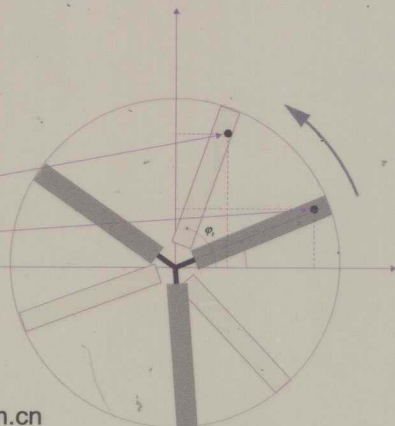


雷达中的 微多普勒效应

The MICRO-DOPPLER EFFECT
in Radar

Victor C. Chen【美】 著

吴顺君 杜兰 刘宏伟 译



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

雷达中的微多普勒效应

The Micro-Doppler Effect in Radar

Victor C. Chen [美] 著

吴顺君 杜 兰 刘宏伟 译

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

微多普勒效应是由物体及其构件的微运动产生的物理现象。雷达目标的微多普勒特征对于提高雷达的检测和分辨能力,改善雷达成像和目标识别的性能有重要意义。

当前,雷达微多普勒效应仍是一个充满挑战性的前沿研究课题,本书是世界上首部系统阐述雷达微多普勒效应专著的中译本。它从刚体和非刚体的运动学特性出发,介绍了雷达微多普勒效应的原理和理论,深入分析了微多普勒特征的提取方法和潜在应用。

本书既可作为雷达、导航、通信、声呐和电子对抗等专业领域的科技、研发人员、部队的电子信息科技干部和技术人员的参考书,也可作为高等学校电子信息类学科专业的本科生或研究生的辅助学习参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

雷达中的微多普勒效应 / (美)陈 (Chen, C.) 著; 吴顺君, 杜兰, 刘宏伟译.

—北京: 电子工业出版社, 2013. 7

书名原文: Micro-Doppler effect in radar

ISBN 978-7-121-20532-2

I. ①雷… II. ①陈… ②吴… ③杜… ④刘… III. ①雷达—多普勒效应—研究
IV. ①TN95

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 145363 号

策划编辑: 刘宪兰

责任编辑: 刘真平

印 刷: 三河市鑫金马印装有限公司

装 订: 三河市鑫金马印装有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 720×1000 1/16 印张: 18 字数: 352.8 千字

印 次: 2013 年 7 月第 1 次印刷

定 价: 48.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

译者序

多普勒效应是由于目标和雷达之间的相对运动使雷达回波信号产生多普勒频移的物理现象。多普勒效应已在雷达中得到广泛应用，并在抑制雷达杂波、提高雷达分辨能力、雷达成像等方面发挥了重大作用。近十多年来，由雷达目标或其构件的振荡运动（微运动）产生的微多普勒效应引起了雷达工作者的广泛关注。原著作者维克托 C. 陈博士长期工作于美国海军研究实验室，从事逆合成孔径雷达成像、雷达信号和成像的时频分析、非合作目标识别，以及雷达微多普勒特征分析等研究工作。陈博士是国际知名的雷达专家和微多普勒效应研究的先驱者。此专著是世界上第一本正式出版的有关雷达微多普勒效应的专著，也是陈博士十多年潜心研究的结晶。

此书从刚体和非刚体运动的运动学特性出发，系统阐述了微多普勒效应的有关理论，建立了刚体（如钟摆、旋翼、陀螺、涡轮机）和非刚体（如人、鸟、四足动物）的微运动模型，深入分析了雷达微多普勒效应的产生机理和微多普勒特征信息提取等问题。书中的许多仿真举例无疑会对读者理解和应用微多普勒效应提供有力帮助。而书中无偿提供的 MATLAB 源代码也是读者仿真研究和分析雷达微多普勒特征的有用工具。

当前，微多普勒效应仍是一个充满挑战性的前沿研究课题，有许多有趣而重要的问题期待着有志者去探究。我们希望此专著的翻译和出版能为我国雷达、导航、通信、声呐和电子对抗等领域的科技人员，部队的电子信息科技干部和管理人员，以及电子信息学科的研究生提供有益的参考。

此书的翻译出版工作得到了保铮院士、张履谦院士、王小谟院士和毛二可院士的积极支持，他们对译稿提出了许多宝贵意见，在此我们向四位德高望重的院士表示深深的谢意。

此书的第 1 章由刘宏伟翻译，第 2 章、第 3 章和索引由吴顺君翻译，第 4~6 章由杜兰翻译，全书由吴顺君统一审校。此书在翻译中得到了西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室许多同事的支持和帮助，在此向他们表示感谢。特别是纠博博士对此书及原著所附 DVD 磁盘中的 MATLAB 源代码

进行了校验仿真，我们对纠博博士认真细致的工作表示衷心感谢。

为方便教学，我们将原著附带的 DVD 磁盘中提供的 MATLAB 源代码放在电子工业出版社华信教育资源网 (<http://www.hxedu.com.cn>)，供购买本书的读者免费下载。

由于译者水平所限，书中可能存在不当和疏漏之处，敬请读者和同人批评指正。同时，我们也向所有关心和支持此书翻译出版工作的人们表示感谢。

译 者

中文版前言

我感到荣幸能为本书中文版的读者写这篇前言。同时，我也感谢吴顺君教授把这本书译成中文版。

我本人于1998年开始涉足雷达微多普勒现象的研究。当时，我正在致力于时频变换在雷达中的应用。有人给我一组雷达测量数据，其中的雷达目标是一个正在步行的人。从这组测量数据所产生的一系列目标成像中，我们清晰地看到一个步行人的亮点。同时，还看见亮点两旁沿多普勒轴线上由胳膊和腿的摆动所引起的模糊条纹。为了进一步探索胳膊和腿随时间摆动的细节，我决定用时频变换来分析这组雷达回波数据。这样一来，随时间摆动的手臂、腿和脚的多普勒特征便清楚地展示在时频平面上了。这是我首次观察到的有关步行人的雷达微多普勒特征。

从此，我便一直致力于雷达微多普勒现象的基本理论和实验的研究工作。在同事和学生的协助下，我们进一步开展了雷达微多普勒原理和应用的深入研究，采集了大量有关微动目标的雷达实验数据，并提出了各种有关雷达微多普勒计算机仿真实验的研究模型和计算机程序。

在过去十多年里，越来越多的雷达研究和工程人员步入了雷达微多普勒现象的研究和应用，并在学术期刊和会议录发表了许多关于微多普勒特征分析和应用的论文。于是，我决定写一本关于雷达微多普勒现象的书，把我自己十几年来积累的有关微多普勒理论分析的经验和成果，加上计算机程序软件，一并贡献给那些有志于学习和应用雷达微多普勒分析的读者。

在我担任 IEEE 空间电子系统期刊雷达系统的编辑工作期间，我收到并审阅的许多稿件是出自中国从事雷达微多普勒现象的研究人员。我相信这本中译本会为更多中国读者踏入微多普勒现象的领域提供方便。

在我这本原版书于2011年出版之后，我和我的同事们组织了一系列有关雷达微多普勒原理、特征分析和应用的辅导课及讲习班。从中，我注意到学员们有意要学到如何把微多普勒特征的一般原理用于具体的应用实例中。

我希望这本书对从事微多普勒特征应用的学生和专业人士可以成为一本有所裨益的参考书。

此外，这本中文版还纠正了原版中的一些排印错误，敬谨向译者和编辑表示谢忱。

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Victor C. Chen', written in a cursive style.

Victor C. Chen

于美国弗吉尼亚州麦克连市

前 言

微多普勒效应最初被引入到相参激光系统中是为了测量物体的运动性质，例如振动速率和振动偏移。微多普勒频移可以用独特特征来特征化，这种特殊特征代表从物体的结构部件产生的复杂精细特性。在激光雷达系统中，即使用一个很低的振动速率，物体振动的微偏移就能容易地引起大的多普勒频移。与激光雷达相比，在我们感兴趣的微波雷达中，由于波长较长，要观察由微振动引起的微多普勒调制是困难的。然而，如果振动速率和振动偏移量相乘，且乘积足够大，那么振动的多普勒调制就可以被观察到。例如，由旋翼叶片的旋转产生的微多普勒频移将被检测到，因为它们的旋臂越长，则旋臂叶尖的速度越高。尽管由旋转的旋翼叶片引起的多普勒频移已被观察到很长时间了，但一直到联合时频域分析被引入到雷达信号分析之前，多普勒频移的时变特性并没有受到足够的重视。

1998年，当我正从事联合时频域分析应用于雷达图像和信号处理时，我得到了行人的雷达实验数据，实验中雷达是固定的，而人是走动的。用固定的雷达采集的实验数据实际上是逆合成孔径雷达（ISAR）数据，因而可以得到行人的一系列距离—多普勒像。

现在有各种各样的算法可以用来产生聚焦的ISAR图像。然而，任何未作补偿的运动将引起图像上沿着距离域的模糊，并且，如果相参处理时间较长，未补偿的运动可产生时变多普勒频移，可能引起ISAR图像在多普勒域上的模糊。从行人的一系列距离—多普勒像，在与步速相关的多普勒频率上沿着距离我们可以清楚地看到行人的聚焦的鲜明斑点。但是，在距离—多普勒像上，存在由行人的未补偿的摆动手臂和腿引起的沿着多普勒域的污迹。为了开发利用摆动的手臂和腿的详情，我们将联合时频域分析应用于污染部分周围的雷达距离像。作为一个直接的结果，在身体躯干运动的多普勒频移周围，时频图像清楚地显示出手臂和腿的多普勒摆动。那是我们画出的第一个行人的微多普勒特征。此特征清楚地显示了由人体的结构部件，如脚、手、手臂和腿的周期运动引起的时变频率分布。

微多普勒特征的开发利用不要求距离分辨。任何连续波（CW）雷达都好到足以产生目标的微多普勒特征，但是，同时具有距离和多普勒分辨的ISAR距离—多普勒像，在距离—多普勒域揭示目标或其结构部件在距离—多

普勒域上的位置方面是有用的。那就是为什么在本书中我们宁可用二维距离像来产生微多普勒特征而不用一维时间序列的原因。从二维的距离像，在采用了运动补偿和自聚焦算法以后，目标的距离—多普勒像可以被重构。在另一方面，从目标上结构部件未作补偿的旋转，我们也可以提取目标的微多普勒特征。

在最近十年中，大量的有关雷达中的微多普勒效应的文章已经发表。本书的目的是介绍微多普勒效应的原理和理论，揭示微多普勒特征的潜在应用，并提供一种产生感兴趣目标的微多普勒特征的简单易行的工具。除了实际雷达数据的分析以外，仿真是研究雷达中的微多普勒效应的重要手段。基于本书中所提供的仿真例子，鼓励读者进行修改并将这种仿真拓展到其他感兴趣的应用上。

在本书中，第 1 章是对雷达中微多普勒效应的一种介绍。第 2 章给出了雷达中微多普勒效应的概念和数学。在第 3 和第 4 章中，介绍了某些可用的 RCS 预测模型，以便计算刚性和非刚性物体的微多普勒特征。几种典型的例子与 MATLAB 源代码一起在这几章中提供。第 5 章专注于生物运动的感知和生物运动信息与微多普勒特征之间的关系。这有助于基于目标的微多普勒特征来识别带运动学行为的目的。第 6 章总结了雷达中的微多普勒效应，并列出了在微多普勒研究方面的某些挑战和展望。

为了教学的目的，本书在附带的 DVD 磁盘中提供了 MATLAB 源代码。这些源代码由贡献者在保持现状的基础上提供，且已声明不作任何担保。源代码的贡献者不承担任何损坏引起的法律责任。

本书中所提供的 MATLAB 源代码有部分归功于我的学生 Yang Hai 和 Yinan Yang 的努力。我想对他们表示衷心的感谢。我也要感谢 Raghu Raj 在基于物理部件的分解方法和在第 5 章中有关图表方面的工作。我要特别感谢 David Tahmoush 在四足动物运动的微多普勒特征以及为本书第 4 章准备有关图表方面令人关注的工作。

我也希望表达我对 William Miceli，我的老朋友和我的微多普勒研究的资助者的感谢，感谢他的一贯支持和过去十年对雷达中的微多普勒效应的研究工作的有益讨论，特别是对第 4 章中轮转全景摄影机拍摄的照片和第 6 章中的听觉方法的技术讨论。我对本书的评阅人所给出的建设性建议心存感激，同样也感谢 Artec 出版社的员工对本书出版的关注和支持。

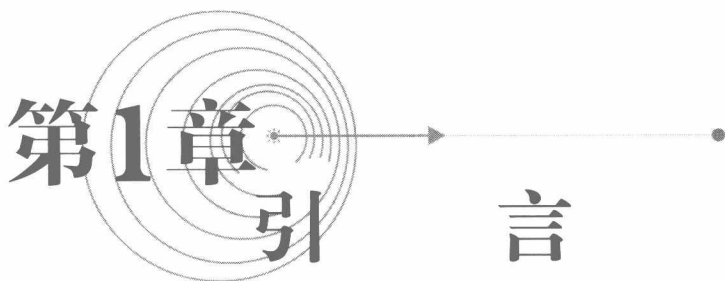
目 录

| | |
|--------------------|----|
| 第 1 章 引言 | 1 |
| 1.1 多普勒效应 | 2 |
| 1.2 相对论多普勒效应和时间膨胀 | 3 |
| 1.3 雷达中观察到的多普勒效应 | 6 |
| 1.4 多普勒频移的估计和分析 | 8 |
| 1.5 多普勒频率估计的克拉美-罗界 | 14 |
| 1.6 微多普勒效应 | 14 |
| 1.7 雷达中观察到的微多普勒效应 | 15 |
| 1.8 微多普勒频移的估计和分析 | 16 |
| 1.8.1 瞬时频率分析 | 17 |
| 1.8.2 联合时频分析 | 18 |
| 1.9 物体的微多普勒特征 | 20 |
| 参考文献 | 22 |
| 附录 1A MATLAB 源代码 | 26 |
| | |
| 第 2 章 雷达微多普勒效应基础 | 31 |
| 2.1 刚体运动 | 31 |
| 2.1.1 欧拉角 | 32 |
| 2.1.2 四元数 | 37 |
| 2.1.3 运动方程 | 39 |
| 2.2 非刚体运动 | 40 |
| 2.3 运动物体的电磁散射 | 43 |
| 2.3.1 目标的雷达截面积 | 43 |
| 2.3.2 雷达截面积预测方法 | 45 |
| 2.3.3 运动物体的电磁散射 | 46 |
| 2.4 计算微多普勒效应的基础数学 | 47 |
| 2.4.1 微运动目标引起的微多普勒 | 48 |
| 2.4.2 振动引起的微多普勒频移 | 50 |
| 2.4.3 旋转引起的微多普勒频移 | 53 |

| | | |
|--------------|-----------------------|-----------|
| 2.4.4 | 圆锥运动引起的微多普勒频移 | 55 |
| 2.5 | 双基微多普勒效应 | 60 |
| 2.6 | 多基微多普勒效应 | 64 |
| 2.7 | 微多普勒估计的克拉美-罗界 | 65 |
| | 参考文献 | 66 |
| | 附录 2A | 67 |
| | 附录 2B MATLAB 源代码 | 69 |
| 第 3 章 | 刚体运动的微多普勒效应 | 81 |
| 3.1 | 钟摆振荡 | 82 |
| 3.1.1 | 钟摆的非线性运动动力学建模 | 82 |
| 3.1.2 | 钟摆的雷达截面积 (RCS) 建模 | 88 |
| 3.1.3 | 振荡钟摆的雷达后向散射 | 89 |
| 3.1.4 | 振荡钟摆产生的微多普勒特征 | 91 |
| 3.2 | 直升机旋翼 | 92 |
| 3.2.1 | 旋转旋翼叶片的数学模型 | 93 |
| 3.2.2 | 旋转旋翼叶片的 RCS 模型 | 97 |
| 3.2.3 | 物理光学眼面预测模型 | 99 |
| 3.2.4 | 旋翼叶片的雷达后向散射 | 101 |
| 3.2.5 | 旋翼叶片的微多普勒特征 | 102 |
| 3.2.6 | 所需的最小脉冲重复频率 | 106 |
| 3.2.7 | 旋翼叶片微多普勒特征的分析 and 说明 | 108 |
| 3.3 | 自旋对称陀螺 | 110 |
| 3.3.1 | 对称陀螺的无外力旋转 | 112 |
| 3.3.2 | 扭矩引起的对称陀螺的旋转 | 113 |
| 3.3.3 | 对称陀螺的 RCS 模型 | 115 |
| 3.3.4 | 对称陀螺的雷达后向散射 | 115 |
| 3.3.5 | 进动陀螺产生的微多普勒特征 | 116 |
| 3.3.6 | 进动陀螺微多普勒特征的分析 and 说明 | 116 |
| 3.4 | 风力涡轮机 | 119 |
| 3.4.1 | 风力涡轮机的微多普勒特征 | 119 |
| 3.4.2 | 风力涡轮机微多普勒特征的分析 and 说明 | 120 |
| | 参考文献 | 121 |
| | 附录 3A MATLAB 源代码 | 123 |

| | |
|-----------------------------------|-----|
| 第 4 章 非刚性物体运动的微多普勒效应 | 143 |
| 4.1 人体的关节运动 | 145 |
| 4.1.1 人的行走 | 145 |
| 4.1.2 人体行走周期性运动的描述 | 146 |
| 4.1.3 人体运动的仿真 | 147 |
| 4.1.4 人体部件的参数 | 147 |
| 4.1.5 根据经验的数学参数化模型推导的人体行走模型 | 149 |
| 4.1.6 获取人体运动的运动学参数 | 159 |
| 4.1.7 三维运动学数据采集 | 161 |
| 4.1.8 基于角度循环图模式的角度运动学特性 | 164 |
| 4.1.9 行人的雷达后向散射 | 168 |
| 4.1.10 人体运动数据处理..... | 169 |
| 4.1.11 人体运动引起的雷达微多普勒特征..... | 171 |
| 4.2 鸟类的扑翼运动 | 174 |
| 4.2.1 鸟类扑翼运动学 | 175 |
| 4.2.2 鸟类扑翼的多普勒观测 | 177 |
| 4.2.3 鸟类扑翼的仿真 | 178 |
| 4.3 四足动物的运动 | 181 |
| 4.3.1 四足运动的建模 | 182 |
| 4.3.2 四足运动的微多普勒特征 | 182 |
| 4.3.3 小结 | 183 |
| 参考文献..... | 184 |
| 附录 4A MATLAB 源代码 | 187 |
| 附录 4B MATLAB 源代码 | 231 |
| | |
| 第 5 章 微多普勒特征的分析与解释 | 243 |
| 5.1 生物运动感知 | 244 |
| 5.2 生物运动的分解 | 246 |
| 5.2.1 基于统计的分解方法 | 246 |
| 5.2.2 联合时频域中的微多普勒特征分解 | 247 |
| 5.2.3 基于物理结构的分解 | 247 |
| 5.3 从微多普勒特征中提取特性 | 250 |
| 5.4 从微多普勒特征中估计运动学参数 | 253 |
| 5.5 人体运动识别 | 257 |

| | |
|--------------------------------|------------|
| 5.5.1 用于人体运动识别的特性 | 257 |
| 5.5.2 异常的人类行为 | 257 |
| 5.5.3 小结 | 258 |
| 参考文献 | 259 |
| 第6章 总结、挑战和展望 | 263 |
| 6.1 总结 | 264 |
| 6.2 挑战 | 264 |
| 6.2.1 分解微多普勒特征 | 264 |
| 6.2.2 基于微多普勒特征的特性提取和目标辨识 | 265 |
| 6.3 展望 | 266 |
| 6.3.1 多基微多普勒分析 | 266 |
| 6.3.2 基于微多普勒特征的分类 | 267 |
| 6.3.3 基于微多普勒辨识的听觉方法 | 268 |
| 6.3.4 穿墙环境下的微多普勒特征 | 268 |
| 参考文献 | 269 |
| 术语表 | 271 |



第1章 引言

Chapter 1

雷达发射电磁信号 (EW) 到物体并接收物体的回波信号。基于接收信号的延迟时间，雷达可以测量目标的距离。如果物体是移动的，接收信号的频率将偏离发射信号的频率，称为多普勒效应 [1, 2]。多普勒频移取决于移动物体的径向速度，即在视线 (LOS) 方向上的速度分量。基于接收信号的多普勒频移，雷达可以测量动目标的径向速度。如果除了主体移动外，物体或物体的任何结构部件还有摆动，则这种摆动将在回波信号上引起附加的频率调制，并在主体移动产生的发射信号多普勒偏移频率附近产生边频。这种附加的多普勒调制称为微多普勒效应 [3-5]。

多普勒频移常用接收信号的傅里叶变换在频域进行测量。在傅里叶频谱中，峰值分量表示由物体移动的径向速度引起的多普勒频移。多普勒频移的宽度给出了微多普勒效应产生的速度频散的估计。为了精确跟踪雷达接收信号的相位信息，雷达发射机必须由高稳定的频率源驱动以保持完整的相位相干性。

微多普勒效应可用来决定物体的运动学性质。例如，车辆发动机产生的振动可以通过车身的表面振动来检测。通过测量车身表面的微多普勒特性，

可以测量发动机的转速并用来识别特定类型的车辆，例如带燃气涡轮机的坦克或者带内燃机的汽车。在物体上观测到的微多普勒效应可以用其特征（物体的特殊特征，它代表着从此物体的结构部件产生的精细频率调制，并被表示在联合的时间和多普勒频域中）来特征化。

1.1 多普勒效应

在 1842 年，澳大利亚数学家和物理学家克里斯汀·多普勒（Christian Doppler）阐述了星体的彩色光效应上的一种现象 [1]。光源显现的彩色由于光源的运动而发生变化。对于朝向观察者移动的光源，光的彩色会变得更蓝，而离开观察者移动时，光将变得更红。这是首次称为多普勒（Doppler）效应的现象被发现。这种现象表明所观察到的光源频率（或波长）与光源相对于观察者的速度有关。光源的移动引起源的前面的波被压缩，而源的后面的波被拉伸（见图 1.1）。

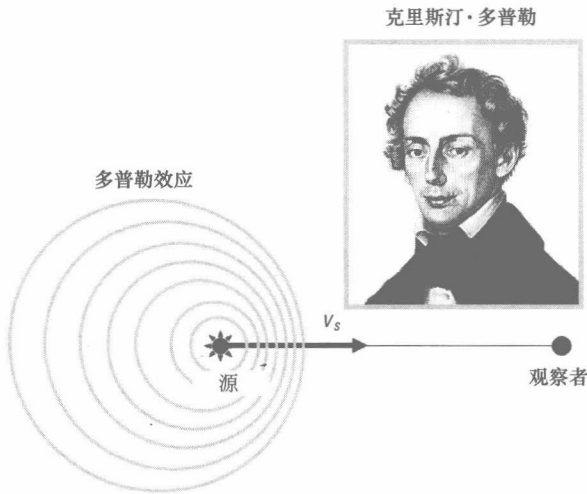


图 1.1 在 1842 年，克里斯汀·多普勒首次发现了由于光源移动而改变了光源显现的彩色的现象，称为多普勒效应

在 1843 年，多普勒效应用不同速度移动火车汽笛声波进行了实验验证。声源的波长被定义为 $\lambda = c_{\text{sound}} / f$ ，此处 c_{sound} 是声波在给定媒质中的传播速度， f 是声源的频率。如果声源仅以速度 v_s 相对于媒质移动，由观察者感知的频率是

$$f' = \frac{c_{\text{sound}}}{c_{\text{sound}} \mp v_s} f = \frac{1}{1 \mp v_s / c_{\text{sound}}} f \quad (1.1)$$

如果 $v_s / c_{\text{sound}} \ll 1$, 则由观察者感知的多普勒频移近似为

$$f' = \frac{1}{1 \mp v_s / c_{\text{sound}}} f \cong (1 \pm \frac{v_s}{c_{\text{sound}}}) f \quad (1.2)$$

如果源是固定的, 而观察者以速度 v_o 相对于媒质移动, 则观察者感知的频率为

$$f' = \frac{c_{\text{sound}} \pm v_o}{c_{\text{sound}}} f = (1 \pm \frac{v_o}{c_{\text{sound}}}) f \quad (1.3)$$

如果源和观察者都移动, 则观察者感知的频率变为

$$f' = \frac{c_{\text{sound}} \pm v_o}{c_{\text{sound}} \mp v_s} f = \frac{1 \pm v_o / c_{\text{sound}}}{1 \mp v_s / c_{\text{sound}}} f \quad (1.4)$$

当源和观察者相向靠近时, 应用式(1.4)中上面的符号组; 而当源和观察者背向远离时, 应用式(1.4)中下面的符号组。

1.2 相对论多普勒效应和时间膨胀

与声音相比, 在光或电磁波的传播中不涉及媒质。对于源和观察者来说, 光或电磁波的传播速度 c 都是常数。

对于光或电磁波, 源和观察者之间的相对运动引起的频率或波长的变化被考虑为狭义相对论效应 [6]。因此, 多普勒频移必须修正成与劳伦兹 (Lorentz) 变换相一致。相对论多普勒效应不同于经典多普勒效应, 因为它包含了狭义相对论的时间膨胀效应, 并且不涉及作为参考点的波传播媒质。

当一个频率为 f 的光或电磁源以速度 v_s 沿着角度 θ_s 移动时, 正如图 1.2 所示, θ_s 是与源 S 到观察者 O 的方向有关的一个角度, 在 t_1 和 t_2 发射波的两个连续的波峰之间的时间间隔由下式决定

$$\Delta t_s = t_2 - t_1 = \frac{\gamma}{f} \quad (1.5)$$

此处, $\gamma = 1/(1 - v_s^2/c^2)^{1/2}$ 是代表相对论时间膨胀的一个因子, c 是光或电磁波的传播速度。然后, 在观察者处两个连续的波峰到达之间的时间间隔是

$$\Delta t_o = \left(t_2 + \frac{r_2}{c} \right) - \left(t_1 + \frac{r_1}{c} \right) = \frac{\gamma}{f} \left(1 - \frac{v_s \cdot \cos \theta_s}{c} \right) \quad (1.6)$$

因此, 相应的由观察者所观察到的频率变成

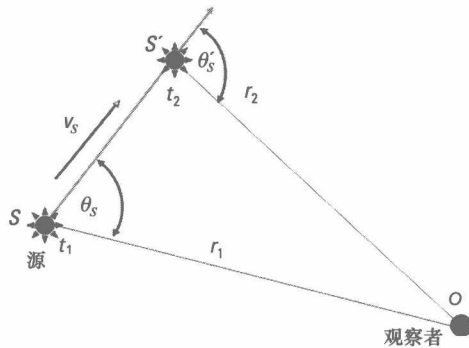


图 1.2 仅源以速度 v_s 在角度 θ_s 上移动的情况下的多普勒效应， θ_s 是与源 S 到观察者 O 的方向有关的角度

$$f' = \frac{1}{\Delta t_o} = \frac{1}{\gamma} \frac{f}{1 - \frac{v_s \cos \theta_s}{c}} \quad (1.7)$$

如果源的移动方向与源到观察者的方向之间的夹角 θ'_s 在波到达观察者的时刻被测量，则观察者观察到的频率变成

$$f' = \gamma \left(1 + \frac{v_s \cos \theta'_s}{c} \right) f \quad (1.8)$$

因此，两个角度 θ_s 和 θ'_s 通过下式相关

$$\cos \theta_s = \frac{\cos \theta'_s + v_s/c}{1 + \frac{v_s \cos \theta'_s}{c}} \quad (1.9)$$

或者

$$\cos \theta'_s = \frac{\cos \theta_s - v_s/c}{1 - \frac{v_s \cos \theta_s}{c}} \quad (1.10)$$

如果源和观察者都如图 1.3 所示那样在二维情况下移动，则波在被发射时刻的所观察到的频率类似于式(1.4)，为

$$f' = \frac{1}{\gamma} \frac{1 \pm \frac{v_o \cos \theta_o}{c}}{1 \mp \frac{v_s \cos \theta_s}{c}} f \quad (1.11)$$

此处，正如图 1.3 中所述， θ_s 和 θ_o 分别表示在波被发射时刻源移动的角度和