机电工程新技术基础丛书

林国 编

工程数学方法

机械工业出版社

本书是机电工程新技术基础丛书之一。是为具有一般高等数学、普通物理知识的技术人员为跟上新技术的发展而写。全书在阐明物理概念的基础上，着重于应用，并适当照顾数学的严密性和系统性。全书共分八章：矩阵、复变函数、积分变换、数值计算、概率论、数理统计、运动稳定性、泛函分析。作者以较少的篇幅简明扼要地介绍了工程中常用的数学方法，内容深入浅出，便于自学。每章后附有习题。本书也可作为工科院校的教材。

工程数学方法

林 国 编

*

机械工业出版社出版（北京阜成門外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第 117 号）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168\ ^{1}/_{32}$・印张 $12^{3}/_{4}$・字数 336 千字

1987年 2 月北京第一版・1987年 2 月北京第一次印刷

印数 0,001— 5,050・定价 3.20 元

*

统一书号：15033・6455

前　言

当前科学技术的各个分支正以前所未有的速度向前发展，新技术、新工艺不断出现，特别，计算机的普及与使用大大地提高了劳动生产率。面临着科技发展的新形势，作为科学技术基础的数学也日显重要，广大的科技工作者迫切希望能获得必要的数学知识。但目前国内比较全面地、简要地介绍有关工程中的数学理论和方法的书不多，作为尝试编写了此书。

本书的主要对象是具有一般高等数学、普通物理知识的技术人员。由于当前在各类工程中所涉及的数学范围比较广泛，为能在有限的篇幅中尽多为读者介绍一些必备知识，本人根据多年教学经验对内容进行了筛选，努力做到“少而精”。在介绍重要结论时，着重介绍结论的内容及其应用，对于结论的严格证明有时就不能顾及，这方面读者可参考有关专著。为了便于读者自学，本书力求做到由浅入深、循序渐进。另外，尽量使本书的各章做到各自独立。各章末还配有少量习题供读者自我检查。

陈虎同志写了第三章中的傅里叶变换部分，胡志权同志担任了本书的主审，陈虎、黄玉喜、陈默子同志也审阅部分稿件。在本书编写过程中得到许多同志的支持与帮助在此表示感谢。

由于本人经验不足，水平有限，错误之处敬请读者批评指正。

林　国

《机电工程新技术基础丛书》出版说明

科学技术的飞速发展，要求在机械工业部门从事技术和管理工作的干部学习和了解有关专业的新水平、新成就、新技术、新知识。为了贯彻机械工业“上水平、上质量、上品种，提高经济效益”这个总方针，帮助在职工程技术人员学习业务，更新知识，更好地为祖国的四化建设服务，我们特组织编写了这套《机电工程新技术基础丛书》，第一批将陆续出版十七种。这十七种书是:《工程数学方法》、《弹塑性力学》、《机械优化设计》、《电机、电器优化设计》、《机电产品可靠性技术》、《能源利用与开发》、《液压传动与控制》、《测试技术》、《环境污染与治理》、《材料科学及其新技术》、《数控技术》、《微型计算机应用技术》、《电子电路技术》、《自动控制工程》、《系统工程概论》、《管理数学》、《技术经济分析》。

这套丛书的读者对象，主要是六十年代以来的大学和中专毕业生，现在从事机电产品的设计、制造工艺、技术改造、设备维修、质量管理、技术管理等工作的工程技术人员。

丛书内容着重于七十年代以来机电工程和管理工程有关学科的最新发展。重视阐明物理概念的基础上，介绍新技术、新理论的应用，以及如何进行有效管理和提高经济效益。为了适应更多读者的需要，丛书以介绍基础性知识为主，不过多地作专业理论的探讨和论证。使它既可以作为在职技术干部和管理人员的培训教材，又可兼顾自学需要，使具有一般高等数学、普通物理知识的读者能够看懂。

由于条件和水平所限，丛书内容难免有不妥之处，希望读者提出宝贵意见，帮助我们改进提高。

目　录

第一章 矩　阵

§1-1 矩阵的定义

当今矩阵已被广泛地应用于各个科学领域，为了便于了解这个概念的实际背景，在此举一些例子说明。

例如，假定我们要将某地区的某种物资从m个产地A_1，A_2，……，A_m调到n个销售地B_1，B_2，……，B_n。如果用a_{ij}表示由产地A_i（$i=1,2,\cdots,m$）调到销售地B_j（$j=1,2,\cdots,n$）的数量，那末一个调拨方案就可用以下的数表来表示：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

又如在解析几何中，当我们将坐标系按逆时针方向旋转一个角度θ时，一个点的新旧坐标间有如下关系式

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

其中（x，y）表示点的旧坐标，（x'，y'）表示点的新坐标。显然新旧坐标间的关系可由数表

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

所确定。

特别当我们用计算机去求解某个实际问题时，常常要归结到求解一个线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

显然一个线性代数方程组与如下数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

之间构成一一对应关系。

把这些数表撇开其实际含意，则得如下的矩阵概念。

定义 1 由 $m \times n$ 个数排成 m 行（横的）n 列（纵的）的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵。其中 a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素。

以后我们用大写的拉丁字母 A，B，C，…表示矩阵。

当 $m = n$ 时，矩阵 A 叫做 n 阶方阵。对于 n 阶方阵而言，从左上角到右下角的对角线叫做主对角线。

当 $n = 1$ 时，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 叫做列矩阵或列向量。

当 $m=1$ 时，

$$A=(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n})$$

矩阵 A 叫做行矩阵或行向量。

当一个矩阵 A 的所有元素都为零时，称 A 为零矩阵，记为 0。

一个 n 阶方阵 A 中若除了主对角线元素外，其余元素都为零，即 $a_{ij}=0(i\neq j)$，则称此矩阵为对角矩阵，其形式为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

通常把对角矩阵 A 记为 $A=\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn})$。

在对角矩阵中，若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$，则称此对角矩阵为单位矩阵，记为 E。即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

一个方阵若主对角线以下的元素都为零，即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，则称此矩阵为上三角形方阵。同样若主对角线以上的元素都为零，即当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，则称此矩阵为下三角形方阵。

定义 2 若两个矩阵的对应元素相等，我们就称这两个矩阵相等。

§1-2 矩阵的运算

定义 1 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，B 也是一个 $m\times n$ 矩阵，

即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots b_{mn} \end{pmatrix}$$

我们定义矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 A 与 B 之和，记为 $A+B$。

不难验证，它满足

结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$

交换律：$A+B=B+A$

类似地定义矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

为 A 与 B 之差，记为 $A-B$。

定义 2 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

我们定义矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

为数 k 与矩阵 A 的乘积，记为 kA。

不难验证它满足如下规律：

$$(k+l)A = kA + lA$$

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$k(lA) = (kl)A$$

$$1 \cdot A = A$$

例 1 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

求 $A+B$，$2A$，$3B$，$2A-3B$。

解

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 7+4 & 5+2 \\ 3+0 & -1+3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 10 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3B = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -11 & 7 \end{pmatrix}$$

定义 3 设矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

那末矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ c_{m1} & c_{m2}\cdots c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，称为矩阵$A$与$B$的乘积，记为$C=AB$。

关于矩阵的乘法有几点需要加以说明的：

（1）矩阵的乘法一般不满足交换律，即一般$AB\neq BA$。

例如

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 15 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 20 & 2 \end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

显然 $AB\neq BA$。

有时矩阵A与B可作乘积AB，但不能进行B与A的乘积运算。例如，如果A为$m\times p$矩阵，而B为$p\times n$矩阵，而$m\neq n$，则只能进行运算AB，但不能进行运算BA，因为B的列数不等于A的行数。

（2）当二矩阵之积为零矩阵时，并不意味着其中之一必定为零矩阵。

例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

但左边的两个矩阵均非零矩阵。

（3）当存在 $AB = AC$ 的关系时，$B = C$ 的关系并不一定成立。

例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然

$$AB = AC = 0,\ \text{但}\ B \neq C$$

（4）矩阵的乘法满足：

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

（5）线性代数方程组的矩阵表达式：

利用矩阵乘法可以把线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

改写为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则上述方程组又可改写为如下更为简捷的矩阵形式

$$AX = B$$

今后为了书写方便，常常把线性代数方程组表为矩阵形式。

定义 4 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则称矩阵

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 A 的转置。

也就是说把一个矩阵 A 的行列互换，所得到的矩阵称为矩阵 A 的转置，记为 A'。

显然 $m \times n$ 矩阵的转置是 $n \times m$ 矩阵。

可以验证矩阵的转置满足如下规律：

$$(A')' = A$$

$$(A + B)' = A' + B'$$

$$(AB)' = B'A'$$

$$(kA)' = kA'$$

定义 5 设 A 为一个方阵，如果 $A' = A$，则称 A 为对称矩阵。如果 $A' = -A$，则称 A 为斜对称矩阵。

显然如果 A 是斜对称矩阵，则有 $a_{ii} = -a_{ii}$，由此推得 $a_{ii} = 0$，即斜对称矩阵的主对角线上的所有元素均为零。

一个有趣的事实是任意方阵 A 都可唯一地表为：

$$A = M + S \tag{1-1}$$

其中　M是对称矩阵，S为斜对称矩阵。

事实上，如果对上式作转置，则得

$$A' = (M + S)' = M' + S' = M - S \tag{1-2}$$

把式（1-1）与式（1-2）联立，则得

$$M = \frac{1}{2}(A + A'),\qquad S = \frac{1}{2}(A - A')$$

直接验证可知 $M' = M$，$S' = -S$。

定义 6　设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

其中　$a_{ij}(t)$均为 t 的可微函数，则称矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{da_{11}(t)}{dt} & \frac{da_{12}(t)}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}(t)}{dt} \\ \frac{da_{21}(t)}{dt} & \frac{da_{22}(t)}{dt} & \cdots & \frac{da_{2n}(t)}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{m1}(t)}{dt} & \frac{da_{m2}(t)}{dt} & \cdots & \frac{da_{mn}(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

为矩阵 A 的导数，记为$\frac{dA}{dt}$。

容易验证它满足：

$$\frac{d(A + B)}{dt} = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d(AB)}{dt} = \left(\frac{dA}{dt}\right)B + A\left(\frac{dB}{dt}\right)$$

应当注意，当使用乘积法则时，上式各项的顺序应当保持不变，因为一般说来

$$\frac{dA}{dt} \cdot B \neq B \cdot \frac{dA}{dt}$$

类似地可定义矩阵A的积分。

定义 7 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}(t)$均为t的可积函数，则称矩阵

$$\begin{pmatrix} \int a_{11}(t)\mathrm{d}t & \int a_{12}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{1n}(t)\mathrm{d}t \\ \int a_{21}(t)\mathrm{d}t & \int a_{22}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{2n}(t)\mathrm{d}t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int a_{m1}(t)\mathrm{d}t & \int a_{m2}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{mn}(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

为矩阵A的积分，记为$\int A(t)\mathrm{d}t$。

§1-3 行列式及其性质

本节是为下节介绍逆矩阵的计算作准备的，主要介绍一些行列式的基本知识。

定义 1 由 1，2，…，n 组成的有序数组称为一个n级排列。

例如，2431 是一个 4 级排列，45321 是一个 5 级排列。由初等的数学知识可以知道，n 级排列的总个数是 $n!$ 个。

定义 2 在一个排列中，我们任意考察其中一对数，如果前面的数大于后面的数，那末我们就称它为一个逆序。一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。

例如，2431 中 21，43，41，31 是逆序，故 2431 的逆序数就是 4 。

45321 的逆序数是 9 。