高等数学例题与习题集

（三）

复变函数

（俄）A. K. 博亚尔丘克 编著

高策理 郑元禄 译

清华大学出版社

高等数学例题与习题集(三)

复变函数

A. K. 博亚尔丘克 编著
高策理　郑元禄　译

清华大学出版社
北京

内容简介

《高等数学例题与习题集》是一套目前在俄国具有广泛影响的高等数学辅导用书. 在我国，无论是高等数学教材的编写方面，还是高等数学的教学方面，都与俄国的高等数学教育有着很深的渊源. 因此，将这套书译成中文，介绍给国内读者.

本书为《高等数学例题与习题集》的第三卷，内容是关于复变函数的例题与习题，具体包括数学分析概论、复数与复变函数、复平面内的初等函数、复平面内的积分计算、牛顿-莱布尼茨积分与柯西积分、解析函数的级数、孤立奇点、解析开拓、留数及其应用、解析函数的几何理论的一些一般问题共 8 章内容. 每章开始给出必要的理论材料，然后是各类典型例题的演算，最后是为读者安排的练习题，书末给出练习题的答案.

北京市版权局著作权合同登记号　图字：01-2001-0655

图书在版编目(CIP)数据

高等数学例题与习题集(三)·复变函数/(俄罗斯)博亚尔丘克编著；高策理，郑元禄译.
—北京：清华大学出版社，2008.5
ISBN 978-7-302-16727-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①博… ②高… ③郑…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－习题 ②复变函数－高等学校－习题　Ⅳ. O13-44 0174.5-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 001061 号

责任编辑：刘　颖　王海燕
责任校对：刘玉霞
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社　总　机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印　张**：24.25　**字　数**：515 千字
版　次：2008 年 5 月第 1 版　**印　次**：2008 年 5 月第1 次印刷
印　数：1～5000
定　价：35.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　产品编号：016611－01

译 者 序

数学，无论从其对其他学科的影响上看，还是从数学自身发展上看，它的重要性都是不言而喻的. 高等数学，作为大多数理工科大学生的必修课，在锻炼学生的逻辑思维，以及为后续专业课程的学习打好基础方面，其重要性更是不言而喻的. 如何学好高等数学，仁者见仁，智者见智，但数学习题的作用是大家公认的.

《高等数学例题与习题集》是由四位俄国数学家所编写的一套高等数学辅导书，全书共 5 册，其中第 1 册包括分析引论，一元函数微分学，不定积分，定积分 4 章内容；第 2 册包括级数，多元函数微分学两部分内容；第 3 册包括含参变量积分，重积分与曲线积分两部分内容；第 4 册是关于复变函数的内容，包括数学分析基础，复数与复变函数，复平面上的初等函数，复平面上的积分，解析函数级数、孤立奇点，解析延拓，留数及其应用，解析函数几何理论的一些问题共 8 章内容；第 5 册是关于微分方程理论的内容，包括一阶微分方程，高阶微分方程，微分方程组，一阶偏微分方程，微分方程解的逼近方法，稳定性与相轨道，解线性微分方程的 Laplace 积分变换法共 7 章内容.

作者曾编写过高等数学习题集，本书的前 3 册是他们两卷本辅导书《数学分析例题与习题》的修改与补充. 本套书从 1997 年开始出版发行，历时两年于 1999 年完成. 并已被翻译成西班牙文出版发行.

本套书采用统一风格，每章的开始给出必要的理论材料，然后给出各种类型的例题，最后是为读者准备的习题，书末给出习题答案. 全书共演算例题 2823 道，其中第 1 册 805 道，第 2 册 497 道，第 3 册 369 道，第 4 册 363 道，第 5 册 789 道；收录习题 1998 道，其中第 1 册 923 道，第 2 册 328 道，第 3 册 238 道，第 4 册 193 道，第 5 册 316 道. 这些例题涵盖了各部分内容的典型习题和较难处理的习题，这样既有利于帮助读者尽快地掌握解决典型题目的方法，促进对基本概念和基本定理的理解，也可以通过一些较难题目的解法来提高知识的综合运用能力，用以强化和锻炼综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 本书参考了许多知名的俄文版习题集，其中包括在国内久负盛名的吉米多维奇的《数学分析习题集》(人民教育出版社 1958 年翻译出版)，沃尔科维斯基等的《复变函数论习题集》(上海科学技术出版社 1981 年翻译出版)，菲利波夫等的《微分方程习题集》(上海科学技术出版社 1981 年翻译出版). 例如，前 3 册中所演算的例题就包括了《数学分析习题集》中的绝大多数典型题和难题.

我国近代的高等教育，无论是在教材的编写方面，还是在教学方法方面，都与俄罗斯(前苏联)的高等教育有着很深的渊源. 因此，我们将此套辅导书翻译成中文，一方面给读

者提供一套辅导书；另一方面，也将俄罗斯当代的高等数学教学水准介绍给国内高校的学生和数学教师.

本套书并没有局限于高等数学教科书的内容，而是站在较高的角度来梳理高等数学中各部分内容之间以及它们与其他相关分支之间的关系，并且将一些相关分支的内容纳入到高等数学的背景下来讨论（反映在理论材料、例题演算和习题中）. 例如，书中涉及了集合论、线性空间、矩阵、函数逼近论等方面的内容. 这样有利于读者从全局上把握高等数学的知识，以加深对这些知识的理解和认识.

本套书的读者对象主要为工科院校的学生以及理科或师范院校数学系的学生. 对于广大的高等院校的数学教师来讲，它也是非常有用的参考书.

本套书已由清华大学出版社自俄罗斯引进中文版权，准备分 4 册出版发行（原书第 2 册和第 3 册合并为一册）. 清华大学数学系组织了多名教授、副教授翻译. 第 3 册的翻译分工为：第 1～4 章由高策理翻译，第 5～8 章由郑元禄翻译.

本书的责任编辑为清华大学出版社的刘颖同志，他在文稿编辑、成稿校对等环节上花费了大量心血，做了很好的工作；另外数学科学系的萧树铁教授、谭泽光教授、白峰杉教授等对本书的翻译给予了很多支持与鼓励，在此向他们表示感谢. 北京大学俄语系的王辛夷老师、林百学老师在联系俄罗斯出版社及其他事情上给了译者很多帮助，在此表示感谢.

由于译者的水平所限，书中自有很多错误或者不妥之处，敬请读者批评指正.

译 者

前　　言

在涉及复变函数理论的教学文献中，有很多内容丰富的课本和习题集，著名的作者有 M. A. 拉夫伦捷耶夫，B. V. 萨巴特，I. I. 普利瓦洛夫，A. I. 马尔库舍维奇，A. V. 比察才，M. A. 叶夫格拉佛夫，A. 古尔维茨，R. 库朗等. 遗憾的是，这些文献中的大多数，无论从篇幅上，还是从材料的选取与分布上，都与俄罗斯及其他独联体国家的大学中数学物理专业的复变函数论教学计划不相适应. 极少数的文献是作为解题参考书的，对于新教师，尤其是对于大学生和研究生，不容易从长篇大论的书中抽出基本的材料，来组织一门完整的逻辑通顺的课程，满足教学计划.

以上所说的情况，使作者产生了一个念头，要写一本现代水平的书，一方面来适应大学课程的教学计划；另一方面又不拘于讨论细节，而是包含大量解答题. 本书中包含了四百多道中等以上难度的解答题.

很多复变函数论方面的书在基本的专业术语上不一致，不明确. 比如，解析函数这一基本概念在一本书的不同地方可能有不同的意义. 针对这种情况，作者对所有基本概念给出了完整的定义.

本书的第 1 章给出了函数的严格定义（不同于大多数教科书的写法），看作是集合上的运算，以及度量空间理论的基本问题. 不编入这些材料的话，就不可能在书中叙述一些现代数学的基本问题. 因此，读者浏览一下篇幅不大的第 1 章对理解以后的章节是有益的. 后面的章节包含了关于解析函数理论的经典问题，这些理论归功于 19 世纪柯西、黎曼及维尔斯特拉斯的开创性工作.

书中对保角映射的应用问题给予了较大的关注. 牛顿-莱布尼茨积分及费马-拉格朗日导数的概念对读者来讲也是新的.

本书适用的读者群是掌握了为大学数学物理专业开设的数学分析标准教程的人们.

A. K. 博亚尔丘克

目　录

第1章　数学分析概论

本章包含集合论与映射的基础知识，以后会用到．还要详细介绍度量空间理论，并引进近代数学分析课程中的概念、符号等．

1　集合与映射

1.1　几个逻辑符号

在数学中经常借用逻辑学的符号来表达一些说法，比如，用符号 $\forall$ 表示"对所有的"、"对每一个"、"对任一个"，而用符号 $\exists$ 表示"存在"、"找到"．它们分别称为全称量词和存在量词．命题"对所有……"及"存在……"通常要有某个限制条件，一般将这些限制条件用圆括号括起来．用冒号或竖线来代替"使……满足"．

每个定理的行文中都含有某个性质 A(条件)和由 A 推出的性质 B(结论)．简略表达式"A 推出 B"写成"$A\Rightarrow B$"的形式(符号 $\Rightarrow$ 表示"蕴含")．如果逆命题成立的话，写成 $B\Rightarrow A$．如果定理与逆定理同时成立，则性质 A 与 B 等价，写成 $A\Leftrightarrow B$($\Leftrightarrow$为等价符号)，表达的意思是："A 成立的必要和充分条件是 B"，或者"A 成立当且仅当 B 成立"．

如果某个对象具有性质 A 或者性质 B，则写成 $A\vee B$，意指"A 或 B"($\vee$——"或"符号)．$A\vee B$ 表示性质 A 或 B 中至少有一个成立．

如果两个性质 A，B 要同时成立，则写成 $A\wedge B$，即"A 且 B"($\wedge$——"与"符号)．

记号 $\neg A$ 表示"非 A"，"A 不成立"($\neg$——"非"符号)．

"存在唯一"用符号!，"定义为"用符号 $\stackrel{\text{def}}{=}$ 来表示．

可以仅用一些逻辑符号来表达命题．此时，命题中包含的量词 $\forall$，$\exists$ 及性质 P，在逆命题中分别由 $\forall$ 换为 $\exists$，$\exists$ 换为 $\forall$，性质 P 换为其逆性质．例如，一元函数在数轴上任一点处的连续性可以写成：

$$(\forall a\in\mathbb{R})(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R},|x-a|<\delta):|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

若一元函数关于自变量不是处处连续的，即至少有一个不连续点，写成

$$(\exists a\in\mathbb{R})(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in\mathbb{R},|x-a|<\delta):|f(x)-f(a)|>\varepsilon.$$

有些定理要用反证法来证明．此时要用到排中律，即 $A\vee\neg A$ 总是正确的，不论命题 A 的具体内容是什么．同时要注意，$\neg(\neg A)\Leftrightarrow A$，即双重否定与原命题等价．

1.2　集合论中的记号

集合是一个原始概念，我们把注意力放在一些术语及以后常用的记号上．

用某个字母，比如 M，来表示集合. 写法 $a\in M$ 读作："a 是集合 M 的元素"或者"a 属于集合 M". 写法 $M\ni x$ 表示："集合 M 包含元素 x". 如果元素 x 不在集合 M 中，则写成 $x\notin M$ 或 $M\not\ni x$. 写法 $M=\{a,b,c,\cdots\}$ 表示："M 是个集合，由元素 a,b,c 等组成". 集合可以仅包含一个元素，如 $M=\{a\}$. 假设集合 M 的元素可能具有或者不具有性质 P，那么写法

$$M_1=\{a\in M:a\text{ 具有性质 }P\}$$

表示："M_1 是由集合 M 中所有具有性质 P 的元素组成的集合". 例如，$M_1=\{x\in\mathbb{R}:x\geqslant 0\}$ 表示所有非负实数组成的集合. 符号 $\ni$ 及 $\in$ 称为从属关系符.

给定具有某个性质的集合，通常事先不知道是否存在具有这种性质的一般元素. 因此，引入不包含任何元素的集合概念是合理的. 这样的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

假设 M_1,M_2 是两个集合. 如果 M_1 的每个元素都在 M_2 中，则称集合 M_1 是集合 M_2 的子集合(见图 1)，此时记为 $M_1\subset M_2$ 或 $M_2\supset M_1$，读作："集合 M_2 包含集合 M_1". 符号 $\subset$ 及 $\supset$ 称为包含符号.

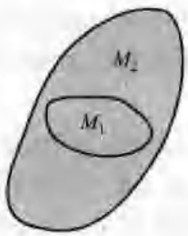

图 1

由完全相同的元素构成的集合，称为相等. 显然

$$M_1=M_2\Leftrightarrow M_1\subset M_2\ \wedge\ M_2\subset M_1.$$

如果在集合 M_1 中存在不属于 M_2 的元素，则 M_1 不包含在 M_2 中，记作 $M_1\not\subset M_2$ 或 $M_2\not\supset M_1$.

注意到，任何集合 M 包含空集，空集是它的子集合. 事实上，如果不是这样，那么空集至少有一个不在 M 中的元素. 但空集中没有元素.

以后常用的一些记号：

$\varnothing$——空集；

e^M——集合 M 的所有子集合组成的集合；

$\mathbb{N}$——自然数集；

$\mathbb{Z}_0$——非负整数集；

$\mathbb{Z}$——整数集；

$\mathbb{Q}$——有理数集；

$\mathbb{R}$——实数集；

$\mathbb{C}$——复数集.

1.3　自然数，数学归纳法

数学中最重要的集合是所有自然数组成的集合 $\mathbb{N}$. 在其上定义了加法运算，满足性质：①如果 $n\in\mathbb{N}$，则 $n+1\in\mathbb{N}$；②如果某个集合 M 包含 1，且由 $n\in M$ 总是可以推出 $n+1\in M$，那么 $M\supset\mathbb{N}$. 性质②称为归纳公理. 帕斯卡(Pascal，1623—1662)第一次提出了基于归纳公理的证明方法，称为数学归纳法. 其思想描述如下：

假设有命题 $A_1, A_2, A_3, \cdots$，已证出两个引理.

引理 1 命题 A_1 正确.

引理 2 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，由命题 A_n 的正确性可以推知 A_{n+1} 的正确性.

那么所有命题 $A_1, A_2, \cdots$ 都是正确的.

数学归纳法可归结为归纳公理. 事实上，假设 $M=\{n\in\mathbb{N}: A_n \text{ 正确}\}$. 由引理 1，$1\in M$. 由引理 2，$n\in M\Rightarrow n+1\in M$. 故由归纳公理 $(\forall n\in\mathbb{N})$：$n\in\mathbb{N}$，即所有命题 A_1，A_2，$\cdots$ 正确.

例如，证明 $\forall n\in\mathbb{N}$，成立等式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1}$$

直接验证即知引理 1 成立. 由于等式(1)对 $n\in\mathbb{N}$ 成立，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

亦即引理 2 也成立. 由数学归纳法知公式(1)得证.

1.4 集合的初等运算

假设 $M_1\in \mathrm{e}^M$，$M_2\in \mathrm{e}^M$.

定义 1 M_1 与 M_2 的交集定义为 $M_1\cap M_2=\{a: a\in M_1 \wedge a\in M_2\}$.

M_1 与 M_2 的交集是由且仅由同时属于 M_1，M_2 的那些元素组成的集合(见图 2).

如果这样的元素不存在，则称 M_1，M_2 不相交，写成 $M_1\cap M_2=\varnothing$(见图 3).

定义 2 M_1 与 M_2 的并集定义为 $M_1\cup M_2=\{a: a\in M_1 \vee a\in M_2\}$.

M_1 与 M_2 的并集中的元素至少属于 M_1，M_2 二集合中的一个(见图 4).

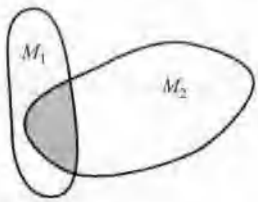

图 2

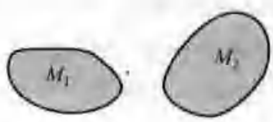

图 3

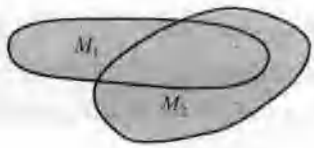

图 4

定义 3 M_1 与 M_2 的差集定义为 $M_1\setminus M_2=\{a: a\in M_1 \wedge a\notin M_2\}$(见图 5).

M_1 与 M_2 的差集是由且仅由属于 M_1 同时不属于 M_2 的元素组成.

如果 $M_1\supset M_2$，则差集 $M_1\setminus M_2$ 称为 M_2 在 M_1 中的余集(补集)，记作 $\complement_{M_1} M_2$(在不引起混淆时也记作 $\complement M_2$).

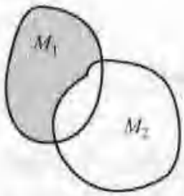

图　5

假设 $M_1 \in \mathrm{e}^M, M_2 \in \mathrm{e}^M$，则成立等式

$$\left.\begin{aligned}\complement(M_1 \cup M_2) &= \complement M_1 \cap \complement M_2,\\ \complement(M_1 \cap M_2) &= \complement M_1 \cup \complement M_2.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

上述等式所描述的性质，称为对偶性原理. 下面证明第一个. 设 $x \in \complement(M_1 \cup M_2)$，有

$$\begin{aligned} x \in \complement(M_1 \cup M_2) &\Rightarrow x \notin M_1 \cup M_2 \Rightarrow x \notin M_1 \wedge x \notin M_2 \\ &\Rightarrow x \in \complement M_1 \wedge x \in \complement M_2 \Rightarrow x \in \complement M_1 \cap \complement M_2 \\ &\Rightarrow \complement(M_1 \cup M_2) \subset \complement M_1 \cap \complement M_2. \end{aligned}$$

若设 $y \in \complement M_1 \cap \complement M_2$，则有

$$\begin{aligned} y \in \complement M_1 \cap \complement M_2 &\Rightarrow y \in \complement M_1 \wedge y \in \complement M_2 \Rightarrow y \notin M_1 \wedge y \notin M_2 \\ &\Rightarrow y \notin M_1 \cup M_2 \Rightarrow y \in \complement(M_1 \cup M_2) \Rightarrow \complement M_1 \cap \complement M_2 \subset \complement(M_1 \cup M_2). \end{aligned}$$

由上述两个互相包含的式子即证出第一个等式. 式(1)中的第二个等式同理可证.

不难将对偶性原理推广到 M 的任意子集族上去：

$$\complement \bigcup_\nu M_\nu = \bigcap_\nu \complement M_\nu, \quad \complement \bigcap_\nu M_\nu = \bigcup_\nu \complement M_\nu. \tag{2}$$

由公式(2)可知，补集符号 $\complement$ 与符号 $\cup$，$\cap$ 可以交换顺序，但后二者要互换.

1.5　有序对与集合的笛卡儿积

数学中一个重要的概念是有序对 (x,y)，x 与 y 或者来自于同一集合，或者来自不同的集合 X,Y. 有序对的基本性质如下：两个有序对 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 称为相等的当且仅当 $x_1=x_2, y_1=y_2$. 元素 x 称为 (x,y) 的第一个分量(坐标)，而元素 y 称为第二个分量(坐标). 有序对的概念，如同集合概念一样，可以认为是原始定义.

借助于有序对的概念，我们再引进集合的另一运算——集合的直积或笛卡儿积.

定义　集合 X 与 Y 的笛卡儿积定义为集合

$$X \times Y = \{(x,y): x \in X, y \in Y\}.$$

两条相交(相异)直线的笛卡儿积，通过规则"$M=(x,y)$"(见图 6)，可以与过该二直线的平面相对应. 这一性质就是坐标法的根本，是由笛卡儿(1596—1650)在解决几何问题时引入的，也解释了积的含义.

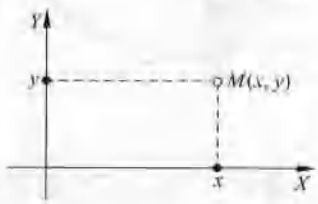

图　6

利用数学归纳法可以定义 $n+1$ 元的有序组

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = ((x_1, x_2, \cdots, x_n), x_{n+1}), \quad n \geqslant 2$$

及集合的笛卡儿积

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n+1} = (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \times X_{n+1}.$$

1.6 二元关系，二元关系的投影与截线，二元关系的逆

定义 集合 Γ 称为集合 X 与 Y 的元素间的二元关系，如果 $\Gamma\subset X\times Y$.

对于二元关系，除了可以进行通常的集合运算（交与并）外，还有特别的运算，即投影与反演.

二元关系 $\Gamma\subset X\times Y$ 的第一投影定义为集合

$$\Gamma_1=\mathrm{P}_1\Gamma=\{x\in X:\ \exists\, y\in Y:\ (x,y)\in\Gamma\}.$$

二元关系 Γ 的第一投影，由位于集合 Γ 内的所有有序对的第一坐标组成（图 7）.

集合 $\Gamma_1(x)=\{y\in Y:\ (x,y)\in\Gamma\}$ 称为 Γ 过 x 的第一截线，它由 Γ 中的第一坐标为 x 的所有点的第二坐标组成. $\forall\, x\notin\Gamma_1$，第一截线为空集.

二元关系 Γ 的第二投影定义为集合

$$\Gamma_2=\mathrm{P}_2\Gamma=\{y\in Y:\ \exists\, x\in X:\ (x,y)\in\Gamma\}.$$

二元关系 Γ 的第二投影是由 Γ 中的所有有序对的第二坐标组成的集合（图 8）.

集合 $\Gamma_2(y)=\{x\in X:\ (x,y)\in\Gamma\}$ 称为 Γ 过 y 的第二截线. 它由 Γ 中第二坐标为 y 的所有点的第一坐标构成. $\forall\, y\notin\Gamma_2$，第二截线为空集.

对每个二元关系 Γ 可以定义相应的逆二元关系 Γ^{-1}，规则是

$$\Gamma^{-1}=\{(y,x):\ (x,y)\in\Gamma\},$$

见图 9. 有时也将 Γ 的反演运算称为转置运算.

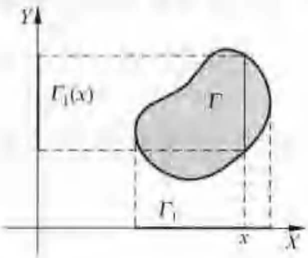

图 7

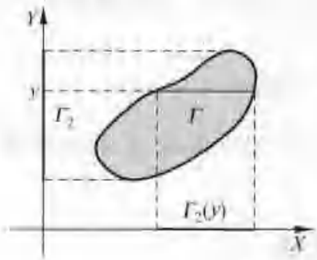

图 8

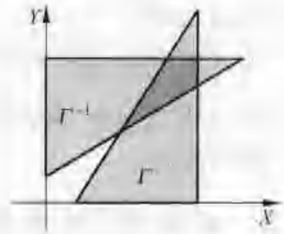

图 9

1.7 函数及其相关概念

二元关系 Γ 称为函数，如果它不包含第一坐标相同的相异有序对.

下面给出自集合 X 到集合 Y 的映射的基本定义.

定义 1 有序组 (X,Y,Γ) 称为自集合 X 到集合 Y 的映射，如果二元关系 Γ 是集合 X 及 Y 的元素之间的函数.

集合 X 称为映射的出发域，集合 Y 称为映射的到达域，集合 Γ 称为映射的图像.

通常用小写拉丁字母来表示映射，比如 f. 此时代替 $f=(X,Y,\Gamma)$ 也写成 $f:\ X\to Y$.

如果 X 及 Y 已知，那么根据定义，映射 f 的表达式等价于图像的表达式 Γ.

映射 f 的图像的第一投影称为映射 f 的定义域(集)，记作 D_f 或 $D(f)$，映射 f 的图像的第二投影称为 f 的值域，记作 E_f 或 $E(f)$. 如果 $x\in D_f$ 且有序对 (x,y) 属于映射 f 的图像，则称元素 y 为映射 f 在元素 x 的值，记作 $f(x)$.

如果已知定义域 D_f 及值 $f(x)$，$\forall x\in D_f$，则映射 f 的图像可构造为

$$\Gamma(f)=\{(x,f(x)):x\in D_f\}.$$

如果 $D_f=X$，则映射 $f: X\to Y$ 称为集合 X 到集合 Y 内的映射，记作

$$X\xrightarrow{f}Y.$$

如果 $D_f=X, E_f=Y$，则称映射 $f: X\to Y$ 为集合 X 到集合 Y 上的映射，记为

$$X\xrightarrow[\text{上}]{f}Y.$$

如果 $\Gamma_1\subset\Gamma$，则称函数 $f_1=(X,Y,\Gamma_1)$ 为函数 $f=(X,Y,\Gamma)$ 的收缩. 此时函数 f 称为函数 f_1 自集合 $D_{f_1}=P_1\Gamma_1$ 到集合 $D_f=P_1\Gamma$ 的延拓. 如果 A 为一集合，$A\subset P_1\Gamma$，则存在函数 f 的这样的收缩 f_1，使得 $A=D_{f_1}$，此时称函数 f_1 为函数 f 在集合 A 上的限制，记作 $f|_A$. 这一限制的存在性是因为

$$\Gamma(f_1)=\{(x,y):x\in A\wedge(x,y)\in\Gamma\}.$$

定义 2 假设 $f: X\to Y$. 对于任意子集 $A\subset D_f$，集合 E_f 中满足性质"存在这样的元素 $x\in A$，使得 $y=f(x)$"的子集合，称为集合 A 在映射 f 下的像，记为 $f(A)$.

对于任意的子集合 $A'\subset E_f$，集合 D_f 满足性质 $f(x)\in A'$ 的子集合称为 A' 在映射 f 下的原像，记作 $f^{-1}(A')$.

以上的映射，通常写作 $x\mapsto f(x)$.

假设 X 为集合，映射 $\mathbb{N}\xrightarrow{x_n}X$ 称为集合 X 的元素序列，记作 $\{x_n\}$. 如果 $X=\mathbb{R}$，序列 $\{x_n\}$ 称为数列.

1.8 反函数，映射的复合

映射 $f=(X,Y,\Gamma)$ 称为可逆的，如果二元关系 Γ^{-1} 是 Y 与 X 的元素间的函数关系. 此时映射 (Y,X,Γ^{-1}) 称为映射 f 的逆映射，记作 f^{-1}. 集合 X 到集合 Y 上的可逆映射 f 称为一一映射或者双射，记作

$$X\xleftrightarrow{f}Y.$$

此时 $\forall y\in Y\ \exists!\,x\in X: f(x)=y$，且有 $f^{-1}(y)=x$.

数学中的一个重要概念是映射的复合.

假设给出映射 $f: X\to Y$ 及 $\varphi: T\to X$. 映射 φ 与 f 的复合记为 $f\circ\varphi$. 其定义域由所有 $t\in D_\varphi$，满足 $\varphi(t)\in D_f$ 组成. 复合映射的值为

$$(f\circ\varphi)(t)=f(\varphi(t)),\quad t\in D_{f\circ\varphi}.$$

1.9 映射的参数形式与隐形式

如果给出映射

$$T \xleftrightarrow{\varphi} X, \quad T \xleftrightarrow{\psi} Y,$$

则定义了映射 $X \xrightarrow{f=\psi\circ\varphi^{-1}} Y$，而将映射 φ,ψ 称为其参数表示，此时变量 t 称为参数.

考察映射 $X\times Y \xrightarrow{F} G$，及方程 $F(x,y)=c$，其中 $c\in G$ 为某个元素. 如果存在集合 $P\subset X$，$Q\subset Y$，使得对每一个固定的 $x\in P$ 方程 $F(x,y)=c$ 具有唯一解 $y\in Q$，则在集合 P 上定义了函数 f，满足 $E_f=Q$. 此时称 f 为方程 $F(x,y)=c$ 确定的隐函数.

1.10 同构

假设集合 E 具有内部二元运算$\top$，而集合 F 具有内部二元运算$\perp$. 集合 E 到 F 上的双射

$$E \xleftrightarrow{f} F$$

称为同构，如果满足 $\forall(a\in E, b\in E)\ f(a\top b)=f(a)\perp f(b)$. 此时集合 E，F 称为关于运算$\top$，$\perp$同构.

例如，假设 $E=\mathbb{N}$，运算$\top$——加法，$F=\{2^n\}$，运算$\perp$——乘法. 则映射 $E\xleftrightarrow{f}F$ 同构，由于 $\forall(n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N})\ n+m\mapsto 2^{n+m}=2^n\cdot 2^m$，即

$$f(n+m)=f(n)f(m).$$

2 数学结构

一个集合，或若干个集合，其元素间具有基于公理的二元关系与二元运算，称为数学结构.

2.1 群

非空集合 E 上定义了某种规则，对每两个元素 $a\in E$，$b\in E$ 都对应着某个完全确定的第三个元素 $a\circ b\in E$，满足下列条件：

(1) 运算$\circ$满足结合律：$\forall(a\in E, b\in E, c\in E)\quad a\circ b\circ c=(a\circ b)\circ c$；

(2) 在 E 内存在单位元素，即这样的元素 n，使得 $\forall a\in E\quad a\circ n=a$；

(3) $\forall a\in E\quad \exists a'\in E$：$a\circ a'=n$（$a'$称为 a 的逆元素），

则称集合 E 为群.

如果此外还有

(4) $\forall(a\in E, b\in E)\quad a\circ b=b\circ a$，

则称群 E 为阿贝尔群或者交换群.

如果在群 E 中运算$\circ$具有加法(乘法)性质,记为"+"("·"),则群称为加法群(乘法群),而单位元素称为零元素(单位元),记为 0(1). 例如,集合$\mathbb{Z}$上定义了加法元素构成交换群,集合$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$上定义了乘法运算也构成交换群.

2.2　环

环是指集合 R,在其上定义了两个二元代数运算:加法与乘法,而且该集合对加法构成阿贝尔群(环 R 的加法群),而乘法与加法满足分配律:

$$\forall(a\in R,b\in R,c\in R)\quad a(b+c)=ab+ac,\quad (b+c)a=ba+ca.$$

如果乘法运算是交换的,则环称为交换环. 如果 $R\ni 1$,则环称为单子环(酉环).

例如,有理数集$\mathbb{Q}$定义了加法与乘法之后构成单子环.

2.3　体

如果一个环,除去关于加法运算的零元素外,关于乘法运算构成群,则称此环为体.

2.4　域

如果一个体上的乘法运算是交换的,称此体为域.

例如,($\mathbb{Q}$,+,·),($\mathbb{R}$,+,·)分别是有理数域和实数域.

定义　假设 K 为一个体(域),映射 $|\cdot|: K\to\mathbb{R}^+$,其中 $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R};\ x\geqslant 0\}$,称为体(域)$K$ 的绝对值(模),如果 $\forall(\alpha\in K,\beta\in K)$满足下列条件(公理):

(1) $|\alpha|=0\Rightarrow\alpha=0$;

(2) $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$;

(3) $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$(三角不等式).

一个体(域),在其上定义了绝对值之后,称为正规化的.

2.5　域 K 上的向量空间,赋范空间

域 K 上的向量(线性)空间(E,+,·),由集合 E 的元素组成,其元素称为向量,加法与乘法运算在域 K 上进行.

以上的定义应该具有下列性质,称为向量空间公理:$\forall(x\in E,y\in E,z\in E,\lambda\in K,\mu\in K)$

(1) $x+y=y+x$;

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

(3) $\exists 0\in E$: $x+0=x$;

(4) $\exists(-x)\in E$: $x+(-x)=0$;

(5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$, $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;

(6) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$;

(7) $1\cdot x=x$.

有了以上的记法，记号$(E,+,\cdot)$有时也记作向量空间 E.

在任意向量空间 E 中成立下列性质：

(1) $\lambda\cdot 0=0$;

(2) $0\cdot x=0$;

(3) $(-1)x=-x$.

假设 E 为正规化域 K 上的向量空间，映射 $\|\cdot\|: E\to\mathbb{R}$ 称为空间 E 中的范数(长度)，如果 $\forall(x\in E, y\in E, \lambda\in K)$满足条件(公理)：

(1) $\|x\|=0\Rightarrow x=0$;

(2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$;

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$(三角不等式).

范数在向量 $x\in E$ 处的值称为该向量的模.

有序系统$(E,+,\cdot,\|\cdot\|)$称为赋范向量空间. 通常将$(E,+,\cdot,\|\cdot\|)$简记为 E.

由公理(2),(3)可得，$\|0\|=0$, $\|x\|\geqslant 0$, $\forall x\in E$. 事实上，第一个性质可由公理(2)中令 $\lambda=0$ 得到，第二个式子由公理(3)中令 $y=-x$ 即得.

向量 $x\in E$ 称为赋范空间 E 中向量序列$\{x_n\}$的极限，如果 $\|x_n-x\|=o(1)$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，其中兰道(Landau)符号 $o(1)$表示无穷小数列$\{\alpha_n\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，另外一个兰道符号$O(1)$表示有界数列.

定理 1(范数的连续性) 如果赋范向量空间 E 中的序列$\{x_n\}$收敛到向量 x，则 $\|x_n\|\to\|x\|$.

◀由三角不等式可得

$$-\|x_n-x\|\leqslant\|x_n\|-\|x\|\leqslant\|x_n-x\|,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

由此可得命题的正确性. ▶

在正规化域 K 中模也是连续函数.

在向量空间$\mathbb{R}^m$ 中下列映射 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$，其中

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}x_i^2}\quad\text{(欧几里得范数)},\tag{1}$$

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{m}|x_i|\quad\text{(八面体范数)},\tag{2}$$

$$\|x\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|\quad\text{(立方范数)},\tag{3}$$

均满足范数公理.

赋范向量空间 E 中的序列$\{x_n\}$称为基本序列，如果

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N})(\forall(n\geqslant n_\varepsilon, p\in\mathbb{N})): \|x_{n+p}-x_n\|<\varepsilon.$$

赋范空间 E 称为完备的，如果它的每个基本序列有 E 中的极限. 完备的赋范空间称为巴