

马振华 编著

# 离散数学导引

清华大学出版社

# 离散数学导引

马振华

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

### 内 容 简 介

本书是离散数学的精练导引。除介绍基本内容外,特别着重于阐述离散数学的方法。全书共分四讲十一章计有集合论技术,数理逻辑基础,代数系统与图论方法。在讲述各部分内容时,着重强调其间的联系,把离散数学看作是一个整体。内容不企求全面,但求重点突出。

本书可作为理工科大学学生的选修课教材,也可供广大科技工作者自学参考。各章后均附有习题,并有部分提示与解答。

### 离 散 数 学 导 引

马振华

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

顺义振华印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本: 850×1168 1/32 印张:10.25 字数:263千字

1993年6月第1版 1993年6月第1次印刷

印数: 0001—5000

ISBN 7-302-00873-6/O·134

定价: 5.65元

## 序

我的书是一首小诗，  
    奉献给奋发的大学生，  
        勤勉的工程师，以及  
            孜孜不倦的好学青年。

宏伟的乐队里缺少不了乐器之王——钢琴\*，  
高耸入云的数学大厦里也缺少不了“离散”(数学)，  
    “连续”和“离散”象两支翅膀，  
        它把人类从地上带向天堂！  
    “有限”与“无穷”象一把锋利的宝剑，  
        它无往不胜，  
            无坚不摧！

学习数学吧！  
    即便你还是一个孩童，  
        学习它能培养你的耐性，  
            更能发挥你的思考力及创造力！

“数学能使人精细”  
“知识就是力量”  
——这是伟大培根不朽的名言！

---

\* 作者把钢琴奏出的音乐比喻作“离散”音乐。

DAA7866

## 致 读 者

本书是作者在清华大学多次讲授“离散数学”课程的基础上编写的,目的在于给出离散数学的一个精炼的导引,带领读者进入离散数学的殿堂,侧重于就若干重要的内容介绍它的概念与独特的方法,内容不苛求全面,但求重点突出。

——对于定理的证明,本书的作法是只给出比较典型的、有方法论意义的证明,目的在于启发思想,对于平凡的证明,或较难的含有特殊技巧,但并不带有普遍意义的证明一概略去。

不带证明的定理中有一部分可作为读者的习题,读者可试着加以解决,以提高解题的能力。

——无论带有证明或不带证明的定理,作者都尽力地提供它的背景,以及它的适用范围。使读者对这些定理的内涵有更深的理解。

——要学会给数学概念下定义,离散数学的特点之一就在于解决问题的多样性,不但同一个问题有各种不同的解法,同一个概念有各种不同的描述方法,有各种不同的定义方法。本书在适当的地方给出种种不同的定义供读者参考。希望能起到举一反三的作用。

——学数学就要做数学,时间不富裕的读者可只做书中的习题,如果有时间,读者应把书中未完成的例题,未证明的定理以及习题全部做完,这样就有了坚固的基础。

——学习数学不仅限于学习数学知识,更重要的还在于学习数学思维方法,为了学习思维方法,就必须对数学内容有一定的看法。为此,作者在正文适当的地方相应地插入若干“格言”借

以阐发某些观点,藉以引起读者的深思。读者不论是赞成或是反对,只要能让读者对所学的内容加深理解,作者的愿望就达到了。

作者认为:

- 一本好书不仅仅传授科学知识,还能在思想方法上给人们以启迪,促人心智,发人深思!
- 一本好书应当把知识性与趣味性融为一体,使人们阅读时兴趣盎然,留连忘返!
- 一本好书不是让人们牢记许多教条,它应能推动人们思想航行的风帆,催人出征,助人远航!

在书稿的修改、整理过程中感谢我的学生们给了我很大的帮助,提出许多好的意见,马连荣同志仔细地阅读了我的手稿,提出不少好的意见,并提供了部分习题的参考答案,向她深表谢意。

作者于清华园

1992年10月

# 符号表

$C$	复数集
$N$	自然数集(包括 0 在内)
$N^+$	正自然数集
$N^{(n)}$	自然数 $n$ 次方的全体
$P$	素数集/规则 P(见数理逻辑)
$Q$	有理数集
$Q^+$	正有理数集
$Q^-$	负有理数集
$R$	实数集
$T$	规则 T(见数理逻辑)
$Z$	整数集
$Z_m$	$\{[1], [2], \dots, [m]\}$
CP	演绎定理
EG	存在推广规则
ES	存在特指规则
UG	全称推广规则
US	全称特指规则
$\underbrace{R \times R \times \dots \times R}_n, {}^nR$	笛卡儿积/ $n$ 维实空间
CA	集合 $A$ 的补集
$A \times B$	集 $A$ 与集 $B$ 的笛卡儿积
$\underbrace{A \times \dots \times A}_n, {}^nA$	集 $A$ 的 $n$ 重笛卡儿积
$I_A, R^0$	恒等关系
$\bar{A}, A'$	集 $A$ 的补集
$X^X$	所有 $X$ 到自身的映射

$\bar{M},  M $	集合 $M$ 的势(基数)
$R$	关系
$\bar{R}$	否关系
$\bar{R}$	补关系
$R^{-1}$	逆关系
$R^+, t(R)$	关系 $R$ 的传递闭包
$R^*, rt(R)$	关系 $R$ 的自反传递闭包
$R \circ S$	关系 $R$ 与关系 $S$ 的复合
$\underbrace{R \circ \dots \circ R}_n, R^n$	关系 $R$ 的 $n$ 次幂
$r(R)$	关系 $R$ 的自反闭包
$s(R)$	关系 $R$ 的对称闭包
$t(R)$	关系 $R$ 的传递闭包
$rs(R)$	关系 $R$ 的自反、对称闭包
$rt(R)$	关系 $R$ 的自反、传递闭包
$ts(R)$	关系 $R$ 的传递、对称闭包
$B_2^r$	$\underbrace{B_2 \times \dots \times B_2}_r$
$B_2^r$	含有 $2^r$ 个元素的布尔代数
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	合适公式
$\mathcal{A}_{x_1}^{\mathcal{A}} \dots \mathcal{A}_{x_n}^{\mathcal{A}}$	置换公式
$A/R$	$A$ 上由关系 $R$ 所产生的划分
$G/E, G/\pi_E$	$G$ 上由 $\pi_E$ 所产生的划分
$H \circ g, Hg$	$H$ 的右陪集
$g \circ H, gH$	$H$ 的左陪集
$[a]$	生成子, 集 $\{\dots, a^{-1}, a^0, a^1, \dots\}$
$[x]_R$	集 $\{y   y \in A \text{ 且 } \langle x, y \rangle \in R\}$
$xRy$	$x$ 与 $y$ 有关系 $R$
$x \sim y$	$x$ 与 $y$ 等价
$\langle a, b \rangle$	元素 $a, b$ 构成的“序对”
$[x, y]$	偏序集上的区间



$\aleph_0$	阿列夫零
$\aleph_1, \aleph$	阿列夫
$\mathcal{A}$	数学结构
$E_\pi$	由 $\pi$ 产生的等价关系
$\alpha_x$	歧义名称
$N$	正规子群
$\pi_E$	由 $E$ 产生的划分
$\Sigma$	字母符号集
$\Sigma^*$	字母串集合(含空字)
$\Sigma^+$	字母串集合(不含空字)
$\Gamma$	前提集合
$\Delta$	空字
$\in$	属于
$\supseteq$	包含
$\supset$	真包含
$\cup$	集的并运算
$\cap$	集的结合运算
$\upharpoonright$	限制
$+_m$	$m$ 同余加
$\cong$	同构
$\emptyset$	空集
$\mathcal{P}(A)$	集 $A$ 的幂集
$\pi(A)$	集 $A$ 的划分
$\sim, \neg, \text{NOT}$	命题的“非”运算
$\wedge, \&, \text{AND}$	命题的“合取”运算
$\vee, \text{OR}$	命题的“析取”运算
$\rightarrow, \text{IF}\cdots\text{THEN}$	命题的“蕴含”运算
$\leftrightarrow, \equiv, \text{Iff}$	命题的“等值”运算
$\bar{\vee}$	不可兼或
$\uparrow$	谢弗“竖”/sheffer“竖”

↓  
∀  
∃  
┐

皮尔斯“箭”/pierce“箭”

全称量词

存在量词

断定符

# 目 录

1	<b>第一讲 集合论技术</b>
3	<b>第一章 集合概念</b>
3	§1 集合及其表示法
8	§2 子集与幂集
12	§3 集合上的基本运算
16	§4 集合的 Venn 图
20	<b>第二章 关系</b>
20	§5 关系及其表示法
26	§6 二元关系与映射
35	§7 若干特殊关系
45	§8 等价关系与划分
52	§9 序关系与偏序集
59	<b>第三章 集合的基数</b>
59	§10 无穷集与 Galileo 悖论
60	§11 一一对应与可数集
64	§12 Cantor 对角线法与不可数集
66	§13 集合的基数与 Cantor 连续统猜想
68	<b>第一讲习题</b>
73	<b>第二讲 数理逻辑基础</b>
75	<b>第四章 命题演算</b>
75	§14 命题、联结词与真值表
82	§15 真值函数类

90	§ 16	其他逻辑联结词
93	§ 17	联结词的功能完备集
94	§ 18	范式与真值表技术
99	§ 19	演绎和推理
111	<b>第五章 谓词演算</b>	
111	§ 20	引言
112	§ 21	谓词与量词
122	§ 22	函数、项与合适公式
125	§ 23	有效公式
134	§ 24	谓词演算的演绎与推理
145	<b>第二讲习题</b>	
151	<b>第三讲 代数系统</b>	
152	<b>第六章 广群与半群</b>	
152	§ 25	代数系统
153	§ 26	广群与半群
161	§ 27	同态与同构
168	§ 28	同余与可允许划分
172	§ 29	同态、同余与可允许划分
177	<b>第七章 群</b>	
177	§ 30	群的基本性质
183	§ 31	若干特殊的群
190	§ 32	子群、陪集与正规子群
199	§ 33	群的同态与同态基本定理
203	<b>第八章 布尔代数与格</b>	
203	§ 34	引言
204	§ 35	布尔代数的定义与例子

207	§ 36	布尔代数的基本性质
209	§ 37	布尔代数与格
215	§ 38	有限布尔代数的构造
222	§ 39	布尔函数——布尔表达式
226	§ 40	布尔函数的极小化
229		<b>第三讲习题</b>
233		<b>第四讲 图论方法</b>
234		<b>第九章 图的基本概念</b>
234	§ 41	引言
235	§ 42	基本概念
247	§ 43	路与回路
249	§ 44	图与矩阵
258	§ 45	关系与图
261	§ 46	群与图
263	§ 47	Euler 图与 Hamilton 图
273		<b>第十章 树</b>
273	§ 48	树的特征
277	§ 49	生成树
288	§ 50	有向树与根树
293		<b>第十一章 平面图</b>
293	§ 51	平面图与 Euler 公式
296	§ 52	Kuratowski 定理
297		<b>第四讲习题</b>
301		<b>部分习题答案与提示</b>
310		<b>参考文献</b>

## 第一讲

# 集合论技术

连续的形象：

“剪不断，理还乱，是离愁，恰似一江春水向东流。”

南唐·李后主词

离散的形象：

“枯藤老树昏鸦，小桥流水人家，古道西风瘦马，夕阳西下，断肠人在天涯。”

元·马致远

自从 G. Cantor 创立集合论，迄今已有三百年的历史，集合的概念已深入到现代科学的各个方面，成为表达各种严格科学概念的必不可少的“数学语言”。

然而从最早的集合论文献 W. H. Young & G. C. young “The Theory of sets of Points”，(1906)以及著名的 Hausdorff 的“Mengenlehre”(1935)来看，那时所研究的集合多半是分析数学中的“数集”或几何学中的“点集”；虽说在各种文献与著作中叙述集合的元素可以是抽象的，其实都是在数集合与点集合的背景下进行研究的。集合的元素真正成为包罗万象的对象，应当说是从“计算机革命”开始。数字、符号、图象、语音；以及光、电、热各种信息，它们都可以作为“数据”(Data)，这些“数据”，就构成集合。因此，集合

的理论在编译原理,开关理论,信息检索,形式语言,数据库与知识库,CAD,CAI,CADE 以及人工智能的各个领域中,得到广泛的应用。集合论的原理与方法成为名符其实的数学技术。

本讲以朴素的观点讲解集合的理论、方法及其应用,而对公理集合论,只略作介绍。

# 第一章 集合概念

“人类的一切知识皆始于直观,其次是概念,最后发展为理念。”

I. Kant

“没有任何人能将从 Cantor 所创造的这个乐园(集合论)中驱赶出去!”

D. Hilbert

## § 1 集合及其表示法

### 什么是集合

在 1879—1918 年间,G. Cantor 从证明“函数展开为三角级数的唯一性”的研究开始,要求从某一个区间的所有点的全体中,分离出另一个无穷的点集合,为了要把这无穷多个点的全体弄清楚,他感到不能仅仅研究单独的或个别的“点”,必须将具有某种特性的“对象物”看成一个“整体”来进行研究。用他自己的话来说:“凡是在我们的感觉或思维中可以明确区分的对象物,把它们看成一个整体,这个整体,我们就称它是集合(Set),其中的“物”就称为这个集合的“成员”或“元素”(Element)。

从朴素集合论的立场,我们沿用这个描述,把它看作是一种直观的定义,下面用一些实例加以说明:



### 例 1.1

- (1) 1973 年在大兴安岭工作的所有伐木工人。
- (2) 英文字母表中的所有字母。
- (3) 鲁迅“狂人日记”中所有的汉字。
- (4) 自然数的全体(包含数字“0”在内)。(N)
- (5) 非零自然数的全体。(N<sup>+</sup>)
- (6) 所有的整数。(Z)
- (7) 所有的有理数。(Q)
- (8) 所有的正有理数。(Q<sup>+</sup>)
- (9) 所有的负有理数。(Q<sup>-</sup>)
- (10) 所有的实数。(R)
- (11) 所有的复数。(C)
- (12) 所有的素数。(P)
- (13) 小于 10 的素数的集合。
- (14) 方程式:  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的所有“根”的集合。
- (15) 平面上两条平行线的“交点”的集合。
- (16) 所有正整数的平方数构成的集合。
- (17) 所有 Fortran 语言中的标识符构成的集合。

上面所举的种种例子都是集合,有了集合的概念,就可以不仅仅研究单个的“数”与“数据”,而且研究由全体数据所表达的性质,以及更加广泛的问题。

在例 1.1 中,我们列举了许多集合。组成集合的“成员”,称之为集合的元素。将元素  $a$  在集合  $S$  中表示为:

$$a \in S,$$

读作, $a$  属于  $S$ 。如果  $a$  不在集合  $S$  中,记作:

$$a \notin S, \quad (\text{或 } a \bar{\in} S),$$

其中“ $\in$ ”表示属于关系(记号  $\in$  由意大利数学家 Peano 引入,是希腊文 *esti*(esti)的首字母,相当于汉语中的“是”)。