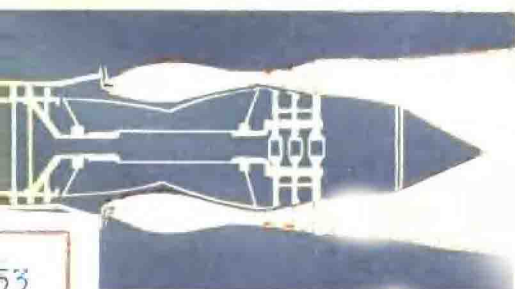


涡轮机高温零件温度场专题文集

第二集

涡轮机转子不稳定温度场的分析研究



53

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是《涡轮机高温零件温度场专题文集》的第二集。本集是在第一集转子稳定温度场的基础上,进一步论述转子在过渡工况下不稳定温度场的分析研究方法。本书共分五篇。第一篇概述了涡轮机转子不稳定导热问题的求解方法;第二篇和第三篇对涡轮机轮盘和转子的不稳定温度场分别提供了二种实用的计算方法,并给出了计算示例;第四篇和第五篇则分别叙述了如何在通用性计算工具——电阻电容式电动积分仪和电阻式电动积分仪上研究转子不稳定温度分布的问题,并给出了模拟计算示例。

本书可供动力、航空、船舶、火箭、核动力和其他工程技术领域的科研人员、设计人员使用;亦可供动力机械、工程热物理和热力工程等专业的大学及研究生参考。

涡轮机高温零件温度场专题文集

第 二 集

涡轮机转子不稳定温度场的分析研究

葛永乐、吕建成 编著

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₃₂ 印张 8 168千字

1982年7月第一版 1982年7月第一次印刷 印数: 0,001—1,000册

统一书号: 15034·2299 定价: 0.83元

前 言

燃气轮机的优点之一在于它可以快速起动, 特别对于航空或运输式燃气轮机, 更可以在几分钟甚至几十秒钟内从冷态达到最大工况, 如英国 RM-60 燃气轮机的起动加速时间仅需 45 秒。这样, 在涡轮的高温零件中(特别是轮盘和转子), 由于边界温度增加太快, 热量来不及向中间传递, 因此在内外边界形成了很大的温度梯度。在快速起动的场合下, 轮盘的径向温差在起动时的最大值可以达到稳定工况下的 2~3 倍, 由此将会产生很大的温度应力, 造成零件的损坏; 如某台燃气涡轮发动机的工作叶片在采用快速起动方案时, 经过 85 次就损坏了, 而改用缓慢起动方案, 则可以经受 900 次起动。由此可以看出, 必须对燃气涡轮的高温零件在各种快速起动工况下的不稳定温度分布进行分析研究, 确定它们的最大温度梯度和温度应力, 以便得出最合适的起动时间, 它既能保证涡轮可靠地工作, 又能满足机组快速起动的需要。

在高温大功率蒸汽轮机中, 由于转子和汽缸等部件都较为笨重, 热惰性较大, 因此即使在起动时间较长的情况下, 在转子的内外径处也会产生很大的温差, 由此也引起严重的温度应力。同时, 在起动过程中, 由于转子和汽缸的加热速度不一样, 另外引起了较大的相对热膨胀, 这很可能导致接触磨损和卡住等危险, 因此也需要研究这些高温部件在起动时的不稳定温度场以便正确地确定它们的相对热膨胀。

此外，在现代工程技术领域中，如核反应堆、超音速飞机、火箭导弹、喷气发动机、高增压内燃机以及其他与高温有关的一系列装置，都面临着包括温度、热应力和高温强度方面的新问题；其中首先需要解决的问题就是如何确定这些高温零件的不稳定温度场。解决上述问题的较简便而又有效的方法就是本书介绍的理论计算和电热模拟法。

不稳定温度场的理论计算和电热模拟法在国外已有很多单位在进行研究，在国内亦有一些单位开始着手进行。本书作者在研究稳定温度场的基础上，又进行了不稳定温度场的分析研究。几年来，在党和上级的正确领导下，全课题同志共同努力，初步掌握了一些研究方法。为了促进学术上的交流，今将我们几年来的一些粗浅体会编写成书，借以抛砖引玉，互相学习，共同提高。

本书的第三篇是根据吴自然同志的论文“燃气涡轮冷却转子在过渡过程中应力状态的研究”一文的有关部分进行改写的。第五篇是根据王子清同志的研究报告“在纯电阻网络上确定涡轮高温零件的不稳定温度场”一文进行改写的。书中有关的电热模拟试验工作是在章诚松、王子清、倪骏妹等同志共同参与下完成的。在本书的编写过程中，曾得到沈岳瑞、熊琳、李根深、李玉斌、陈乃兴、磨庆涛、宋家弟和吴自然等领导同志的多次指导和审阅，作者在此谨致衷心地感谢。

由于作者水平较低、能力有限，在编写中难免出现错误和不妥当之处，诚恳地希望读者提出批评和指正。

作 者

目 录

第一篇	涡轮转子不稳定导热问题的求解方法概述	1
§ 1-1	经典方法	1
§ 1-2	运算方法	17
§ 1-3	近似方法	44
§ 1-4	数值方法	56
§ 1-5	模拟方法	63
§ 1-6	电子计算机上的求解方法	71
参考文献		81
附录 1		85
第二篇	涡轮轮盘不稳定温度场的理论计算方法	97
§ 2-1	引言	97
§ 2-2	轮盘不稳定温度场的基本方程式	97
§ 2-3	盘面冷却空气温度不变时轮盘不稳定温度场的求解	103
§ 2-4	冷却空气和燃气温度任意变化时轮盘不 稳定温度场的求解	115
§ 2-5	叶根冷却时轮盘热交换条件的分析	119
§ 2-6	燃气涡轮轮盘不稳定温度场的计算示例	128
参考文献		146
附录 2		148
第三篇	涡轮转子不稳定温度场的差分方法	158
§ 3-1	引言	158
§ 3-2	一元不稳定导热方程的数值解法	158
§ 3-3	二元不稳定导热方程的数值解法	162
§ 3-4	转子不稳定导热问题的单值条件	166

V

§ 3-5	各种结构形状的转子温度场的确定方法·····	175
§ 3-6	转子温度场数值解法的计算程序·····	180
§ 3-7	ГТ-600-1.5 型燃气轮机整体转子不 稳定温度场的计算示例·····	182
参考文献	·····	205
第四篇	在电阻-电容式电动积分仪上研 究转子的不稳定温度场·····	206
§ 4-1	不稳定温度场电热模拟方法的理论基础和相似准则·····	206
§ 4-2	电阻-电容网络积分仪的电路系统·····	211
§ 4-3	涡轮转子不稳定温度场的求解方法·····	216
§ 4-4	不稳定温度场电模拟测试精度的分析·····	218
§ 4-5	燃气涡轮单盘转子在瞬时起动时的不稳定温度场·····	221
§ 4-6	燃气涡轮单盘转子在逐渐起动时的不稳定温度场·····	224
§ 4-7	初步结论·····	225
参考文献	·····	226
第五篇	在电阻式电动积分仪上求解 转子的不稳定温度场·····	227
§ 5-1	纯电阻网络模拟法的基本原理·····	227
§ 5-2	电阻网络参数的计算公式·····	231
§ 5-3	纯电阻网络模拟的程序·····	235
§ 5-4	有限长棒不稳定温度场的计算示例·····	237
§ 5-5	燃气涡轮轮盘不稳定温度场的计算示例·····	240
§ 5-6	初步结论·····	247
参考文献	·····	249

第一篇 涡轮转子不稳定导热问题 的求解方法概述

研究涡轮转子和其他高温零件的不稳定温度场有很多种方法，但可以归纳为下列六种（不包括热试验方法）：

1. 经典方法——包括分离变量法、热源法和裘阿密尔法等。
2. 运算方法——主要为拉普拉斯变换和汉格尔变换。
3. 近似方法——包括变量消去法和正常情况等。
4. 数值方法——分为元体平衡法和有限差分法两种。
5. 模拟方法——最常用的是电热模拟法和水热模拟法。
6. 电子计算机上的求解方法。

这些方法我们将在以下各节中作简单介绍，并附有示例加以说明。

§ 1-1 经典方法

涡轮高温零件中的不稳定导热过程可以用下列傅立叶微分方程式来表示：

$$\nabla^2 t(x, y, z, \tau) = \frac{1}{a} \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (1-1)$$

式中 x, y, z ——高温零件中任意一点的坐标；

τ ——时间；

$t(x, y, z, \tau)$ ——高温零件的温度，将其表达为时间和坐标的函数；

$$a = \frac{\lambda}{C\gamma} \text{——导温系数;}$$

λ ——导热系数;

C ——比热;

γ ——比重;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{——拉普拉斯算子。}$$

上列微分方程式表示了温度随时间变化和在空间中分布两者之间的关系。为了简化起见, 可以认为 γ , C , λ 与温度、时间和坐标无关, 即保持常数。

为了求得高温零件内部在任何瞬时下的温度场, 亦即为了求解热传导微分方程式, 还必须知道在初瞬时零件内部的温度分布 (初始条件), 零件的几何形状和周围介质与零件表面之间相互作用的规律 (边界条件)。

初始条件可以写为

$$t(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad (1-2)$$

在某些场合下, 如初始瞬时采用均匀的温度分布, 则式 (1-2) 可简化为

$$t(x, y, z, 0) = t_0 = \text{常数} \quad (1-2 a)$$

边界条件可以分为四种, 如参考文献〔2〕所示。对于涡轮高温零件来说, 绝大多数情况是属于第三类边界条件, 并可写为

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = \alpha (t - t_{sp})_s \quad (1-3)$$

式中 α ——放热系数;

s ——对于零件表面上的量;

n ——高温零件表面上的外法线方向。

联立求解微分方程式(1-1)、初始条件(1-2)和边界条件(1-3),可以求得零件在任何瞬时下的温度分布函数,并可用下式表示

$$t(x, y, z, \tau) = f(x, y, z, \tau) \quad (1-4)$$

用经典方法求解上述的不稳定热传导方程,有很多种方法,最主要的是分离变量法、热源法和裘阿密尔法,现将它们简述如下:

一、分离变量法

1. 基本原理

在求解热传导问题时,分离变量法应用得最为广泛,这种方法的基本原理陈述如下(详细介绍可参考文献[1]~[6])。

求解热传导微分方程的经典方法是这样的——先求出符合微分方程式和边界条件的特解 t_n ,然后根据叠加原理,将一系列这样的特解组合起来,即得到微分方程的通解

$$t = c_1 t_1 + c_2 t_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t_n \quad (1-5)$$

式中的系数 c_n 由初始条件求出。

微分方程式的特解 t_n 可以取为二个函数的乘积,其中之一 $\theta(\tau)$ 只与时间 τ 有关,另一个 $\vartheta(x, y, z)$ 只与坐标有关,亦即

$$t_n = c_n \theta(\tau) \vartheta(x, y, z) \quad (1-6)$$

式中 c_n ——任意常数。

将特解(1-6)式代入微分方程式(1-1)中,得到下列关系式

$$\theta(\tau) \nabla^2 \vartheta(x, y, z) = -\frac{1}{a} \vartheta(x, y, z) \frac{d\theta(\tau)}{d\tau}$$

它可以改写为

$$\frac{1}{\theta(\tau)} \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \frac{a}{\vartheta(x, y, z)} \nabla^2 \vartheta(x, y, z) \quad (1-7)$$

等式(1-7)应该在任意的时间和坐标数值下都保持成立；但由于等式的左边只能与 τ 有关，或为常数；右边只能与坐标有关，或为常数；因此只在等式的左右两边都等于某一常数 D 时，等式(1-7)的成立才有可能，亦即

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta(\tau)} \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = D = \text{常数} \end{cases} \quad (1-8)$$

$$\begin{cases} \frac{a \nabla^2 \vartheta(x, y, z)}{\vartheta(x, y, z)} = D = \text{常数} \end{cases} \quad (1-9)$$

对方程式(1-8)进行积分，可得

$$\theta(\tau) = e^{D\tau} \quad (1-10)$$

积分常数归并到(1-6)式的常数 C_n 中，常数 D 可从物理意义中选定。对于趋向于温度平衡的热过程来说，当时间间隔 $\tau \rightarrow \infty$ 时，应达到一定的温度分布；因此 D 值不可能为正，只可能为负（假如 D 为正值，则当 $\tau \rightarrow \infty$ 时，温度为 ∞ ，这与过程的物理性质不符）。

$$\text{令} \quad D = -ak^2 \quad (1-11)$$

式中 a —— 导温系数；

k —— 常数，它的数值由边界条件决定。

将(1-11)式代入(1-10)式，可得

$$\theta(\tau) = e^{-ak^2\tau} \quad (1-12)$$

方程式(1-9)可改写为下列形式

$$\nabla^2 \vartheta(x, y, z) + k^2 \vartheta(x, y, z) = 0 \quad (1-13)$$

微分方程式 (1-13) 通称为包开尔方程式。因此, 应用上述的傅立叶方法, 可以将热传导方程式变为包开尔方程式, 使求解过程大为简化。

假设在某一已知条件下, 方程式 (1-13) 的解可以求得, 并用函数 $\vartheta(x, y, z)$ 来表示, 则热传导微分方程式的特解可写为

$$t_n = c_n e^{-ak^2\tau} \vartheta(x, y, z) \quad (1-14)$$

上式中的常数 c_n 和 k 可以有很多数值, 这时可得到无限多的特解。按叠加原理将这些特解相加, 即可得到热传导微分方程式的通解。解中的 k 值由边界条件确定, c_n 值由初始条件确定。

2. 应用示例——无限大平板

为了进一步说明上述方法, 现通过下面简例——无限大平板进行介绍。这时, 热传导微分方程可简化为

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (1-15)$$

方程式 (1-15) 的特解可写为

$$t(x, \tau) = c\theta(\tau)\vartheta(x) \quad (1-16)$$

代入微分方程式后, 则得

$$\frac{1}{\theta(\tau)} \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = a \frac{1}{\vartheta(x)} \frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} = -ak^2 \quad (1-17)$$

将上式的左边项积分后, 可得到函数 $\theta(\tau)$ 的数值, 即

$$\theta(\tau) = e^{-ak^2\tau} \quad (1-18)$$

方程式 (1-17) 的右边部分可改写成下列形式

$$\frac{d^2 \vartheta(x)}{dx^2} = -k^2 \vartheta(x) \quad (1-19)$$

微分方程式 (1-19) 的两个特解很容易求得, 它们可以分别写为

$$\begin{cases} \vartheta_1(x) = \sin kx \\ \vartheta_2(x) = \cos kx \end{cases} \quad (1-20)$$

因此, 方程式 (1-19) 的通解即为两个特解之和,

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= C\vartheta_1(x) + D\vartheta_2(x) \\ &= C \sin kx + D \cos kx \end{aligned} \quad (1-21)$$

式中 C 和 D ——任意常数。

这样, 热传导微分方程式 (1-15) 的特解可得到如下的形式

$$t(x, \tau) = Ce^{-ak^2\tau} \sin kx + De^{-ak^2\tau} \cos kx \quad (1-22)$$

上式中的常数 k 由边界条件决定, 而常数 C 和 D 则由初始条件确定。对于某一给定的问题, 可以从已知条件中完全确定它们的数值。

按叠加原理, 微分方程式 (1-15) 的通解可以写为

$$t(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n^2 \tau} \sin k_n x + \sum_{m=1}^{\infty} D_m e^{-k_m^2 \tau} \cos k_m x \quad (1-23)$$

二、热源法

1. 基本原理

在广泛应用分离变量法的同时, 亦可采用热源法来求解热传导问题, 如参考文献〔7〕所述。

热源法的物理意义在于物体中任何热量的传播过程均可

视为许多微热源温度均衡过程的复合, 这些微热源分布在空间, 并随时间而变化。因此, 按这种方法求解热传导问题主要是正确地选定微热源和它们的分布。

把一个热源强度为 $Q = c\gamma b$ 的微热源放置在相同材料组成的无限大物体中, 微热源的位置离坐标原点的距离为 ξ ; 在无限大物体单向热流中, 微热源对于 x 点上温度的影响可用下列函数来表示

$$G(x, \xi, \tau) = \frac{b}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} \quad (1-24)$$

通常我们称函数 $G(x, \xi, \tau)$ 为无限直线上的热源函数, 或叫瞬时点热源的温度影响函数, 它能满足热传导微分方程式, 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \tau} &= \frac{b}{\sqrt{4\pi a\tau}} \left[\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{b}{\sqrt{4\pi a\tau}} \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau^2} - \frac{1}{2a\tau} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} \\ \therefore \quad \frac{\partial G}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \end{aligned}$$

因此, 函数 G 通称为热传导方程的基本解。

在采用热源法求解不稳定热传导问题时, 为了使解答符合于初始条件, 可以将初始温度的分布表示为 (1-24) 式形式的各特解之和; 亦即以无穷多个曲线 $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{b}{\sqrt{4\pi a\tau}}$

$\times e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}}$ 之总和代替初始温度分布曲线, 这样就可得出热传导问题的通解。

2. 应用示例——无限长细杆和半无限长细杆

为了说明热源法在求解热传导问题时的应用，现举无限长细杆中的热传导问题作为计算示例。假定杆身为无限长，杆的断面积非常小，因而断面上各点的温度都可看作相同；此外假定杆的侧面是热绝缘的，沿杆身的初始温度分布的规律假设已知，即 $t(x, 0) = f(x)$ 。要求算出任何瞬时的杆上各点的温度分布。

对上述例题，我们可以认为温度只沿杆身 x 方向变化，因此热传导微分方程式 (1-1) 可以简化为

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \quad \left(\begin{array}{l} \tau > 0 \\ -\infty < x < +\infty \end{array} \right) \quad (1-25)$$

在初始瞬时，已知其温度分布为

$$t(x, 0) = f(x) \quad (1-26)$$

边界条件不存在，但可用物体尺寸的无限大来代替它，

$$\frac{\partial t(+\infty, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial t(-\infty, \tau)}{\partial x} = 0 \quad (1-27)$$

按前面所述，方程式 (1-25) 的特解为

$$t = \frac{b}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} \quad (1-28)$$

讨论此特解的性质，并将它表示在图 1-1 上。从图中可以看出，在给定时间 τ 内， x 方向的温度分布曲线有一个极大值，它发生在 $x = \xi$ 处。

温度分布曲线和横坐标轴所形成的面积 S 是一个有限值，它等于 (1-28) 式在极限 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的积分（坐标原点移向 ξ 点）

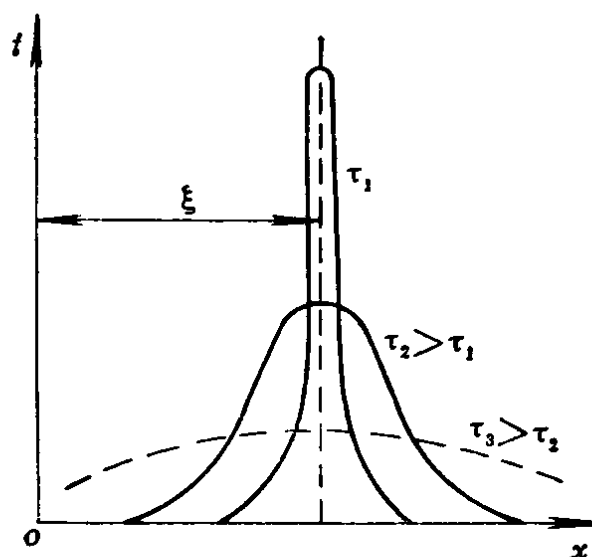


图1-1 无限长细杆中瞬时热源作用时的温度分布

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} d(x-\xi) \quad (1-29)$$

采用新的变量 $z = \frac{x-\xi}{\sqrt{4a\tau}}$ 代入后，上式可写为

$$S = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = b \quad (1-30)$$

因此，曲线下的面积在任何瞬时都保持为一常数 b 。曲线极大点的纵坐标为 $\frac{b}{\sqrt{4\pi a\tau}}$ ，随着时间 τ 的增加，纵坐标减少，而曲线却变得更倾斜（见图 1-1）。相反，随着时间 τ 的减少，纵坐标增大；当时间 $\tau \rightarrow 0$ 时，得到一个无限狭小的带域，但其面积仍保持不变。

应用 (1-28) 式的这些性质，可以把无限长细杆中的已知初始温度分布 $t(x, 0) = f(x)$ 表示为 (1-28) 式形式的各特解之和，即以无穷多个曲线 $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{b}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}}$

的总和代替曲线 $f(x)$ ，如图 1-2 所示。

在图 1-2 中，微段 $d\xi$ 曲线下的微面积 db 等于

$$db = f(\xi) d\xi = t(\xi, 0) d\xi \quad (1-31)$$

无限长细杆中整个初始温度的分布将等于

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} t(x, \tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} d\xi \quad (1-32) \end{aligned}$$

该关系式不仅对初始瞬时 ($\tau \rightarrow 0$) 是正确的，而且对任何一个时间间隔也是正确的，因此该问题的通解可以写为

$$\begin{aligned} t(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} d\xi \quad (1-33) \end{aligned}$$

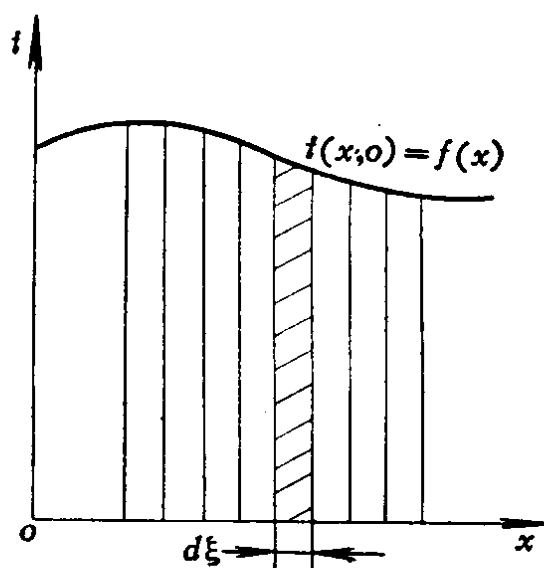


图1-2 初始温度分布用特解总和来表示

对于半无限长细杆，如假定杆端的温度在整个热交换过程中保持为零，这时边界条件可写为

$$\begin{cases} t(0, \tau) = 0 \\ \frac{\partial t(+\infty, \tau)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1-34)$$

此问题的解可以从前面无限长细杆中得到。为此，在负 x 轴方向将杆延长，即认为它是无限长。初始温度在 $x > 0$ 处为 $f(x)$ ，而选择在 $-x$ 点的温度为 $-f(x)$ ，即把函数 $f(x)$ 认为是奇函数

$$f(x) = -f(-x)。$$

这样，半无限长细杆的热传导问题就可转化为无限长细杆的热传导问题，亦即能用公式 (1-33) 来表示半无限长细杆的通解，现把表达式改写为

$$\begin{aligned} t(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \left[\int_0^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^0 -f(-\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \int_0^{\infty} f(\xi) \\ &\quad \times \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a\tau}} \right] d\xi \quad (1-35) \end{aligned}$$

如初始温度为常数，并与 x 无关（在初始瞬间杆身的温度相同，并等于 t_0 ）即

$$t(x, 0) = t_0 = \text{常数} \quad (1-36)$$

这时，解答式 (1-35) 还可以简化。把下列关系式

$$\begin{cases} \xi = x + \alpha \sqrt{4a\tau} \\ \xi = -x + \alpha \sqrt{4a\tau} \end{cases} \quad (1-37)$$

分别代入被积函数的第一部分和第二部分，这时 (1-35) 式可简化为