(x) = S_1(A(x),B(x)) = A(x) + B(x) - A(x)B(x)$$

(3) 由 $T_2(a,b) = \dfrac{ab}{1 + (1 - a)(1 - b)}, S_2(a,b) = \dfrac{a + b}{1 + ab}$ 定义

$$(A\dot{\varepsilon}B)(x) = T_2(A(x),B(x)) = \frac{A(x)B(x)}{1 + (1 - A(x))(1 - B(x))}$$

$$(A\overset{+}{\varepsilon}B)(x) = S_2(A(x),B(x)) = \frac{A(x) + B(x)}{1 + A(x)B(x)}$$

(4) 由 $T_\infty(a,b) = 0 \vee (a + b - 1), S_\infty(a,b) = 1 \wedge (a + b)$ 定义

$$(A \odot B)(x) = T_\infty(A(x),B(x)) = 0 \vee (A(x) + B(x) - 1)$$

$$(A \oplus B)(x) = S_\infty(A(x),B(x)) = 1 \wedge (A(x) + B(x)).$$

F 集合的以上模运算是经典集合的并、交运算的推广,若 F 集合退化为经典集合,则 S 模运算就是并运算,T 模运算就是交运算,伪补运算就是补运算.

§1.3 模糊集的分解定理

定义 1.3.1 设 $A \in F(X), \forall \lambda \in [0,1]$

(1) $$A_\lambda = \{x \in X \mid A(x) \geqslant \lambda\} \tag{1.12}$$

称为 A 的 λ 截集.

(2) $$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \in X \mid A(x) > \lambda\} \tag{1.13}$$

称为 A 的 λ 强截集. 特别地

(1) $$A_1 = \{x \in X \mid A(x) = 1\} \tag{1.14}$$

称为 A 的核,记为 kerA.

(2) $$A_{\underset{\cdot}{0}} = \{x \in X \mid A(x) > 0\} \tag{1.15}$$

称为 A 的支集,记为 Supp$A$. 显然,

(1) $A_\lambda \subseteq X, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq X, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq A_\lambda$,