

塑性力学基础

尚福林 王子昆 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书为普通高等院校工科专业教材，也可供从事工程技术人员参考。本书共分八章，第一章介绍塑性力学的基本概念，第二章介绍塑性本构方程，第三章介绍塑性变形的几何描述，第四章介绍塑性变形的能量原理，第五章介绍弹塑性力学的基本方程，第六章介绍弹塑性力学的基本解，第七章介绍弹塑性力学的基本问题，第八章介绍弹塑性力学的基本应用。本书可作为高等院校工科专业教材，也可供从事工程技术人员参考。

塑性力学基础

尚福林 王子昆 编著

西安交通大学出版社
地址：西安市雁塔区
电话：(029)85266327 8306
网址：<http://www.xjtu.edu.cn>

定价：32.00元
ISBN 7-312-04321-8
CIP 数据：(029)85266327 8306

印刷：18 开本
字数：321 千字
印数：18 千册
CIP 数据：(029)85266327 8306

西安交通大学出版社
地址：西安市雁塔区
电话：(029)85266327 8306
网址：<http://www.xjtu.edu.cn>



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书介绍了塑性力学的基本理论和研究各种塑性力学问题的基本方法,主要内容有:应力和应变;屈服条件;塑性本构关系(增量理论和全量理论);简单的弹塑性问题(弯曲梁、扭转圆轴、受压球壳、厚壁圆筒、旋转圆盘);理想刚塑性平面应变问题;塑性极限分析和安定分析原理、典型结构(梁、刚架、薄板、薄壳)的极限分析。本书兼顾理论严密性和工程应用的特点,从求解工程问题的需求出发对所涉及的基本概念和基本理论给出清晰且严谨的阐述,略去过于繁琐且不影响具体问题求解的理论推导,并尽量选择典型的工程应用中的塑性力学问题进行举例说明,其宗旨在于将经典塑性力学中重要的基础知识介绍给读者。本书可作为工程力学、结构分析、材料、机械、土建、航天、航空等工科专业的高年级大学生和研究生的塑性力学课程教材,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

塑性力学基础/尚福林,王子昆编著. —西安:
西安交通大学出版社,2011.3
ISBN 978-7-5605-3788-7

I. ①塑… II. ①尚…②王… III. ①塑性力学
IV. ①0344

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 229788 号

书 名	塑性力学基础
编 著	尚福林 王子昆
责任编辑	田 华 桂 亮

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行部)
(029)82668315 82669096(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 陕西奇彩印务有限责任公司

开 本	727mm×960mm	1/16	印张	18	字数	331 千字
版次/印次	2011 年 3 月第 1 版		2011 年 3 月第 1 次印刷			
书 号	ISBN 978-7-5605-3788-7/O·351					
定 价	28.00 元					

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdlgj@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

前言

塑性力学和弹性力学一样,是固体力学的中心内容,是研究物体发生弹塑性变形规律的一门学科。塑性力学不仅是断裂力学、损伤力学等许多研究领域的理论基础,而且在金属材料强度和加工、结构和机械设计、结构分析以及其他一些工程实际问题等方面都有着重要的应用。作为连续介质力学的分支学科,经典塑性力学是从塑性变形材料的宏观现象出发,采用数学方法对常温附近、具有延性的多晶金属明显表现出的非弹性特性进行阐述和处理。它所研究的问题分为两方面:(1)根据实验观察结果为出发点,建立塑性状态下变形的基本规律,即塑性本构关系以及有关的基本理论;(2)应用这些关系和理论,分析确定在外载荷等作用下物体或结构内各处的应力与应变的分布。

本书是为学习工程力学、结构分析的学生而编写的塑性力学教材。其主要内容以作者在西安交通大学为工程力学、结构分析专业的本科生和研究生授课的讲义为基础,并汲取了国内外数部塑性力学方面较好著作的适当内容。鉴于目前课内学时数逐渐减少,本书将重点放在清晰阐述基本概念和基本理论上,并介绍了解决有关工程问题的一些基本方法。

全书分6章。绪论部分对金属材料的塑性行为和研究所需要的基本假设作了简单介绍。第2章讨论了塑性本构关系的第一要素,即屈服条件的建立,着重介绍了目前常用的初始屈服条件以及强化条件。第3章继续讨论塑性本构关系的要素,即流动法则,重点介绍了增量型本构关系和全量型本构关系,该章是全书的基础理论部分。第4章集中讨论了采用解析方法求解简单弹塑性问题的方法和特点。第5章介绍求解平面应变问题的滑移线场方法。第6、7章分别讨论了塑性力学中最有实用意义的分支之一,即结构极限分析的基本理论和方法,主要讨论了分析确定梁、刚架、薄板、薄壳等的塑性极限载荷的方法和途径;限于篇幅,第6章末尾仅对塑性安定分析的基本方法作了初步介绍。对于更为有效的弹塑性有限元方法,众多计算力学教材均有相关的介绍,本书不再重复。本书各章附有一定量的习题,同时,一些章节还留有部分课后练习和讨论题,以供学生加深理解和锻炼解决实际问题的能力。

实际上,经典塑性力学所涵盖的内容相当丰富,诸如粘塑性本构理论、岩土(土

壤、岩石和混凝土等)的塑性理论、复合材料塑性理论、塑性稳定性问题、塑性动力学(研究强动载荷作用下材料的动态行为、结构塑性动力响应以及弹塑性应力波的传播等问题)以及塑性大变形理论等。塑性力学仍然是一门年轻的学科,还有许多值得深入研究和探索的课题。本书对这些专门问题未作介绍,建议读者参考有关专著。

对编写本书提出建设性意见的有:俞茂宏教授、西安交通大学工程力学系多位老师、数届本科生(特别是力学硕 41、力学硕 51、力学硕 61、力学 61、力学硕 71、结构 71)、众多研究生和本科生(特别是赵朋飞、郭显聪、李晓冬、孙永乐、朱鑫垚、曾伟、黄凯等),对于他们的不断鼓励和热情帮助,作者表示深切的谢意!本书得到了教育部特色专业建设项目的支持,特此致谢!作者同时感谢西安交通大学出版社任振国老师和田华女士对本书顺利出版提供的帮助。

作者希望本书能够对力学系和有关学科的本科生和研究生以及从事塑性力学相关的教育和研究人员有所帮助。同时,恳请同行专家和使用本书的读者提出宝贵意见,并不吝赐教。联系 E-mail: shangfl@mail. xjtu. edu. cn.

作者 2011 年 3 月于西安

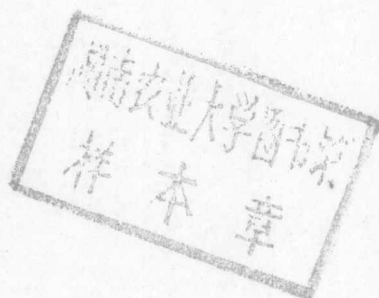
目 录

前言

第 1 章 绪论	(1)
1.1 塑性变形的实验观察	(2)
1.2 塑性力学的研究内容	(6)
1.3 塑性力学对工程实际的意义	(7)
1.4 基本假设	(9)
1.5 应力-应变关系的简化	(10)
1.6 塑性力学的发展简史	(14)
习题 1	(16)
英文阅读材料 1	(17)
第 2 章 屈服条件	(19)
2.1 应力偏张量及其性质	(19)
2.2 应力空间、 π 平面及 Lode 参数	(25)
2.3 应变偏量和等效应变	(29)
2.4 初始屈服条件和初始屈服曲面	(30)
2.5 常用的屈服条件	(35)
2.6 后继屈服条件及加、卸载准则	(53)
习题 2	(63)
英文阅读材料 2	(64)
第 3 章 本构方程	(67)
3.1 几个有关的概念	(67)
3.2 Drucker 公设	(69)
3.3 增量型本构关系(塑性流动理论)	(75)
3.4 全量型本构关系(塑性形变理论)	(93)
3.5 全量理论与增量理论的比较	(102)

习题 3	(107)
英文阅读材料 3	(109)
第 4 章 简单的弹塑性问题	(112)
4.1 弹塑性力学边值问题的提法	(112)
4.2 梁的弯曲	(115)
4.3 柱体扭转	(127)
4.4 厚壁球壳的弹塑性变形	(135)
4.5 厚壁圆筒的弹塑性变形	(138)
4.6 旋转圆盘	(146)
习题 4	(149)
英文阅读材料 4	(153)
第 5 章 平面应变问题	(156)
5.1 平面应变问题的基本方程	(156)
5.2 滑移线及其性质	(161)
5.3 应力和速度的间断线	(170)
5.4 简单的滑移线场	(172)
5.5 边界条件	(175)
5.6 平冲头压入半平面的极限载荷	(180)
5.7 单边受压力的楔形体	(183)
5.8 两侧带切口板条的拉伸	(186)
5.9 定常的塑性流动问题	(189)
习题 5	(193)
英文阅读材料 5	(198)
第 6 章 极限分析方法	(202)
6.1 概述	(202)
6.2 一个熟悉的例子:塑性铰与极限载荷	(205)
6.3 虚功率原理	(207)
6.4 极限分析的基础理论和分析方法	(209)
6.5 梁和刚架的极限分析	(223)
6.6 安定分析理论的初步介绍	(228)
习题 6	(229)
英文阅读材料 6	(232)

第 7 章 板壳的极限分析.....	(235)
7.1 薄板弯曲问题的基本假设和基本方程	(235)
7.2 圆板轴对称弯曲的极限分析	(238)
7.3 矩形板的极限载荷	(244)
7.4 薄壳的基本假设和基本方程	(248)
7.5 圆柱壳体在轴对称载荷作用时的塑性极限条件	(253)
7.6 夹层壳的塑性极限条件	(261)
习题 7	(270)
英文阅读材料 7	(273)
参考文献.....	(277)



第 1 章 绪 论

塑性力学是变形固体力学的一个分支。塑性力学是以弹性力学为基础的,在学习塑性力学之前有必要对弹性力学的内容作一回顾。图 1.1 为弹性力学课程的基本内容框图。

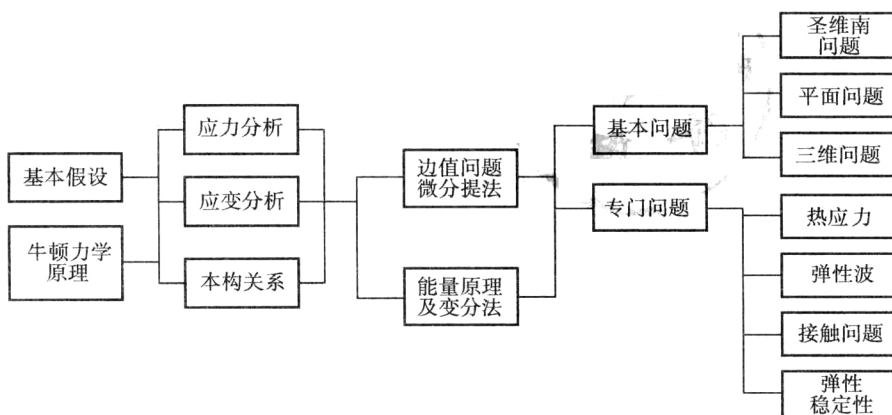


图 1.1 弹性力学课程的基本内容

弹性力学对所研究的对象最基本的特征做出了描述,假设物体是连续的、均匀的、各向同性的,服从线弹性(linear elasticity)规律、变形(位移和应变)是微小的,且物体内无初应力。从学科结构的严密性和系统性来看,弹性力学是固体力学所有学科中的典范,它是学习固体力学其他分支学科的基础。从学科发展来看,弹性力学在其专门问题的深入研究及在相关的新兴学科方面都有了进一步的发展,例如,非均匀弹性理论、各向异性弹性理论、非线性弹性理论、电磁弹性理论、微结构弹性理论等等。

塑性力学和弹性力学一样,是固体力学的中心内容。它既是基础的理论学科,又是重要的应用学科,是结构和机械设计、金属材料加工及强度研究等必不可少的基础内容。学习塑性力学的过程中,应注意与弹性力学的有关内容相联系,认清哪些知识是与弹性力学相一致的,哪些是有本质区别的,这对理解塑性力学的特点是很有好处的。

学习塑性力学除需要有一定的数学、物理及力学的基础外,还需要有金属物理

的知识,这样才能把宏观和微观的研究结合起来。塑性力学是金属压力加工、结构极限设计、板壳理论、复合材料力学、蠕变力学、断裂力学、爆炸力学以及弹塑性有限元等课程必不可少的基础。

1.1 塑性变形的实验观察

实践是建立理论的基础。在建立塑性理论和进行结构弹塑性分析之前,应该首先研究材料在塑性变形阶段的力学性质和变形规律。

1. 简单拉伸(压缩)实验

图 1.2 为金属材料单向拉伸实验得到的典型载荷-伸长量曲线。在拉伸的初始阶段,载荷和伸长量成正比。当其偏离线性规律时,认为初始屈服(initial yield)发生, Oa 阶段为弹性阶段(elastic region)。如果在实验试样变形超过 a 点到达 b 点时将载荷完全卸除,则会剩余有不能恢复的永久变形量 Oc ,这部分变形称为塑性变形(plastic deformation)。 cb 段

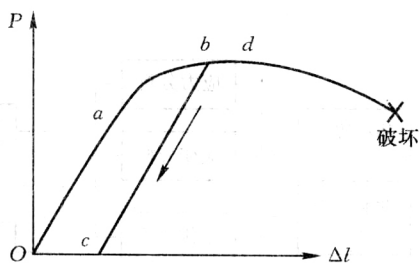


图 1.2 金属材料拉伸实验的典型载荷-伸长量曲线

的斜率非常接近于 Oa 段的斜率,即与杨氏模量 E 成比例。最大载荷位于 d 点,在该点或者接近于该点时刻开始发生局部颈缩(necking),试样不再均匀地变形。在 d 点之后的某个时刻,试样最终发生断裂。颈缩是材料的一种几何失稳(instability)行为,此时材料的应变强化不足以弥补横截面的局部削减。如果将颈缩之后的拉伸数据进行分析,就会发现,真实应力($\sigma = P/A$)会单调增长直至失效开始。典型金属的初始屈服应变大约处于 $0.1\% \sim 1\%$ 范围,而颈缩时的应变则会比它大 $10 \sim 40$ 倍。变形之后,试样大体上无永久的体积变化。而且,当试样受到静水压力载荷时,得到的载荷-伸长量曲线没有多大变化。也就是说,静水压力基本上不引起永久变形。

图 1.3 为一般金属材料和低碳钢进行简单拉伸、压缩实验得到的名义应力-名义应变曲线。这里的名义应力 σ 、名义应变 ϵ 均是按试件的原始尺寸计算的,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= P/A_0 \\ \epsilon &= (l - l_0)/l_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

它反映了常温、静载下材料在受力过程中应力-应变关系的全貌,显示了材料固有的力学性能。对于低碳钢、铸钢、部分合金钢等,通常有比较明显的屈服阶段,存在

比例极限(proportional limit) σ_p 、弹性极限(elastic limit) σ_e 以及屈服应力(yield stress) σ_s 三个参数的差别。由于它们非常接近,在工程上对它们一般不加以区分。退火软钢和一些铝合金还有上、下屈服点,由于上屈服点一般不稳定,对实验条件敏感,常采用下屈服点所对应的应力作为 σ_s 。在应力超过 σ_s 之后,会出现一个应力基本不变而应变显著增加的屈服(流动)阶段。对于中碳钢、部分高强合金钢和部分有色金属等,常观察不到明显的屈服阶段。工程上往往以残余应变达0.2%时作为塑性变形的开始,其对应的应力作为材料的屈服应力,以 $\sigma_{0.2}$ 表示。在塑性力学中规定,屈服极限 σ_s 作为弹性和塑性的分界点。

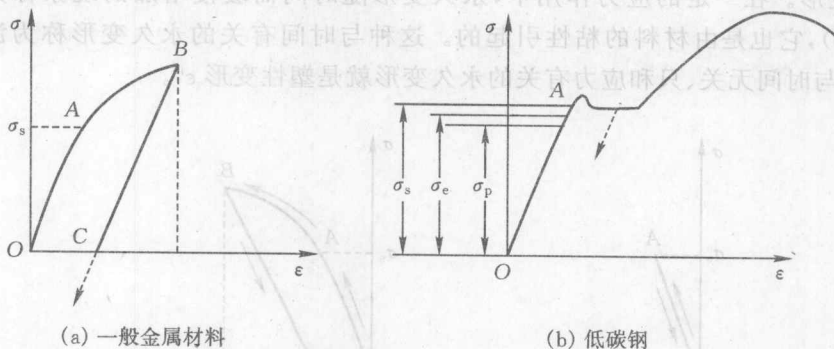


图 1.3 金属材料拉伸实验的名义应力-应变曲线

在变形过程中,试件的尺寸在不断地变化,因此,上述 σ - ϵ 曲线不能真实地反映瞬时应力-应变关系。若考虑试件尺寸变化,可定义如下真应力(或称自然应力)和自然应变(或称对数应变)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_T &= P/A \\ \epsilon &= \ln(l_1/l_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

式中: A 为各瞬时的截面积; l_0 为原始长度; l_1 为瞬时长度。以 σ_T 和 ϵ 为坐标轴的曲线反映了各瞬时的应力-应变关系,称为真应力-自然应变曲线。图 1.4 为退火铜的真应力-自然应变曲线(据 Ludwik & Scheu 的实验结果)。为便于将拉伸和压缩试验结果放在一起,画出的是应力、应变的绝对值,而且,拉伸应力是相对于截面积的减小值计算而得,压缩应力是相对于试件

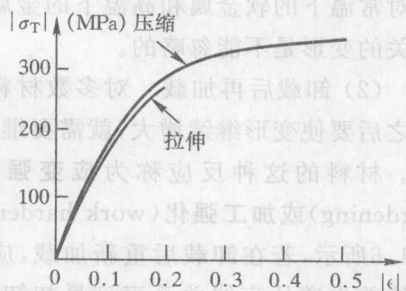
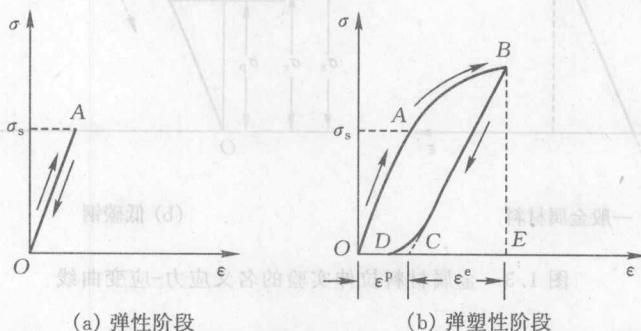


图 1.4 退火铜的真实应力-应变曲线

高度的减小值计算而得的。

以下对塑性变形的具体表现做一仔细观察。

(1) 加载和卸载 在弹性变形的范围内,如图 1.5(a)所示,其应力应变曲线往返的路径是一致的。当应力超过某一限度(如 σ_s)后去掉外力时,则不能恢复原形,有一部分变形被保留下来,如图 1.5(b)所示。在力去掉以后立即消失的变形(CE)是弹性变形 ϵ^e ,除此之外被保留下来的部分(OC)称为非弹性变形(inelastic deformation)。在非弹性变形当中,有一部分(DC)会随时间的增长而缓慢消失,这种现象称为弹性后效,它是由材料的粘性引起的。最后不能消失的部分(OD)为永久变形。在一定的应力作用下,永久变形随时间而缓慢增加的现象称为蠕变(creep),它也是由材料的粘性引起的。这种与时间有关的永久变形称为流态变形;而与时间无关、只和应力有关的永久变形就是塑性变形 ϵ^p 。



(a) 弹性阶段

(b) 弹塑性阶段

图 1.5 不同变形阶段的加载与卸载规律

一般来说,在常温下,硬金属的弹性后效和蠕变变形与塑性变形相比是非常小的,因此,就把非弹性变形作为塑性变形来理解,即图中 $OD \approx OC$, 且 $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$ 。但对常温下的软金属和高温下的金属,与时间有关的变形是不能忽略的。

(2) 卸载后再加载 对多数材料来说,屈服之后要使变形继续增大,就需要继续增加载荷。材料的这种反应称为应变强化(strain hardening)或加工强化(work hardening)。如图 1.6所示,若在卸载后重新加载,应力-应变曲线首先遵从直线关系直到最初卸载的应力点,然后画出一条略微弯曲的区段,再下去则遵从一条与原来单调加载情况下基本相同的

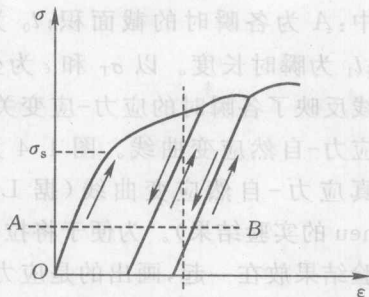


图 1.6 材料的强化特性

曲线,就像未曾卸载一样。继续发生新的塑性变形时材料的再度屈服称为后继屈服,相应的屈服点称为后继屈服点。由于强化作用,材料的屈服应力提高了。这一变形阶段称为强化(或硬化)阶段。可以看出,由于加载和卸载规律的不同,引起塑性阶段应力与应变的多值对应关系(如图中虚线 AB 所示)。

(3) 反向加载 材料在拉伸强化后卸载,再进行反向加载(压缩)至屈服,实验发现,新的屈服应力一般低于最初未强化就反向加载时的屈服点的应力值。这种现象最早由德国的鲍辛格(J. Bauschinger)发现,因此被称为鲍辛格效应(Bauschinger effect)。如图 1.7 所示, $\sigma'_s < \sigma''_s$ 。这一效应说明,强化材料随着塑性变形的增加,屈服极限在一个方向上提高而在相反方向降低。这样,即使是初始各向同性的材料,在出现塑性变形之后,也会变为各向异性,即鲍辛格效应使得材料具有各向异性性质。

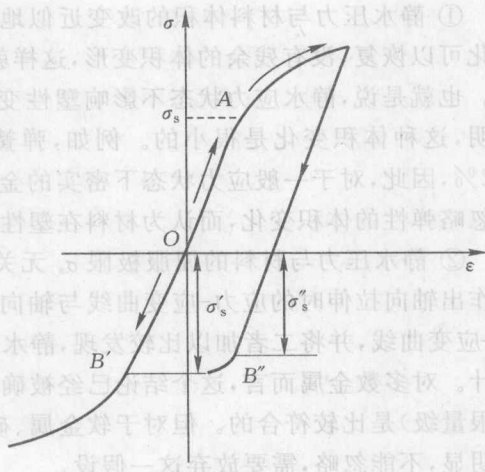


图 1.7 鲍辛格效应

(4) 应力循环 如图 1.8 所示,设材料从某一应力状态 σ_0 (图中 d 点) 开始加载,应力-应变关系按线性规律由 d 点达到 e 点,这时如给一应力增量 $d\sigma$,它将引起一个新的塑性应变增量 $d\epsilon^p$ 。在此变形过程中应变能有了增量。若从 f 点卸载,应力又降为 σ_0 (图中 g 点)。这时弹性应变恢复,弹性应变能得到释放,而塑性应变被残留下来,相应的塑性应变能(图中的阴影部分)被保留而不能释放。与此相应的功称为塑性功,它是不可逆的。所以,在上述应力循环中塑性功恒大于零(或非负),即

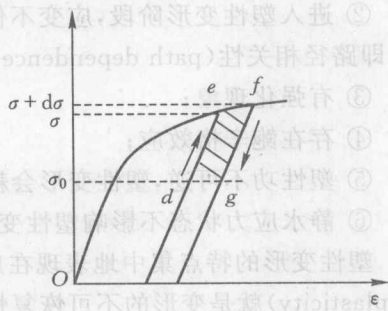


图 1.8 塑性功不可逆

$$\begin{cases} (\sigma - \sigma_0) \cdot d\epsilon^p \geq 0 \\ d\sigma \cdot d\epsilon^p \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

式中的等号适用于理想塑性材料。

2. 静水压力实验

P. W. Bridgman 曾进行了不同金属材料在静水压力(各向均压)作用下的拉伸实验,即著名的 Bridgman 试验。Bridgman 通过大量的高压(各向均压)试验发现以下结论。

① 静水压力与材料体积的改变近似地服从线性弹性规律,若除去压力,体积变化可以恢复,没有残余的体积变形,这样就可以认为各向均压时体积变化是弹性的。也就是说,静水应力状态不影响塑性变形而只产生弹性的体积变化。试验还表明,这种体积变化是很小的。例如,弹簧钢在 10 000 个大气压下体积缩小约 2.2%,因此,对于一般应力状态下密实的金属材料,当发生较大的塑性变形时,可以忽略弹性的体积变化,而认为材料在塑性状态时的体积是不可压缩的。

② 静水压力与材料的屈服极限 σ_s 无关。Bridgman 用不同钢材(如镍、钨)试样作出轴向拉伸时的应力-应变曲线与轴向拉伸和静水压力共同作用时的拉伸应力-应变曲线,并将二者加以比较发现,静水压力对初始屈服的影响很小,可以忽略不计。对多数金属而言,这个结论已经被确认在静水压力不大的条件下(材料屈服极限量级)是比较符合的。但对于软金属、矿物及岩土等材料,静水压力的影响比较明显,不能忽略,需要放弃这一假设。

概括来说,塑性变形有如下特点。

① 不可恢复性是塑性变形的主要表现;从材料本身的力学行为或响应来看,材料进入塑性变形阶段,加载和卸载规律不同则是塑性变形的本质特点;

② 进入塑性变形阶段,应变不仅与应力水平有关,还和加、卸载路径(历史)有关,即路径相关性(path dependence);

③ 有强化现象;

④ 存在鲍辛格效应;

⑤ 塑性功不可逆,塑性变形会耗散一定的能量,即耗散性(dissipation);

⑥ 静水应力状态不影响塑性变形。

塑性变形的特点集中地表现在应力与应变的关系上。简言之,金属材料的塑性(plasticity)就是变形的不可恢复性(irreversibility)。

1.2 塑性力学的研究内容

塑性力学是固体力学的一个重要分支,是研究变形固体发生塑性变形时的应力和应变(变形)分布规律的学科。它与弹性力学关系密切,弹性力学中的某些基本假设以及关于应力、应变的分析等与材料物性无关的基本概念仍然适用。但是,塑性力学问题远比弹性力学问题复杂。例如,弹性力学存在统一的本构关系(con-

stitutive relation),即广义胡克(R. Hooke)定律,而塑性力学中由于问题的复杂性,不存在统一的本构关系。塑性力学的研究内容有两个方面。

① 根据实验观察结果,建立塑性状态下变形的基本规律,即塑性本构关系(包括初始屈服条件、后继屈服条件以及应力-应变关系等)和有关的基本理论。这种关系要求既要能与实验吻合,又要便于计算。

② 应用已建立起来的这些关系和理论求解给定的边值问题或边值-初值问题,确定物体在载荷等外来因素作用下塑性变形时的应力与变形的分布,包括研究在加载过程中的每一时刻,物体各处的应力及变形,以及确定物体已进入塑性状态的范围(即弹性区和塑性区的界限)、卸载后的残余应力等。它将探讨求解的方法,讨论所得解的唯一性、解的精度等问题,寻求精确的解析解法或者采用近似解法(如有限元法)等。

简言之,塑性力学问题的特点表现为以下几点。

① 本构关系复杂,问题往往归结为求解非线性方程,因此存在数学上的困难。

② 必须注意是加载还是卸载。

③ 一般情况下存在弹性与塑性的交界面,因此需要确定该交界面,并满足该交界面处的力和变形的连续条件,这会增加求解的难度。

塑性力学从宏观现象出发并用数学方法来研究材料的塑性性能。当然,也可以从塑性微观结构、微观变形机理的角度来研究塑性问题,这属于固体物理、金属学的研究内容。事实上,塑性力学的近代研究已走向与微观变形机理结合起来探讨塑性变形规律的方向,详细参见下面的“塑性力学的发展简史”部分。本书中将主要介绍经典塑性力学的基本理论、方法和结果,其他部分暂不涉及。另外,本书着重讨论金属材料在常温、静载荷条件下塑性变形的基本理论和基本方法,不考虑温度、时间、加载速率等因素对材料力学性质的影响。所得结果和研究方法可部分地应用于土壤、岩石、高分子化合物等。

1.3 塑性力学对工程实际的意义

塑性力学源于生产实践,又直接为生产服务,它对工程实践有非常重要的意义。这里先以一个简单的三杆桁架的极限设计为例来说明。

设图 1.9 为一简单的三杆对称桁架,各杆截面积相同,由同一钢材制成,其屈服极限为 $\sigma_s = 265 \text{ MPa}$,桁架的工作载荷为 $P_0 = 10^5 \text{ N}$ 。若安全系数取 3,试确定杆的截面积 A 。

这是一次超静定的桁架问题,在各杆均保持弹性状态的情况下,可解得各杆的内力为

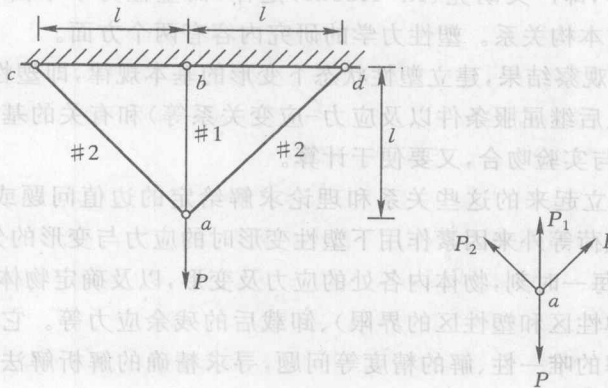


图 1.9 三杆桁架问题

$$P_1 = \frac{2P}{2+\sqrt{2}}, \quad P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P}{2+\sqrt{2}}$$

桁架的工作载荷为 10^5 N, 安全系数为 3, 则设计载荷 $P=3 \times 10^5$ N, 故

$$P_1 = \frac{2 \times 300\,000}{2+\sqrt{2}} = 175\,736 \text{ N}, \quad P_2 = 87\,868 \text{ N}$$

若按弹性状态设计, 以桁架最大受力部分的应力达到屈服极限时作为桁架的破坏, 即当 $P_1 = A_e \sigma_s$ 时桁架发生破坏, 则杆截面积应取

$$A_e = \frac{P_1}{\sigma_s} = 663 \text{ mm}^2$$

注意, $P_2 = P_1/2$, 即两根 #2 杆的应力才达到屈服应力的一半, 还处于弹性状态, 因此存在很大承载潜力, 还可以继续承载。由于钢材为韧性材料, #1 杆屈服后能发生一定的变形而不丧失其强度, 两根 #2 杆可继续承受较大的载荷。只有当 #2 杆也达到屈服极限时, 桁架的承载能力才达到极限值。假设所用钢材为理想塑性材料, 不计强化作用, 有 $P_1 = P_2 = A_p \sigma_s$ 。根据节点 a 的平衡条件有

$$P_1 + \sqrt{2}P_2 = P$$

即

$$A_p \sigma_s (1 + \sqrt{2}) = P$$

若按塑性极限状态设计, 杆的截面积应取

$$A_p = \frac{P}{(1+\sqrt{2})\sigma_s} = 469 \text{ mm}^2$$

由此可见, 如果采用塑性设计, 杆的截面积可减少近 30%, 因而可节省材料近

30%。

这一普通的极限设计例子充分说明,应用塑性力学可以充分发挥材料的承载能力,带来很好的经济效益。塑性极限设计只是塑性力学在工程实践中应用的一个方面。事实上,塑性力学对于工程实践的意义是多方面的。除了这种以塑性力学为依据,解决零件或结构的众多强度和稳定问题之外,还能解决很多其他问题,例如:

① 金属的压力加工和成型问题,即如何使用最小的力和消耗最小的能量,达到加工的目的,并且使物体内部的变形均匀些,不致产生破坏或缺陷;

② 土力学,岩石力学及地质力学等问题。

随着计算机的普及应用,计算弹塑性力学的出现和不断成熟更加拓展了塑性力学在工程技术中的应用范围以及能够解决的科学和工程问题。

1.4 基本假设

经典塑性力学是从宏观唯象的观点出发来进行研究的,而不是从物质的微观结构(例如原子、分子、结晶体的物性)出发,因此属于连续介质力学(continuum mechanics)的范畴。经典塑性力学采用的基本假设如下。

① 材料是均匀的、连续的,在初始屈服前是各向同性的。

② 基于 Bridgman 的试验结果,静水应力状态不影响塑性变形而只产生弹性的体积变化,即在塑性状态时,材料的体积是不可压缩的。换言之,塑性变形是在体积不变(不可压缩)的情况下进行的,即有 $\epsilon_x^p + \epsilon_y^p + \epsilon_z^p = 0$ 。

③ 材料是稳定的或递增强化的。图 1.8 已经说明了在应力循环下塑性功不可逆,存在关系式(1.3),这个表达式是 Drucker 关于稳定材料塑性功不可逆在一维情况下的形式,它们是关于材料是否稳定的条件。

图 1.10 表示了一个应力循环($\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_1$)的两种情况,应力都回到原来的值,应变由 $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon'_1$,二者有差值 $\Delta\epsilon^p$,在图(a)中 $\Delta\epsilon^p > 0$;在图(b)中 $\Delta\epsilon^p < 0$,不能满足稳定条件。虽然它们均满足 $d\sigma/d\epsilon > 0$,但在图(a)中,卸载瞬时切线弹性模量 $d\sigma/d\epsilon = E_t < E$,而在图(b)中 $E_t > E$;只有如图(a)那样递增强化的 $\sigma - \epsilon$ 曲线,才能满足稳定条件,也就是说,稳定材料的 $\sigma - \epsilon$ 曲线满足

$$E \geq E_c \geq E_t \geq 0 \quad (1.4.1)$$

式中 $E_c = \sigma/\epsilon$ 为割线弹性模量。3.2 节将给出关于稳定材料与不稳定材料的详细定义。

④ 材料是非粘性的,材料的力学性能与温度、时间无关,这包含两个涵义:

(a) 当温度不高、时间不长时,忽略材料的蠕变效应、松弛效应;