高等数学教程

李继彬 主编　李国仁　张振良 副主编

科学出版社

高等数学教程

李继彬　主编
李国仁、张振良　副主编

科学出版社
1998

内 容 简 介

本书是根据国家教委对工科高等数学课程的教学基本要求，为适应跨世纪人才培养的需要和教材改革的新形势，在多年教学实践基础上编写而成的。

全书包含线性代数与空间解析几何、一元微积分、多元微积分、级数、常微分方程、数值分析与数学建模等内容。本书内容精炼，重点突出，例题全面，注重对学生数学能力的培养。书中渗入了现代数学的观点，加强了分析、代数和几何的相互联系，从而突出了数学的整体性结构。

本书可作为高等工科院校本科生教材，也可作为有关专业的教师、大学生、工程技术人员与自学成材读者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程/李继彬主编. 一北京：科学出版社，1997

ISBN 7-03-005828-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. 高等数学-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 13622 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

北京双青印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998年5月第 一 版 开本：787×1092 1/16

1998年5月第一次印刷 印张：41 1/4

印数：1—7 400 字数：962 000

定价：54.00元

序

高等数学作为高等工科院校的一门重要的基础课，不仅应向学生传授必需的数学基础知识，而且还应加强数学素质的培养，让学生通过知识载体，学习从量的侧面对事物进行洞察、抽象及研究的思想和方法；培养必要的思维逻辑性和严密性；提高应用数学的意识、兴趣和能力．为学生今后根据工作需要进一步学习和应用现代数学的知识奠定基础，提供可能性．

李继彬、李国仁、张振良教授等编写的《高等数学教程》一书，从上述基本观点出发，根据国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会《关于工科数学系列课程教学改革的建议》精神，结合作者们多年的教学经验，就渗入现代数学观点，促使分析、代数和几何的相互联系，加强数学建模和数值计算等方面进行了有益的探索和改革，力图使本书既能适当反映科学技术现代化的要求又能切合当前教学的实际．这是值得倡导的一种改革方向．

教学内容和课程体系的改革是教学改革的重点与难点，应当鼓励不同层次、不同模式的改革试点；鼓励不同要求、不同风格的教材百花齐放．相信本书的出版将以其具有的特色为工科数学课程教材改革的百花园增添一支鲜花，对提高工科数学教学质量与学生数学素质的培养产生积极作用．

马知恩

1996年11月于西安交大

前　言

本书参照国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会 1995 年 5 月《关于工科数学系列课程教学改革的建议》，适应跨世纪人才培养和教学改革的需要，在昆明理工大学数学教研室高等数学课程多年的教学经验和教材建设的基础上编写而成.

本书内容包含线性代数与空间解析几何、一元微积分、多元微积分、级数、常微分方程、数值分析与数学建模等，各章节后均配有适量习题和综合自测题.

本书的结构与某些讲述方法有别于以往的高等数学通用教材. 首先，把分析、代数与几何揉合在一起进行讲授；其次，在计算机日益普及的信息时代，增加了数值方法和数学建模思想的基本内容；第三，在第一章中引入了反映现代数学的某些基本知识与观点；第四，对常系数非齐次微分方程求特解，用算子方法代替待定系数法等等. 这些都是教材改革的一些新尝试.

本书可作为高等工科院校本科的教材，也可作为广大工程技术人员与自学成才读者的自学用书.

讲授本书的总学时范围为 220—250 学时.

本书第一篇由张振良、李庶民编写，第二篇由李国仁、冯彬编写，第三篇由彭琼英、胡晓华编写，第四篇与第五篇分别由季福弟、李继彬编写. 初稿完成后，由李国仁、张振良、李继彬对全书进行了系统的统稿、定稿和加工工作.

本书的编写出版承蒙国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会主任、西安交通大学马知恩教授的热忱鼓励，并为本书作序，得到昆明理工大学校领导、教务处和教材科的大力支持，科学出版社吕虹同志为本书出版付出了辛勤劳动，香港伍集成文化教育基金会给予部分资助，在此一并表示衷心感谢.

目　　录

第一篇　空间解析几何与线性代数

第一篇　空间解析几何与线性代数

第一章　集合、关系、映射与运算

德国出版的《数学小百科全书》(秦曾复等译,上海科学技术出版社,1985)中,谈到集合论时曾说过下面一段话:"集合论是现代数学大厦的基石.所有数学概念的精确定义都是建立在集合论基础上的,而且数学演绎方法具有逻辑论证与集合论证相结合的特征.简言之,集合论的语言是全世界数学家表达和理解的共同语言.因此,谁想在高等数学和它的实际应用中取得进展,他就必须熟悉集合论的基本概念和结果,理解表达它们的语言".我们将在本章简单地介绍集合论中常用的一些基本概念,这些基本概念包括集合、笛卡尔积、关系(包括等价关系,偏序关系)以及映射和运算.

§1.1　集合的概念

集合是数学的一个最基本的概念,不能用比它更简单的概念来定义它,只能作描述性的解释.集合论的创始人康托尔(G. Cantor)是这样描述的:"集合是我们的感觉或思维所完全确定的某些对象汇总成一个整体的结果;这些对象称为该集合的元素."通常,我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.

如果 a 是集合 A 的元素,就称 a 属于 A,记作 $a\in A$.如果 a 不是集合 A 的元素,就称 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.

通常,自然数、整数、有理数、实数、复数组成的集合分别记作 N,Z,Q,R,C.

含有有限个元素的集合叫做有限集,含有无穷多个元素的集合叫做无限集,不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$.

集合的表述法通常有两种,一种是穷举法,即列出集合的所有元素,元素之间用逗号隔开,并用花括号括起来.例如,26个英文字母集合可以表示为

$$A=\{a,b,c,\cdots,y,z\}.$$

另一种是描述法,即用集合中所有元素所具有的特性来表示集合,记作

$$A=\{x\,|\,P(x)\},$$

其中在"|"的左边表示 x 是 A 的元素,"|"的右边 $P(x)$ 表示元素 x 具有性质 P,花括号表示把所有具有性质 P 的元素汇集成一个集合 A.例如全体正偶数集合可以用描述法表示为

$$B=\{x\,|\,x=2n,n\in N\}.$$

又如平面直角坐标系中,直线 $2x-y=1$ 上所有坐标为 (x,y) 的点组成的集合可以表示为

$$C=\{(x,y)\,|\,2x-y=1,x,y\in R\}.$$

许多集合可以用两种方法表示,如集合 $D=\{1,-1\}$,又可以表示为 $D=\{x\,|\,x\in R,x^2$

$-1=0\}$.

注记 1 集合中的元素是彼此不同的,重复元素只能算一个,如$\{1,1,2,3\}=\{1,2,3\}$.

注记 2 集合中的元素是无序的,如$\{1,2,3\}=\{3,1,2\}$.

定义 1.1.1 设A,B是集合,如果B中的每个元素都是A中的元素,则称B是A的子集合,简称子集.此时也称B被A包含,或A包含B,记作$B\subseteq A$.

如果A不包含B,记作$B\nsubseteq A$.

由上述定义可知,$B\subseteq A$等价于:对任意x,若$x\in B$则必有$x\in A$.

显然,对任意集合A,均有$\varnothing\subseteq A,A\subseteq A$.

定义 1.1.2 设A,B是集合,如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,则称集合A与集合B相等,记作$A=B$.

如果集合A与集合B不相等,记作$A\neq B$.

由这一定义可见,$A=B$等价于:对任意$x,x\in A$必有$x\in B$,且对任意$y,y\in B$必有$y\in A$.

定义 1.1.3 设A,B是集合,如果$B\subseteq A$且$B\neq A$,则称B是A的真子集,记作$B\subset A$.

于是$B\subset A$可以表述为:对任意$x,x\in B$必有$x\in A$,且存在y,使$y\in A$但$y\notin B$.

例如$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$.

定义 1.1.4 设A是非空集合,A的所有子集作为元素组成的集合称为A的幂集,记作$P(A)$或2^A.

因此,$P(A)$可以表示为

$$P(A)=\{x\mid x\subseteq A\},$$

即$x\in P(A)$等价于$x\subseteq A$.

例如$A=\{0,1,2\}$,则

$$P(A)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},A\}.$$

不难看出,若A有n个元素,则$P(A)$有2^n个元素.

人们总是局限于在确定的范围内研究问题,这种确定的范围通常称为空间.换言之,空间就是我们讨论的所有事物构成的集合,又叫做全集,记为E.全集是相对的,不同的问题有不同的全集.例如,我们在有理数范围内研究有理数的大小时,把有理数集取为全集;而在实数范围内研究实数的大小时,把实数取作全集,也就是通常说的实数空间,在几何上对应于实轴上的全体点集.如果我们在平面上研究直线的相互关系,则把平面上所有点的集合取作全集,又叫实平面空间.

定义 1.1.5 设E是全集,A,B是E的子集,集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\},$$
$$A-B=\{x\mid x\in A\text{但}x\notin B\},$$
$$\overline{A}=E-A=\{x\mid x\notin A\}$$

分别称为集合A与B的并集,交集,差集,以及集合A的补集或余集.

两个集合的并集,交集,差集和一个集合的补集分别可以用图 1.1 中的阴影部分来表

示.

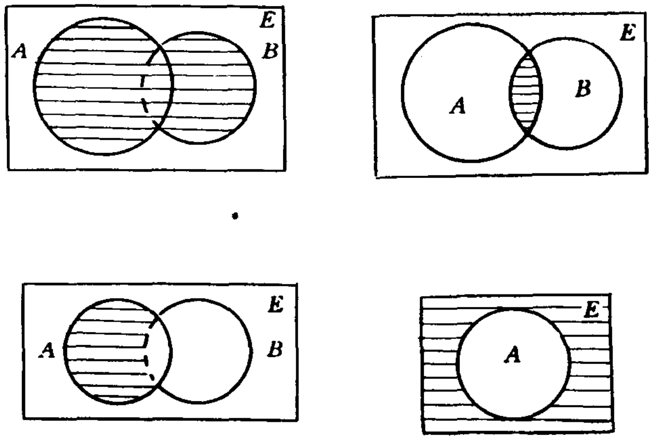

图 1.1

例 1.1.1 设全集是全体实数集合 R,又设集合 $A=\{x|x>0\}$,$B=\{x|-1<x<2\}$,则

$$A\cup B=\{x|x>-1\},$$
$$A\cap B=\{x|0<x<2\},$$
$$A-B=\{x|x\geqslant 2\},$$
$$\overline{A}=\{x|x\leqslant 0\}.$$

两个集合的交与并可以推广到 n 个集合或无穷多个集合的交和并,分别记为

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x|对任意 A_i,有 x\in A_i,1\leqslant i\leqslant n\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x|存在 A_i,使 x\in A_i,1\leqslant i\leqslant n\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots=\{x|对任意 A_i,有 x\in A_i,i\geqslant 1\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots=\{x|存在 A_i,使 x\in A_i,i\geqslant 1\}.$$

习题 1.1

1. 设 a 是集合 A 中的一个元素.下列各式中哪些是正确的,哪些是错误的?

   1)$a\in A$;　2)$a\in\{a\}$;　3)$a\subseteq A$;

   4)$a\subseteq\{a\}$;　5)$\{a\}\subseteq A$;　6)$\{a\}\in A$.

2. 下列各式中哪些是正确的,哪些是错误的?

   1)$\varnothing\in\{\varnothing\}$;　2)$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$;　3)$\varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$;

   4)$\varnothing\subseteq\{\{\varnothing\}\}$;　5)$\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}$;　6)$\{\varnothing\}\subseteq\{\{\varnothing\}\}$.

3. 设全集 $E=\{a,b,c,d,e,f\}$,$A=\{a,d\}$,$B=\{a,b,e\}$,$C=\{b,d\}$.试求下列集合:

   1)$A\cap\overline{B}$;　2)$(A\cap B)\cup\overline{C}$;　3)$\overline{A\cap B}$;　4)$P(A)\cap P(B)$;　5)$P(A)-P(B)$.

4. 求下列集合的幂集:

   1)$\{a,b,c\}$;　2)$\{a,\{b,c\}\}$;　3)$\{\varnothing\}$;　4)$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

5. 化简下列集合的表达式：

1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)$；　　2) $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A$；

3) $(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$；　　4) $(A\cap B)-(C-(A\cup B))$.

6. 设 A,B,C 是集合. 证明：

1) $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$；　　2) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$；

3) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$；　　4) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

7. 设 A,B 是集合. 证明：

1) $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$；　　2) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

§1.2　笛卡尔积和关系

在平面解析几何中，我们引入了直角坐标系，使平面上的任何一个点对应于一对有顺序的实数偶 (x,y)，其中 x 为第一坐标（横坐标），y 为第二坐标（纵坐标）. 把这种思想推广到一般集合上，就得到下面的定义.

定义 1.2.1　设 A,B 是两个非空集合，把集合

$$\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

称为 A 与 B 的笛卡尔积，记作 $A\times B$.

特别，当 $A=B$ 时，$A\times B$ 记作 A^2.

于是，平面直角坐标系中坐标平面就是 R 和 R 的笛卡尔积 R^2，通常称为二维几何空间. 而实数轴称为一维几何空间.

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个非空集合，由 n 个有序组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 组成的集合

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in A_i,1\leqslant i\leqslant n\}$$

称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的 n 维笛卡尔积，记为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$.

本书第四章中将要引入的空间直角坐标系就是实数集 R 的三维笛卡尔积 R^3，称为三维几何空间.

例 1.2.1　给定集合 $A=\{1,2\},B=\{a,b,c\},C=\{x,y\}$，则

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\},$$

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\},$$

$$A^2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\},$$

$$A\times B\times C=\{(1,a,x),(1,b,x),(1,c,x),(2,a,x),(2,b,x),(2,c,x),(1,a,y),(1,b,y),(1,c,y),(2,a,y),(2,b,y),(2,c,y)\}.$$

一般 $A\times B\neq B\times A$.

不难看出，若 A 有 n 个元素，B 有 m 个元素. 则 $A\times B$ 有 $n\times m$ 个元素. 同理，若 C 有 k 个元素，则 $A\times B\times C$ 有 $n\times m\times k$ 个元素.

由此可见，集合 A 与 B 的笛卡尔积实际上是 A 的所有元素与 B 的所有元素之间的有序搭配所组成的序偶（A 的元素在前，B 的元素在后）的全体构成的集合.

现在我们考虑集合 A 与 B 之间的关系. 给定 A 与 B 间的某个关系，满足这种关系的 A 中元素与 B 中元素也组成一个序偶，这些序偶组成的集合是 A 与 B 的笛卡尔积的子集.

定义 1.2.2　设 A,B 是两个非空集合，则 $A\times B$ 的任意子集都称为 A 与 B 的一个二

元关系. 通常,我们用 R,S,Q 等字母表示二元关系. 若 x 和 y 有关系 R,记作 $(x,y)\in R$ 或者 xRy.

特别,若 $A=B$ 时,称为 A 上的关系.

定义 1.2.3 设 R 是 A 到 B 的关系,记

$$\mathrm{dom}R=\{x\mid x\in A,\text{存在 } y\in B,\text{使得}(x,y)\in R\},$$
$$\mathrm{ran}R=\{y\mid y\in B,\text{存在 } x\in A,\text{使}(x,y)\in R\},$$

则 $\mathrm{dom}R$ 和 $\mathrm{ran}R$ 分别称为关系 R 的定义域和值域.

例 1.2.2 设 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,7\}$,求 $R=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B,x\mid y\}$ 和 $\mathrm{dom}R$, $\mathrm{ran}R$,其中 $x\mid y$ 表示 x 能整除 y,而 R 表示 A 中元素能整除 B 中元素的关系.

解
$$R=\{(2,2),(4,4),(2,4),(2,6),(3,6)\},$$
$$\mathrm{dom}R=\{2,3,4\},\mathrm{ran}R=\{2,4,6\}.$$

例 1.2.3 设 S 和 Q 分别表示实数集 R 中的相等关系和大于关系,则

$$S=\{(x,y)\mid x,y\in R,x=y\},$$
$$Q=\{(x,y)\mid x,y\in R,x>y\}.$$

所以,S 是实平面 R^2 中的直线 $x-y=0$,即第一、第三象限的对角线,而 Q 是对角线 $x-y=0$ 的右下方半平面. 它们都是 R^2 的子集.

一般地,n 个非空集合 $A_1,A_2\cdots,A_n$ 的笛卡尔积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的任意子集称为这 n 个集合的 n 元关系. 若 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$,称为 A 上的 n 元关系.

例 1.2.4 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$,求 A 中的三元关系 $R=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in A,x<y<z\}$. 换言之关系 R 表示 x 小于 y 且 y 小于 z 的三元关系,则

$$R=\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),$$
$$(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}.$$

下面我们主要讨论某个集合中的二元关系,并给出两种最重要的关系:等价关系和偏序关系. 它们具有良好的性质和广泛的应用.

定义 1.2.4 设 R 是非空集合 A 上的一个二元关系,

1)若对任意 $a\in A$,均有 $(a,a)\in R$,则称 R 是自反的;

2)若对任意 $a,b\in A$,如果 $(a,b)\in R$,就有 $(b,a)\in R$,则称 R 是对称的;

3)若对任意 $a,b\in A$,如果能由 $(a,b)\in R$ 和 $(b,a)\in R$ 推出 $a=b$,则称 R 是反对称的;

4)若对任意 $a,b,c\in A$,如果 $(a,b)\in R$ 和 $(b,c)\in R$,就有 $(a,c)\in R$,则称 R 是传递的.

例如,设实数集 R 上的关系 S 是小于关系"$<$",即 $(a,b)\in S$ 表示 $a<b$,则 S 是传递的;若 S 是小于等于关系"$\leqslant$",则 S 是自反的,反对称的和传递的;若 S 是相等关系,则 S 是自反的,对称的和传递的.

定义 1.2.5 设 R 是非空集合 A 上的一个关系,若 R 具有自反性,对称性和传递性,则称 R 是 A 上的一个等价关系.

等价关系的例子很多,如实数的相等关系,集合的相等关系,平面直线的平行关系,几何图形的相似关系和全等关系等等.

例 1.2.5 设 $A=\{1,2,\cdots,8\}$,定义 A 上的关系

$$R=\{(x,y)\mid x,y\in A,x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\},$$

其中 $x\equiv y(\bmod 3)$ 称为 x 与 y 模 3 相等，表示 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等，即 $x-y$ 可以被 3 整除. 容易验证 R 是 A 上的等价关系. 记 $A_0=\{3,6\}$，$A_1=\{1,4,7\}$，$A_2=\{2,5,8\}$，则 A_0,A_1,A_2 分别表示 x 除以 3 后余数为 0，1 和 2 的元素组成的集合，不难看出，每个 $A_i(0\leqslant i\leqslant 2)$ 中的任意两个元素都相互等价，不同 A_i 中的两个元素都不等价，而且 $\bigcup\limits_{i=0}^{2}A_i=A$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$. 由此，我们给出下面的定义和结果.

定义 1.2.6 设 R 是非空集合 A 上的一个等价关系，对任意 $a,b\in A$，若 $(a,b)\in R$，则称 a 和 b 关于 R 等价，记

$$[a]=\{x\mid(x,a)\in R,x\in A\},$$

称 $[a]$ 是元素 a 关于 R 的等价类，a 称为 $[a]$ 的代表元.

定理 1.2.1 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

1) 对任意 $x\in A$，$[x]\neq\varnothing$；

2) 对任意 $x,y\in A$，若 $(x,y)\notin R$，则 $[x]\cap[y]=\varnothing$；

3) $\bigcup\limits_{x\in A}[x]=A$.

本书不准备证明这个定理，只解释一下它的含义：结论 1) 表示 A 中的任意元素都有等价类，且等价类不空；结论 2) 表示 A 中任意互不等价的两个元素，它们的等价类不相交；结论 3) 表示所有等价类的并正好等于集合 A 本身.

由此可见，集合中的等价关系的重要性，不仅在于它可以把集合中的每个元素按等价定义无遗漏地分在某一类中，而且不同的等价类互不相交. 这样，按等价类就可以构成对集合的一个划分.

定义 1.2.7 设 R 是非空集合 A 中的等价关系，把等价类作为元素组成的集合构成 A 的一个划分，称为 A 关于 R 的商集，记作 A/R，即

$$A/R=\{[a]\mid a\in A\}.$$

如例 1.2.5 中的商集 $A/R=\{A_0,A_1,A_2\}=\{[0],[1],[2]\}$.

定义 1.2.8 设 R 是非空集合 A 中的一个关系，若 R 具有自反性，反对称性和传递性，则称 R 是 A 中的一个偏序关系. 记作"$\preceq$"，并称 $(A,\preceq)$ 是一个偏序集. 即 $(x,y)\in R$ 记作 $x\preceq y$.

实数集上的小于等于关系"$\leqslant$"；集合 A 的幂集 $P(A)$ 中的集合的包含关系"$\subseteq$"等都是偏序关系.

例 1.2.6 设 Z^* 是非零整数集，定义 Z^* 中的关系

$$R=\{(x,y)\mid(x,y)\in R,x\text{ 整除 }y\}.$$

不难验证 R 是 Z^* 上的偏序关系.

定义 1.2.9 设 $(A,\preceq)$ 是一个偏序集，对任意 $a,b\in A$，如果 $a\preceq b$ 或 $b\preceq a$ 中至少有一个成立，则称 $(A,\preceq)$ 是一个全序集或链，而称 $\preceq$ 是 A 上的一个全序或线性序.

例如，实数集中的小于等于关系"$\leqslant$"是全序关系；集合 A 的幂集 $P(A)$ 中的包含关系"$\subseteq$"则不是全序关系. 同样，非零整数集中的整除关系也不是全序关系.

定义 1.2.10 设 $(A,\preceq)$ 是偏序集，如果 A 中存在元素 b，使得对任何 $a\in A$ 都有 $b\preceq a$，则称 b 是 $(A,\preceq)$ 的最小元. 如果在 A 中存在元素 c，对于任何的 $a\in A$ 都有 $a\preceq c$，则称 c 是 $(A,\preceq)$ 的最大元.

例 1.2.7 设 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$，则 A 在整除关系下，1 是最小元，12 是最大元.

定义 1.2.11 设 $(A,\leq)$ 是偏序集，如果 $b\in A$，而 A 中不存在元素 a，使 $a\leq b$，则称 b 是 $(A,\leq)$ 的极小元. 如果 $c\in A$，而 A 中不存在元素 a，使 $c\leq a$，则称 c 是 $(A,\leq)$ 的极大元.

例 1.2.8 设 $A=\{2,3,4,6,8,12\}$，则在整除关系下，2 和 3 是极小元，8 和 12 是极大元，而 A 中无最小元和最大元.

定义 1.2.12 设 $(A,\leq)$ 是偏序集，$B\subseteq A$，如果存在 $b\in A$，使得对一切 $a\in B$ 都有 $a\leq b$，则称 b 是 B 的上界. 如果存在 $b\in A$，使得对一切 $a\in B$，都有 $b\leq a$，则称 b 是 B 的下界. 如果 b 是 B 的上界，对于 B 的任意上界 c，都有 $b\leq c$，则称 b 是 B 的最小上界（或称上确界）. 如果 b 是 B 的下界，对于 B 的任意下界 c，都有 $c\leq b$，则称 b 是 B 的最大下界（或称下确界）.

例 1.2.9 在例 1.2.8 中，令 $B=\{2,3\}$，则 6 和 12 是 B 的上界，6 是上确界，而 B 无下界和下确界. 又令 $C=\{4,8,12\}$，则 C 无上界和上确界，2 和 4 是 C 的下界，4 是 C 的下确界.

定义 1.2.13 设 $(A,\leq)$ 是偏序集，如果 A 的每个非空子集都有最小元，则称 A 是良序集.

例如，自然数上的小于等于关系是一个良序集.

显然，任意的良序集都是全序集，因为任意两个元素都有最小元，所以任意两个元素都有序关系是全序集. 但全序集不一定是良序集. 例如，实区间 (a,b) 在数的小于等于关系下是全序集，但它无最小元，所以不是良序集.

习题 1.2

1. 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{x,y,z\}$，求

   1) $A\times B$； 2) $B\times A$； 3) $A\times A\times B$.

2. 设 $A=\{1,2,4,6\}$，列出下列关系 R：

   1) $R=\{(x,y)\mid x,y\in A, x+y\neq 2\}$； 2) $R=\{(x,y)\mid x,y\in A, |x-y|=1\}$；

   3) $R=\{(x,y)\mid x,y\in A, 且\dfrac{x}{y}\in A\}$.

3. 设 $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$，定义 A 上关系

   1) $R=\{(x,y)\mid x,y\in A, x+y=10\}$； 2) $S=\{(x,y)\mid x,y\in A, \dfrac{x-y}{2}是整数\}$，

分别说明 R 和 S 具有什么性质？

4. 若 X 和 Y 是正整数集，$x_i\in X, y_i\in Y(i,=1,2)$，验证 $R=\{((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mid x_1+y_2=x_2+y_1\}$ 是等价关系.

5. 设 $X=\{a,b,c,d\}$，R 是 X 上的等价关系，且 $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$，求 X 的各元素的等价类.

6. 对于下列集合中的整除关系

   1) $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$； 2) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

求它们的极小元，最小元，极大元和最大元.

7. 设 $A=\{1,2,3,\cdots,12\}$，“$\leq$”为整除关系，又设 A 的子集 $B=\{2,3,4\}$，$C=\{2,3,6\}$，在 $(A,\leq)$ 中求 B 和 C 的上界，下界，上确界和下确界.

§1.3 映射的概念

映射是一种特殊的关系.它是数学中的基本概念之一.本书第二篇微积分部分将以某种特殊的映射——函数作为研究的对象.

定义 1.3.1 设 f 是 A 到 B 的关系，若 f 满足：对任意 $x\in A$，存在唯一的 $y\in B$，使得 $(x,y)\in f$，则称 f 是 A 到 B 的一个映射，记作 $f: A\to B$. y 称为 x 在映射 f 下的像，x 称为 y 的原像，记作 $y=f(x)$.

从定义可知，映射是一种特殊的关系，这种关系的特点在于，定义域 $\mathrm{dom}\ f=A$，而且 A 中每个元素 x 的像是唯一的.

例 1.3.1 设 $A=\{x_1,x_2,x_3\}$，$B=\{y_1,y_2\}$，又设 $f_1=\{(x_1,y_1),(x_2,y_1),(x_3,y_2)\}$，$f_2=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$，$f_3=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_2),(x_3,y_1)\}$. 问 f_1,f_2,f_3 是否为映射?

解 由定义 1.3.1，f_1 是映射. f_2 不是映射，因为 A 中 x_3 没有像，即 $\mathrm{dom} f_2\neq A$. f_3 也不是映射，因为 x_1 的像不唯一.

例 1.3.2 下面给出几种常用的特殊映射：

1)设 $f: A\to B$，若存在 $y\in B$，使得对于任意 $x\in A$，$f(x)=y$，则称 f 是常值映射.

2)设 $f:A\to A$，若对任意 $x\in A$，$f(x)=x$，则称 f 是恒等映射，记为 I_A.

3)设 $f: E\to\{0,1\}$，使得当 $x\in A$ 时，$f(x)=1$，当 $x\notin A$ 时，$f(x)=0$，则称 f 是 A 的特征函数，记作 χ_A.

4)设 R 是集合 A 上的等价关系，A/R 是 A 关于 R 的商集，则 $f: A\to A/R$，$f(a)=[a]$是 A 到 A/R 的自然映射.

定义 1.3.2 设 $f: A\to B$，则

1)若对任意 $y\in B$，都有 $x\in A$，使 $f(x)=y$，即 $\mathrm{ran}\ f=B$，则称 f 是满射；

2)若对任意 $x_1,x_2\in A$，$x_1\neq x_2$ 时有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是单射；

3)若 f 既是满射又是单射，则称 f 是双射.

例 1.3.3 判断下列映射是满射，单射还是双射：

1)$f: R\to R$，$f(x)=2x^2$；

2)$f: N\to R$，$f(x)=\ln x$；

3)$f: R\to Z$，$f(x)=[x]$，$[x]$表示不大于 x 的最大整数，称之为取整函数；

4)$f: R\to R$，$f(x)=x^3$.

解 1)因为 $f(x)=2x^2$ 是最小值为零的开口向上的抛物线，小于零的实数没有原像，所以 f 不是满射. 又对于任意 $x\in R$，$f(x)=f(-x)=2x^2$，所以 f 也不是单射.

2)$f(x)=\ln x$ 是单射，但不是满射，因为 $\mathrm{ran}\ f=\{\ln 1,\ln 2,\cdots\}\subset R$.

3)$f(x)=[x]$是满射，但不是单射，例如，$f(1.2)=f(1.3)=1$.

4)$f(x)=x^3$ 是双射，因为 $\mathrm{ran}\ f=R$，且 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)=x_1^3\neq x_2^3=f(x_2)$.

定义 1.3.3 设 $f: A\to B$，$g: B\to C$，定义映射 $g\circ f:A\to C$，对任意 $x\in A$，$g\circ f(x)=g(f(x))$，则称 $g\circ f$ 为 f 与 g 的复合映射.

定理 1.3.1 设 $f: A\to B$，$g:B\to C$.