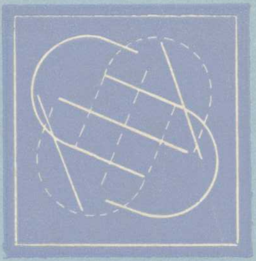
米天林编著



线性代数

米天林编著

线性代数

湖南科学技术出版社

线 性 代 数

米 天 林 编 著

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1984年9月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：9.375　字数：214,000

印数：1——22,700

统一书号：13204·103　定价：1.20元

目　录

前　言

高等教育自学考试，以考促学，开辟了选拔和培养人才的新途径，得到了大批有志青年的热烈欢迎。在这种形势下，我们撰写了经济数学基础《线性代数》这本教材，为广大自学人员提供方便。本书包括了行列式、n维向量、矩阵、线性方程组、矩阵的标准形和二次型等线性代数的基本内容。此外，还把经济战线工作人员特别需要的投入产出数学模型作为本书的附录。

考虑到自学的特点，本书在写作过程中着重注意了以下几点：

1.开门见山。对每章要讨论的主要问题，一开始就交待清楚，使读者心中有数，以便有目的地阅读教材。

2.化繁为简。概念和结论的引入，由具体到抽象，由特殊到一般。有些一般的方法，只用特殊例子来说明，个别定理，只提出结论，而把证明略去或注上“*”号，读者可以略去不看，这样做可使叙述简明，减少读者的困难，也易于掌握。

3.注意突出重点，分散难点，文字叙述力求通俗明白，以利于自学。

4.书中配有较多的例题，有助于读者加深对概念、定理的理解和运用，并掌握一些解题的方法。

5.为巩固所学知识，每章都配有一定数量的习题，这些习题反映了教学的基本要求。此外，每章还附了一些补充题，以扩大知识面，读者可适当选做，书末附有计算题答案，供读者参考。

书中所用符号“∎”表示定理已证完。

本书是在1981年作者编的《线性代数讲义》的基础上修订而成的。原讲义在我院各专业已试用过多次。在修订时参考了部分财经院校有关《线性代数》的教学大纲。因此，本书也可作为高等院校财经专业教学课时为46学时左右的《线性代数》的教材或参考书，以及函授教材。

本书在编写和修订过程中，得到了湖南财经学院数学教研室同志的大力支持；重庆师范学院吕传方副教授对原讲义提出了许多具修改建议；最后，承湖南大学彭肇藩副教授仔细审阅定稿；这次修订出版，还得到湖南省高等教育自学考试指导委员会办公室有关同志的重视和鼓励。在此，特向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平和经验，书中一定存在不少缺点，诚恳地希望读者批评指正。

米天林

一九八四年三月于湖南财经学院

第一章 行 列 式

线性方程组的理论，是线性代数的基础部分，要研究线性方程组，首先就要用行列式这个重要工具。其实，行列式也是人们从解线性方程组的过程中产生的。早在18世纪，为了寻求含有 n 个未知量和 n 个方程的线性方程组一般解的公式的研究中，莱布尼兹和克莱姆首先就引进了行列式的概念。至今，行列式不仅在数学本身，而且在其它一些科学分支中都有着广泛的应用。因此，本章就从行列式开始，主要讨论三个问题：

1.行列式的概念是如何形成的；

2.行列式有些什么基本性质，如何具体计算一个行列式；

3.如何应用行列式来解线性方程组。

§1 二阶与三阶行列式

行列式这个概念究竟是怎样产生的呢？人们认识客观事物，总是先从具体的特殊的事物开始，然后再进一步地扩大认识抽象的一般的事物。因此，这节我们先从解二元和三元线性方程组的过程中，引出二阶和三阶行列式。

一、二阶行列式

设二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为了解此方程组，可用加减消元法：用a_{22}乘(1)的第一式各项，得

$$a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22},$$

再用a_{12}乘(1)的第二式各项，得

$$a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12},$$

然后从所得的前式减后式消去x_2，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

同理，在(1)中用a_{21}乘第一式各项，用a_{11}乘第二式各项，然后由所得的后式减前式消去x_1，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

因此，当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$时，则得(1)的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\\[2ex] x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\end{cases}\tag{2}$$

反之，直接把(2)代入(1)验证，就会知道(2)的确是(1)的解。

(2)式提供了方程组(1)的解的一般公式，但它难于记忆，应用时也不方便，因而有必要引进一个新的符号来表示它，这样就产生了行列式。

定义1 代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，用符号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\tag{3}$$

来表示，把它叫做二阶行列式。D中a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}都叫做这个二阶行列式的元素，而把横排叫做行，纵排叫做列，元素$a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$的第一个下标i表示它所在的行，第二个下

标j表示它所在的列。

从(3) 式可以看出，二阶行列式D的计算规则：先把从左上角到右下角的对角线（又叫行列式的主对角线）上两元素相乘，取正号；再把从右上角到左下角的对角线（又叫行列式的次对角线）上两元素相乘，取负号，然后再把这两个结果合并起来就得到(3) 式。这种计算二阶行列式的规则，也叫做对角线规则。例如，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\times 4-5\times 2=2.$$

由对角线规则，就可把(2) 式中的两个分子分别写成：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

于是方程组(1) 的解(2) 就可表示为

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2&=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

从最后这个式子可以看出，用二阶行列式来表示方程组(1) 的解的公式既简便又易于记忆。

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=13,\\5x_1-4x_2=-2.\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}13 & 3\\-2 & -4\end{vmatrix}=-52+6=-46,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 13\\5 & -2\end{vmatrix}=-4-65=-69.$$

故得方程组的解为：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-46}{-23}=2,\\[2ex]x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-69}{-23}=3.\end{cases}$$

二、三阶行列式

设三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{5}$$

为了解此方程组，可仿照前面的方法，先从第一、第二两式消去x_3，后从第二、第三两式消去x_3，再从所得的两个方程消去x_2，就得到

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\\-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}\\-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}\end{aligned}$$

为了书写方便，把上式简记为

$$Dx_1 = D_1,$$

当$D \neq 0$时，则得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}. \tag{6}$$

同前面一样，为了便于记忆和应用方便，我们引进

定义 2 代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$用符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

来表示，把它叫做三阶行列式，与二阶行列式一样，数a_{ij}($i=1,2,3$；$j=1,2,3$)叫做这个行列式的元素，横排叫行，纵排叫列。

从定义可以看出，三阶行列式共有六项，而且有三项是正的，有三项是负的，其计算规则，也称对角线规则。

例 2 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times1\times3=30+2-24-12+20-6=10.$$

在引进三阶行列式的定义之后，(6) 式就可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

用完全类似的方法，可以得到

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \tag{8}$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

以上(7)、(8)、(9)式就是解三元线性方程组的公式，也称为克莱姆规则：

对于方程组(5)，先把它的九个系数按照原来的位置组成一个三阶行列式D；再把D中第一列的元素换成它对应的常数b_1、b_2、b_3所得的行列式设为D_1；类似地把D的第二列的元素换成b_1、b_2、b_3得到行列式D_2；最后把D的第三列的元素换成b_1、b_2、b_3得到行列式D_3，于是，当$D\neq0$时，方程组(5) 有唯一的

解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{10}$$

例 3　解方程组

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1,\\ x_1-5x_2+3x_3=2,\\ x_1-x_2+x_3=-1.\end{cases}$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-10-12-1+5+4+6$$

$$=-8\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11,\ D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6.$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{11}{-8},\ x_2=\frac{9}{-8},\ x_3=\frac{6}{-8}=\frac{3}{-4}.$$

§2　n阶行列式的概念

在引进了二阶、三阶行列式的概念之后，自然会想到，在解n元线性方程组时，是否也可以用n阶行列式来表达呢？而这

n阶行列式又如何定义呢？前面已经看到，由两个未知量中消去一个是比较容易的，而由三个未知量中消去两个就已经够麻烦了。至于一般，由n个未知量中消去$n-1$个，从理论上讲是可能的，但实际作却是困难的。因此，n阶行列式的定义，也就不能用上面类似的方法来得到，为解决这个问题，先要介绍一下有关排列的性质。

一、排列

1.排列与排列的总数

我们先举一个例子。

例 1 用三个数字1、2、3，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解 这个问题换个说法就是，把三个数字分别放在百位、十位与个位上，有几种不同的放法。

我们知道，百位上可以从1、2、3中任选一个，所以有三种放法，十位上只能从剩下的两个数字中选一个，所以有两种放法，而个位上只能放剩下的一个数字了，所以只有一种放法。因此，共有$3\times2\times1=6$种放法，也就是可以组成六个不同的三位数，它们是

123，132，213，231，312，321。

如果我们把所考察的对象，如上例中的数字1，2，3 叫做元素，那么上述问题，就是把三个不同的元素，按照一定的顺序排成一排，问共有几种不同的排法。

对于n个不同的元素，也可提出类似的问题，因此，我们有

定义 1 把n个不同的元素，按照一定的顺序排成一排，每一种这样的排法，都叫做一个排列，也叫做一个n元排列。

排列的种数如何计算呢？从例1可知，三个不同元素的所有排列共有6个，我们用符号 $P_3=3\times2\times1=6$来记它。一般，n个

不同元素的所有排列的种数，用P_n来表示，为了得出计算P_n的公式，可以仿照例1进行讨论：

第一个位置可以从n个元素中任取一个来排，共有n种方法；

第二个位置只能在剩下的$n-1$个元素中任取一个来排，共有$n-1$种方法；

第三个位置只能在剩下的$n-2$个元素中任取一个来排，共有$n-2$种方法；

如此继续下去，直到最后一个位置，也就是第n个位置，只剩下一个元素，只有一种方法，因此，得到公式

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \qquad (1)$$

公式右边是前n个自然数的连乘积，用符号$n!$来表示，读作“n的阶乘”，于是公式可写成

$$P_n = n!.$$

2. 逆序与逆序数

12345是一个5元排列，这个排列是按大小顺序排列的，称为5元自然顺序排列。在其他的5元排列中，都可以找到一个大数排在一个小数的前面。例如，在排列23154中，2排在1的前面，这样的排列顺序是与自然顺序相反的，我们就说这两个数组成一个逆序。

定义 2 在n个元素的任一排列中，如有一个大数排在一个小数的前面，就说这两个数组成一个逆序；一个排列中逆序的总数，就叫做这个排列的逆序数。排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数记为$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$。

例 2 求排列23154的逆序数。

解 在排列23154中，共有21，31，54等3个逆序，所以$\tau(23154)=3$。

例 3 求$\tau(21354)$。