高等数学

学习指导与习题解析

陈仲

南京大学出版社

高　等　数　学

学习指导与习题解析

陈　仲

南京大学出版社

内容简介

本书根据教育部制定的“高等数学课程教学基本要求”编写.考虑学生考研的要求,编写时参照了教育部制定的考研“数学考试大纲”的精神.全书分12章,内容为一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、级数和常微分方程.

本书从《高等数学》教材和习题集中,从高校历年期中考试、期末考试试题中,以及从历年硕士研究生入学考试题中,精选了940例优秀题,逐条详细解析,指出可能发生的错误,总结解题方法和技巧,指导学生举一反三,触类旁通.

本书可作为高等学校《高等数学》课程的教学参考书,习题课教材,以及考研复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题解析/陈仲编.—南京:南京大学出版社,2001.9

ISBN 7-305-02062-1

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第027498号

书　　名　高等数学学习指导与习题解析
编 著 者　陈　仲
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路22号　邮编210093
电　　话　025—3596923　025—3592317　传真　025—3303347
网　　址　www.njupress.com
电子函件　nupress1@public1.ptt.js.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　武进市第三印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　印张　29.5　字数　736千
版　　次　2001年9月第1版　2001年9月第1次印刷
印　　数　1—4 000
ISBN　7-305-02062-1/O·109
定　　价　39.00元

前　言

《高等数学》是高等学校理、工、文科各系的公共必修基础课．学习《高等数学》，除掌握数学的基本概念，基本理论和基本方法外，更重要的是使自己受到良好的科学训练，得到数学思维方法、逻辑推理能力的培养，获得一定的数学素养，为学习专业课和后续课打下扎实的基础．因此要学好《高等数学》成了每个大学生的共识．

数学是一门系统、严谨、抽象的学科，内容多，教学进度快，致使相当多的刚进入大学的大学生感到学习困难．我们编写这本书的宗旨就是指导大学生学好《高等数学》．

本书根据教育部制定的"高等数学课程教学基本要求"编写，并参照了教育部制定的硕士研究生入学考试"数学考试大纲"．内容包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、级数和常微分方程．本书共12章，每章分两部分，第一部分是"基本概念与内容提要"，列出主要概念，基本内容，并对其中的重要内容和主要定理作详细叙述，希望读者能掌握这些内容，它是学好《高等数学》的基础．第二部分是"优秀习题与试题解析"，编者从有关教材与习题集中，从历年高校期中考试、期末考试试题中，以及从历年硕士研究生入学考试题(包括统考与单独考试)中，精选出优秀题共940例，逐条详细解析，对重要题目深入分析研究，总结出解题方法和技巧，并指出可能发生的错误．这些习题解析内容广、类型多、技巧强，是本书的核心内容．编者希望通过习题解析，指导大学生如何解题，做到举一反三，触类旁通．各类学生可根据自己的专业要求，选学本书；文科学生和对高等数学要求较低的学生，对书中的难题可以删略．解题能力虽不是《高等数学》教学的全部内容，但它是学好《高等数学》的试金石．读者如能阅读好本书的习题解析，定能提高分析能力，掌握解题技巧，提升应试水平．为了帮助读者检测学习效果，全书共设置5份阶段复习试题(书末附有试题答案与提示)．

本书可供高等学校学生作为学习《高等数学》课程的教学参考书，可供准备考研的人员作为复习备考用书，可供高等学校教师作为习题课教材或教学参考书．

由于编者水平所限，书中缺点和错误难免，恳请读者批评、指正．

目　　录

1 函数与极限

1.1 基本概念与内容提要

1）集合的概念.集合的并、交、差运算

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

2）一元函数基本概念

设 $I \subseteq \mathbf{R}$,则称映射

$$f: I \to \mathbf{R}$$

为定义在 I 上的一元函数.称 I 为 f 的定义域,记为 $D(f)$.全体函数值 $f(x)$ 的集合称为 f 的值域.

* 利用已知条件求函数的表示式.* 利用函数的解析表达式求函数的定义域.①

(1) 函数的初等性质(奇偶性,单调性,有界性,周期性).

(2) 反函数,* 复合函数,隐函数概念.

(3) * 基本初等函数.

幂函数 $y = x^{\lambda}$,指数函数 $y = a^x(a > 0, a \neq 1)$,对数函数 $y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$,三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$,反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 的性质及其图形.

(4) 初等函数与分段函数.

3）数列与函数的极限

(1) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时恒有

$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$,或称 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

(2) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$,或称 $x \to a$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A.

① 本书中标“*”的内容为重点.

(3) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当 $x > M$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$,或称 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A,简记为 $f(+\infty) = A$.

(4) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当 $x < -M$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$,或称 $x \to -\infty$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A,简记为 $f(-\infty) = A$.

(5) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当 $|x| > M$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$,或称 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A,简记为 $f(\infty) = A$.

4) 函数的左极限与右极限

(1) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < a - x < \delta$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$(左极限为 A),简记为 $f(a-) = A$.

(2) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < x - a < \delta$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$(右极限为 A),简记为 $f(a+) = A$.

5) * 夹逼准则

若函数 $f(x), g(x), h(x)$ 皆在 $x = a$ 的某去心邻域 I 内定义,且 $\forall x \in I$ 有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

若

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A(\text{或} \pm \infty),$$

则

$$\lim_{x \to a} f(x) = A(\text{或} \pm \infty).$$

这里的极限过程改为 $x \to a\pm, x \to +\infty$,或 $x \to -\infty$,上述结论仍成立.

6) * 单调有界准则

若数列 $\{x_n\}$ 单调增有上界,或单调减有下界,则数列 $\{x_n\}$ 必收敛,即 $\exists A \in \mathbf{R}$,使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A.$$

7) * 两个重要极限

若 $x \to a$(或 $x \to a+, x \to a-, x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty$)时 $u(x) \to 0$,则

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1; \quad \lim_{x \to a} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e.$$

8) * 等价无穷小因子替换法则

若 $x \to a$(或其他极限过程)时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小($\alpha(x) \sim \beta(x)$),$\gamma(x)$ 与 $\delta(x)$ 为等价无穷小($\gamma(x) \sim \delta(x)$),则有

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x) f(x)}{\gamma(x) g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\beta(x) f(x)}{\delta(x) g(x)},$$

当右端极限为 A 时,左端也为 A;或右端极限不存在时,左端也不存在.

当 $u \to 0$ 时,有下列无穷小的等价性:

(1) $u \sim \sin u \sim \arcsin u \sim \tan u \sim \arctan u \sim \ln(1+u) \sim e^u - 1$;

(2) $(1+u)^\lambda - 1 \sim \lambda u (\lambda \in \mathbf{R})$;

(3) $1 - \cos u \sim \frac{1}{2}u^2$.

9) * 四则运算法则

在求极限的过程中,常综合运用初等变形,变量代换,四则运算法则,两个准则,两个重要极限,等价无穷小因子替换法则等各种方法.

在下面的章节中,还有运用导数定义,洛必达法则,泰勒展式,定积分定义,级数性质等求极限的方法.

10) 无穷小的概念和性质

若在某极限过程中($x \to a, x \to a+, x \to a-, x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty$ 中任一个),变量或函数 $\alpha(x) \to 0$,则称 $\alpha(x)$ 为该极限过程中的无穷小量,简称无穷小.在同一极限过程中的有限个无穷小的和或乘积仍为无穷小.特别,无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量.例如

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

11) * 无穷小的比较

设 $x \to a$(或 $x \to a+, \cdots$)时,α, β 都是无穷小,若

(1) $\frac{\alpha}{\beta} \to 0$,称 α 是比 β 高阶的无穷小,记为 $\alpha = o(\beta)$.

(2) $\frac{\alpha}{\beta} \to \infty$,称 α 是比 β 低阶的无穷小.

(3) $\frac{\alpha}{\beta} \to c (c \neq 0, c \in \mathbf{R})$,称 α 与 β 为同阶无穷小.特别,当 $c = 1$ 时,称 α 与 β 为等价无穷小,记为 $\alpha \sim \beta (x \to a)$.

(4) $\frac{\alpha}{\beta^k} \to c (c \neq 0, c \in \mathbf{R})$,则以 β 为基准,称 α 为 k 阶无穷小,并称 $c\beta^k$ 为无穷小 α 的主部.例如,因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2},$$

所以 $x \to 0$ 时 $\tan x - \sin x$ 的无穷小主部为 $\frac{1}{2}x^3$.

12) 无穷大的概念、无穷大的比较

当 $x \to +\infty$ 时,下列函数无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln x, x^\alpha(\alpha > 0), x^\beta(\beta > \alpha), a^x(a > 1), x^x.$$

当 $n \to \infty$ 时,下列数列无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln n, n^\alpha(\alpha > 0), n^\beta(\beta > \alpha), a^n(a > 1), n^n.$$

1.2 优秀习题与试题解析

例 1.1 求下列函数的定义域

(1) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}}$;

(2) $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin\frac{2x - 1}{7}$.

解析　(1) 由$\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\geqslant 0, x-3\neq 0$可推出

$$D(y)=\{x\mid (x-1)(x-2)(x-3)\geqslant 0, x\neq 3\}.$$

	$(-\infty,1]$	$[1,2]$	$[2,3)$	$(3,+\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
乘积	$-$	$+$	$-$	$+$

乘积为 + 的区间为 $D(y)$,所以所求的定义域为$[1,2]\cup(3,+\infty)$.

(2) 由$\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0,\\ |2x-1|\leqslant 7,\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 3,\\ -3\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$$

所以所求定义域为

$$x\in\{x\mid -3\leqslant x\leqslant -2 \text{ 或 } 3\leqslant x\leqslant 4\}.$$

例 1.2　设函数 $f(x)$ 满足

$$3f(x)+4x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{x}=0,$$

试求 $f(x)$.

解析　在等式

$$3f(x)+4x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{x}=0, \tag{1}$$

中取 x 为$\dfrac{-1}{x}$得

$$3f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{4}{x^2}f(x)-7x=0, \tag{2}$$

由(1)与(2)消去$f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$得

$$f(x)=4x^3+\frac{3}{x}.$$

例 1.3　设 $f(x)=\cos x, f(\varphi(x))=2-x^2$,求函数 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解析　由 $f(x)=\cos x$ 得$f(u)=\cos u$,令 $u=\varphi(x)$　代入得 $f(\varphi(x))=\cos\varphi(x)=2-x^2$,故

$$\varphi(x)=\arccos(2-x^2).$$

其定义域由解不等式 $|2-x^2|\leqslant 1$ 可得

$$D(\varphi)=\{x\mid -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1 \text{ 或 } 1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}.$$

例 1.4　求下列函数的值域

$$y=\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}.$$

解析　由原式就 x 解出得

$$x=\frac{y-2\pm\sqrt{(2-y)(3y-10)}}{2(2-y)},$$

所以原式的反函数为

$$y=\frac{x-2\pm\sqrt{(2-x)(3x-10)}}{2(2-x)}.$$

由$(2-x)(3x-10)\geqslant 0,2-x\neq 0$可得反函数的定义域为

$$x\in\left(2,\frac{10}{3}\right],$$

因此所求函数的值域为

$$\left\{y \mid 2<y\leqslant\frac{10}{3}\right\}.$$

例 1.5 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-x)$.

解析 在 $f(x)$ 中用 $-x$ 代替 x 得

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$$

例 1.6 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

试求 $f(f(x)),f(f(f(x)))$.

解析 因

$$f(u)=\begin{cases}1, & |u|\leqslant 1,\\ 0, & |u|>1,\end{cases}$$

令 $u=f(x)$ 得

$$f(f(x))=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$$

由于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f(f(x))=1,x\in\mathbf{R}$.且

$$f(f(f(x)))=1,x\in\mathbf{R}.$$

例 1.7 设

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1 & x<0,\end{cases}\qquad g(x)=\frac{1}{x}\quad(x\neq 0),$$

试求 $f(g(x)),g(f(x))$.

解析

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & g(x)>0,\\ 0, & g(x)=0,\\ -1, & g(x)<0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

$$g(f(x))=\frac{1}{f(x)}\quad(f(x)\neq 0),$$

$$=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

例 1.8　设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

$g(x+1)=x^2+x+1$,试求 $f(g(x)),g(f(x)),f[f(g(x))],f[g(f(x))]$.

解析　(1) 令 $x+1=u$,则

$$g(u)=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1,$$

故 $g(x)=x^2-x+1$,由于对一切 x 有 $x^2-x+1>0$,所以

$$f(g(x))=g(x)=x^2-x+1.$$

(2)
$$g(f(x))=f^2(x)-f(x)+1$$
$$=\begin{cases}1, & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(3) 由于 $f(g(x))=x^2-x+1>0$,所以

$$f[f(g(x))]=f(g(x))=x^2-x+1.$$

(4) 由于 $g(f(x))>0,\forall x\in\mathbf{R}$,所以

$$f[g(f(x))]=g(f(x))=\begin{cases}1, & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 1.9　设

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 1+x, & |x|>1,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1, & |x|<2,\\ -2 & |x|\geqslant 2.\end{cases}$$

求复合函数 $f(g(x)),g(f(x))$,并讨论连续区间及间断点.

解析　因　$f(g(x))=\begin{cases}f(1)=2-1=1, & |x|<2,\\ f(-2)=1+(-2)=-1, & |x|\geqslant 2.\end{cases}$

易见连续区间为 $(-\infty,-2],(-2,2),[2,+\infty)$,间断点为 $x=\pm 2$.

$$g(f(x))=\begin{cases}1, & |f(x)|<2;\\ -2, & |f(x)|\geqslant 2.\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义可以求出

$$x\in(-3,0)\cup(0,1]\text{ 时 }|f(x)|<2,$$
$$x\in(-\infty,-3]\cup\{0\}\cup(1,+\infty)\text{ 时 }|f(x)|\geqslant 2,$$

所以

$$g(f(x))=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\text{或 }-3<x<0,\\ -2, & x\leqslant 3,\text{或 }x=0,\text{或 }x>1.\end{cases}$$

其连续区间为 $(-\infty,-3],(-3,0),(0,1),[1,+\infty)$,间断点为 $x=-3,0,1$.

例 1.10　设

$$f(x)=\begin{cases}x, x<0,\\ 0, x\geqslant 0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x, x<0,\\ x^2, x\geqslant 0,\end{cases}$$

试求 $f(g(x)), g(f(x))$.

解析

$$\begin{aligned}f(g(x))&=\begin{cases}g(x), & g(x)<0,\\ 0, & g(x)\geqslant 0,\end{cases}\\ &=\begin{cases}x, & x<0,\\ 0, & x\geqslant 0,\end{cases}\\ &=f(x),\\ g(f(x))&=\begin{cases}f(x), & f(x)<0,\\ f^2(x), & f(x)\geqslant 0,\end{cases}\\ &=\begin{cases}x, & x<0,\\ 0^2 & x\geqslant 0,\end{cases}\\ &=f(x).\end{aligned}$$

例 1.11 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$

解析 因

$$g(u)=\begin{cases}2-u & u\leqslant 0,\\ u+2, & u>0,\end{cases}$$

令 $u=f(x)$ 得

$$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0,\end{cases}$$

因 $f(x)\leqslant 0$ 等价于 $x\geqslant 0$,此时 $f(x)=-x$;$f(x)>0$ 等价于 $x<0$,此时 $f(x)=x^2$,所以

$$g(f(x))=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$$

例 1.12 设 $f(x)$ 为奇函数,$f(1)=a$,且

$$f(x+2)-f(x)=f(2).$$

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$;

(2) 问 a 取何值时,$f(x)$ 以 2 为周期.

解析 (1) 取 $x=-1$ 得 $f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a$,
取 $x=1$ 可得

$$f(3)-f(1)=f(2), \tag{1}$$

取 $x=3$ 可得

$$f(5)-f(3)=f(2), \tag{2}$$

(1) + (2) 得

$$f(5)=f(1)+2f(2)=5a.$$

(2) 欲使 $f(x)$ 以 2 为周期,须对一切 x 有 $f(x+2)=f(x)$,于是必须 $f(2)=2a=0$,故 $a=0$.

例 1.13. 设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是(   ).

(A) 偶函数　　(B) 无界函数

(C) 周期函数　　(D) 单调函数

解析　函数 $x,\tan x,e^{\sin x}$ 的性质如下

	奇偶性	有界性	周期性	单调性
x	奇	无界	非周期	单调增
$\tan x$	奇	无界	周期 π	非单调
$e^{\sin x}$	非奇非偶	有界	周期 2π	非单调
$f(x)$	非奇非偶	无界	非周期	非单调

于是只有(B)成立.

例 1.14　"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

解析　数列极限的 ε-N 语言定义为:

"$\forall\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时有 $|x_n-A|<\varepsilon$."

这是一个很经典的定义,只有掌握它的实质,才能判断有哪些地方可作非实质的改动.因为若对某正数 ε_0,结论成立,则对大于 ε_0 的正数其结论亦成立.所以 $\forall\varepsilon\in(0,1)$ 是可以的;$n>N$ 改为 $n\geqslant N$,只要将存在的 N 改为 $N+1$ 就行;$|x_n-a|<\varepsilon$ 改为 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$ 也是可以的,因为 ε 是任给的正数,2ε 也可认为为任意给定的正数,它可以任意小就行.故选(C).

例 1.15　用定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}=0.$$

解析　因为

$$\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}-0\right|=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}<\frac{1}{1+n\frac{1}{\sqrt{n}}}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}-0\right|<\varepsilon$,我们用上式让$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$,所以 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$,故取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$时有下列叙述:

$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$,当 $n>N$ 时有$\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}-0\right|<\varepsilon$.原式得证.

例 1.16　用定义证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2}.$$

解析　当 $x>1$ 时,$2x-1>x$,

$$\left|\frac{x+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2|2x-1|}=\frac{3}{2(2x-1)}<\frac{3}{2x},$$

令

$$\frac{3}{2x} < \frac{3}{2N_1} = \varepsilon,$$

则 $\forall \varepsilon > 0$,取 $N = \max(1, N_1) = \max\left(1, \frac{3}{2\varepsilon}\right)$,当 $x > N$ 时有

$$\left|\frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

例 1.17 用定义证明

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

解析 因为

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{1}{2}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

在例 1.16 中,我们已就 $x \to +\infty$,给出了证明.下面考虑 $x \to -\infty$ 的情况.当 $x < 0$ 时,$1 - 2x > -x > 0$,

$$\left|\frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2|2x-1|} = \frac{3}{2(1-2x)} < \frac{3}{-2x},$$

令

$$\frac{3}{-2x} < \frac{3}{2N_1} = \varepsilon,$$

则 $\forall \varepsilon > 0$,取 $N = N_1 = \frac{3}{2\varepsilon}$,当 $x < -N_1$ 时有

$$\left|\frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

综合 $x \to +\infty$ 与 $x \to -\infty$ 两种情况可得:

$\forall \varepsilon > 0$,取 $N = \max\left(1, \frac{3}{2\varepsilon}\right)$,当 $|x| > N$ 时有

$$\left|\frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

例 1.18 用定义证明

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x-1} = \infty.$$

解析 因为

$$|x| - 1 > \frac{1}{2}(|x| + 1) \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 3,$$

所以当 $|x| > 3$ 时,

$$\left|\frac{x^2+x}{x-1}\right| = |x| \left|\frac{x+1}{x-1}\right| > |x| \frac{|x|-1}{|x|+1} > \frac{1}{2}|x|,$$

令 $\frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}N_1 = M$,所以 $\forall M > 0$,取 $N = \max(3, N_1) = \max(3, 2M)$,当 $|x| > N$ 时

$$\left|\frac{x^2+x}{x-1}\right| > M.$$

例 1.19 用定义证明

$$\lim_{x\to 2}x^3 = 8.$$

解析 **方法 Ⅰ** 当 $|x-2|<1$ 时，$x<3$，

$$|x^3-8| = |x-2||x^2+2x+4| = |x-2||(x+1)^2+3|$$
$$\leqslant |x-2|(16+3) = 19|x-2|,$$

令

$$19|x-2|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-2|<\frac{\varepsilon}{19},$$

则 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{19}\right)$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时有

$$|x^3-8|<\varepsilon.$$

方法 Ⅱ 因为

$$|x^3-8|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 8-\varepsilon<x^3<8+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{8-\varepsilon}-2<x-2<\sqrt[3]{8+\varepsilon}-2$$

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min(2-\sqrt[3]{8-\varepsilon},\sqrt[3]{8+\varepsilon}-2)$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时有

$$|x^3-8|<\varepsilon.$$

例 1.20 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$ $(A\in\mathbf{R})$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=A,\quad \lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=A.$$

解析 先证必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时有

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

由于 $2n>n>N$，$2n+1>n>N$，所以

$$|x_{2n}-A|<\varepsilon,\quad |x_{2n+1}-A|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$.

再证充分性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$，由定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，$N_2\in\mathbf{N}$，当 $n>N_1$ 时有

$$|x_{2n}-A|<\varepsilon;$$

当 $n>N_2$ 时

$$|x_{2n+1}-A|<\varepsilon.$$

取 $N=\max(2N_1,2N_2+1)$，则当 $n>N$ 时有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

例 1.21 设 A 为实数，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,$$

求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=A.$$

解析 因为 $x_n\to A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，

$$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是固定 N,当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - A\right| \\
= &\left|\frac{1}{n}[(x_1 - A) + \cdots + (x_N - A) + (x_{N+1} - A) + \cdots + (x_n - A)]\right| \\
= &\left|\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - NA) + \frac{1}{n}((x_{N+1} - A) + \cdots + (x_n - A))\right| \\
\leqslant &\frac{1}{n}|x_1 + x_2 + \cdots + x_N - NA| + \frac{1}{n}(|x_{N+1} - A| + \cdots + |x_n - A|) \\
\leqslant &\frac{1}{n}|x_1 + x_2 + \cdots + x_N - NA| + \frac{1}{n}(n - N)\frac{\varepsilon}{2} \\
\leqslant &\frac{1}{n}|x_1 + x_2 + \cdots + x_N - NA| + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|x_1 + x_2 + \cdots + x_N - NA| = 0,$$

所以对上述 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 > N, N_1 \in \mathbf{N}$,当 $n > N_1$ 时,

$$\frac{1}{n}|x_1 + x_2 + \cdots + x_N - NA| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此

$$\left|\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由此原式得证.

例 1.22 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A \quad (x_n > 0, A > 0)$,求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = A.$$

解析 由不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n},$$

故有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \tag{1}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{A}$,应用例 1.21 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = A,$$

对(1)式应用夹逼准则即得所证.

例 1.23 设 $x_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = A$,求证