

飞行器的运动方程

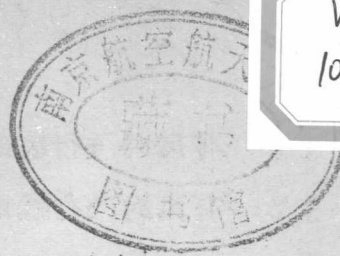
肖业伦



北京航空学院五〇九教研室

一九八〇年八月

V212
1023-1



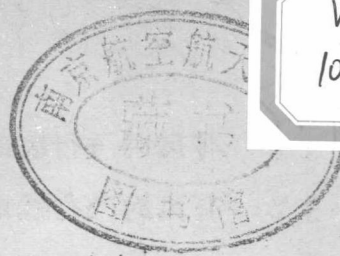
目 录

引 言	3
第一章 予备知识	5
§ 1 坐标变换的一般公式和性质	5
§ 2 活动坐标系中刚体质心动力学方程	10
§ 3 刚体绕质心转动的动力学方程	14
第二章 平面大地情况下的飞行器运动方程	20
§ 1 坐标系的定义	20
§ 2 各坐标系之间的角度关系及变换矩阵	21
§ 3 作用在飞行器上的力和力矩	28
§ 4 飞行器质心运动的动力学方程	31
§ 5 飞行器绕质心转动的动力学方程	37
§ 6 运动学方程及几何关系式	39
§ 7 关于运动方程的一般讨论	44
第三章 球形大地情况下的飞行器运动方程	51
§ 1 坐标系的定义	51
§ 2 各坐标系之间的关系及变换矩阵	52
§ 3 飞行器质心的运动方程	54
§ 4 飞行器绕质心转动的方程	65
§ 5 关于运动方程的一般讨论	67
§ 6 弹道式导弹的主动段运动方程	74
第四章 有风时飞行器的运动方程	87
§ 1 有风时坐标系和运动参数的特点	87



§ 2	有风时飞行器的运动方程 —— HT 体系	88
§ 3	有风时飞行器的运动方程 —— TT 体系	91
§ 4	有风时飞行器的运动方程 —— DT 体系	94
§ 5	有风时飞行器的对称运动方程	96
第五章	飞行器的小扰动线性化方程	100
§ 1	基本概念	100
§ 2	运动方程的线性化	102
§ 3	纵向扰动运动方程组	109
§ 4	横侧扰动运动方程组	117
参考资料		128

V212
1023-1



目 录

引 言	3
第一章 予备知识	5
§ 1 坐标变换的一般公式和性质	5
§ 2 活动坐标系中刚体质心动力学方程	10
§ 3 刚体绕质心转动的动力学方程	14
第二章 平面大地情况下的飞行器运动方程	20
§ 1 坐标系的定义	20
§ 2 各坐标系之间的角度关系及变换矩阵	21
§ 3 作用在飞行器上的力和力矩	28
§ 4 飞行器质心运动的动力学方程	31
§ 5 飞行器绕质心转动的动力学方程	37
§ 6 运动学方程及几何关系式	39
§ 7 关于运动方程的一般讨论	44
第三章 球形大地情况下的飞行器运动方程	51
§ 1 坐标系的定义	51
§ 2 各坐标系之间的关系及变换矩阵	52
§ 3 飞行器质心的运动方程	54
§ 4 飞行器绕质心转动的方程	65
§ 5 关于运动方程的一般讨论	67
§ 6 弹道式导弹的主动段运动方程	74
第四章 有风时飞行器的运动方程	87
§ 1 有风时坐标系和运动参数的特点	87



§ 2	有风时飞行器的运动方程 —— HT 体系	88
§ 3	有风时飞行器的运动方程 —— TT 体系	91
§ 4	有风时飞行器的运动方程 —— DT 体系	94
§ 5	有风时飞行器的对称运动方程	96
第五章	飞行器的小扰动线性化方程	100
§ 1	基本概念	100
§ 2	运动方程的线性化	102
§ 3	纵向扰动运动方程组	109
§ 4	横侧扰动运动方程组	117
参考资料		128

引言

飞行器的运动方程就是对飞行器运动规律的原始描述。无论对于飞行器航迹的计算来说，还是对于飞行器稳定性和操纵性的分析来说，运动方程都是必要的基础。

在飞行力学基本课程中已介绍了普通飞机的运动方程，并在此基础上分析了飞机的性能及稳定性和操纵性。

但是，在飞行器运动方程方面，还有许多丰富的、有意义的内容值得飞行力学工作者了解和钻研。不同类型的飞行器，由于其飞行环境或本身性质的不同，描述其运动的方程也不相同。例如，对于研究普通飞机的运动来说，可以把大地当作平的、静止的，而对于研究超高速飞行器来说，地球的球形和旋转就可能成为不可忽略的因素。有风时的飞行器运动方程比大气静止时的飞行器运动方程要复杂得多。此外，在同样的飞行条件下，运动方程也可以列写成几种不同的形式，这可能是由于研究者的传统习惯决定的，或者是由于不同的形式适用于不同的场合。因此现有的飞行力学文献中出现的飞行器运动方程是种类繁多的，有关的科技人员应充分了解它们的本质和特点，并根据实际情况加以选择。

本课程讲义分为五章。第一章讲述一些预备知识，主要是以矩阵形式书写的关于坐标变换的通用公式以及刚体动力学的一般公式。第二章在把大地当作固定平面的条件下建立飞行器的运动方程，这些运动方程适合于速度不太高的飞机和战术导弹，而且本章内容是以后三章的必要前提，必须牢固掌握。第三章在考虑大地的球形和旋转的条件下建立了超高速飞行器的运动方程，而且对于特殊的类型的飞行器——弹道式导弹或航天器运载火箭——的运动方程作了专门的描述。第四章讲述有风情况下的飞行器运动方程。第五章介绍飞行器运动方程的线性化结果，这样的常系数线性微分方程组适合于研究飞行器的稳定性和操纵性品质。其中对于线性方程的不同形式也进行了深入的讨论。各章内容的联系见图0-1。

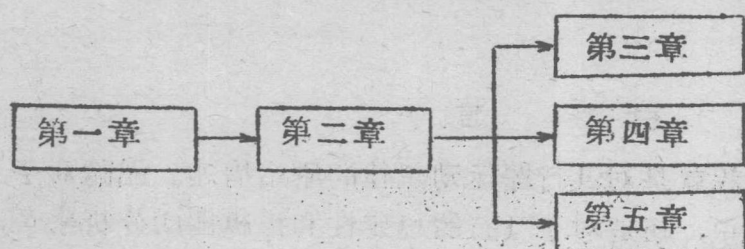


图 0 — 1 各章内容的联系

虽然编者力图使本讲义内容具有尽可能大的普遍性，但终究不可能包罗万象。只要读者掌握了本课程的实质内容并学会它的方法，那末在将来遇到新的问题时就能举一反三，迎刃而解。

第一章 预备知识

§ 1 坐标变换的一般公式和性质

1-1 平面坐标系的变换

设：在平面上有坐标系 $Ox_p y_p$ 和 $Ox_q y_q$ ，它们的相互位置是：若 $Ox_p y_p$ 绕 O 点逆时针转过 α 角，就与 $Ox_q y_q$ 重合（参看图 1-1）。令 (x_p, y_p) 和 (x_q, y_q) 分别为矢量 r 在这两个坐标系中的分量。显然，有

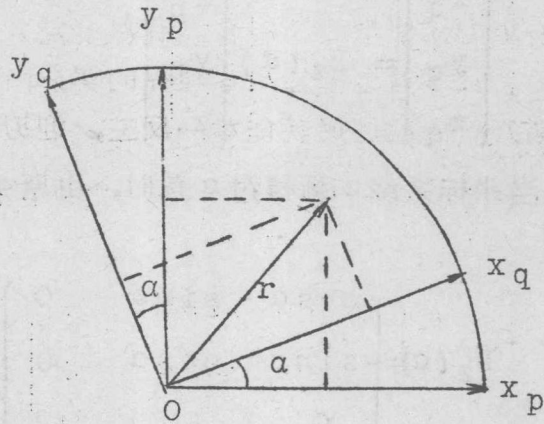


图 1-1 平面上的坐标变换

$$\left. \begin{aligned} x_q &= x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha, \\ y_q &= -x_p \sin \alpha + y_p \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}, \quad (1-2)$$

或

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = B_p^q \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}, \quad (1-3)$$

其中

$$B_p^q = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

称为（从 p 到 q 的）坐标变换矩阵。

1-2 三维坐标系的基元变换

设：原坐标系 $Ox_p y_p z_p$ 绕 z_p 轴转过 α 角，达到新坐标系

0 $x_q y_q z_q$ (参看图 1-2, a)。显然

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

或写成

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = B_z(\alpha) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

所以, 当坐标系绕 z 轴转过 α 角时, 由原坐标系到新坐标系的变换矩阵为

$$B_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-7)*$$

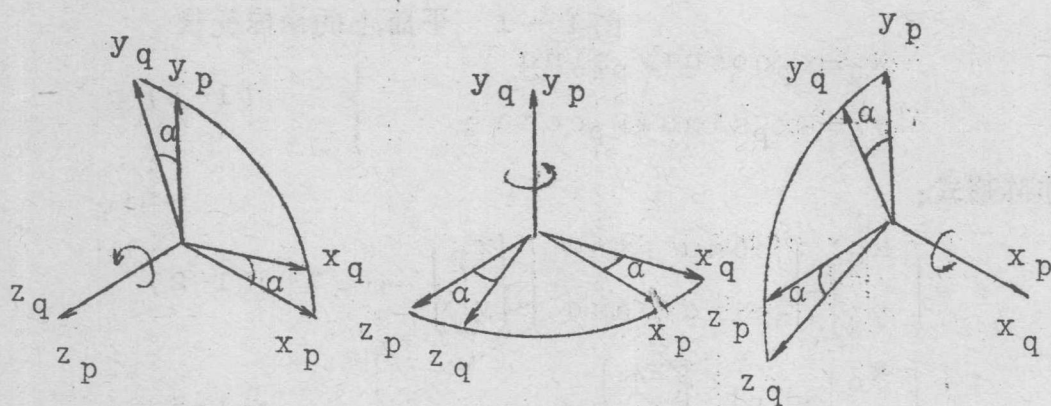


图 1-2 坐标系的基本变换

同样, 当坐标系绕 y 轴转过 α 角时 (参看图 1-2, b), 由原坐标系到新坐标系的变换矩阵为

$$B_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

当坐标系绕 x 轴转过 α 角时 (参看图 1-2c), 由原坐标系到新坐标系的变换矩阵为

$$B_X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

$B_Z(\alpha)$ 、 $B_Y(\alpha)$ 、 $B_X(\alpha)$ 称为基元变换矩阵。

1-3 一般情况下的坐标变换

设想: 由坐标系 $Ox_p y_p z_p$ 到 $Ox_q y_q z_q$ 的过渡是通过如下三次转动来实现的 (参看图 1-3): 首先坐标系 $Ox_p y_p z_p$ 绕 z_p 轴转过一个角 ζ (进动角) 成为 $Ox' y' z_p$; 然后 $Ox' y' z_p$ 绕 y' 轴转过角 η (章动角), 成为 $Ox_q y' z'$; 最后 $Ox_q y' z'$ 绕 x_q 轴转过角 ϵ (自转角), 到达 $Ox_q y_q z_q$ 。角 ζ 、 η 、 ϵ 总称为 Euler 角, 它们完全确定两坐标系之间的相互位置。

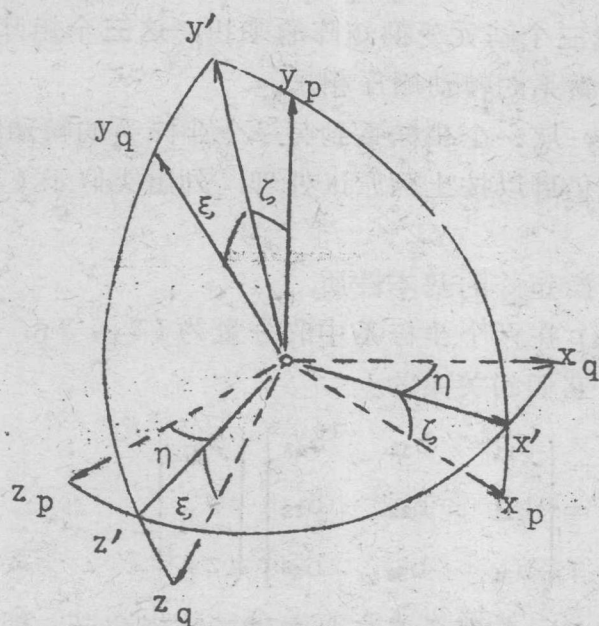


图 1-3 坐标变换的一般情况

根据 1-2 节所述, 可以写出

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = B_X(\epsilon) \begin{bmatrix} x_q \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = B_y(\eta) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z_p \end{bmatrix} = B_z(\zeta) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}.$$

所以得到

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = B_p^q \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}, \quad (1-10)^*$$

这里 B_p^q 是从 p 到 q 的变换矩阵，等于

$$B_p^q = B_x(\xi) \cdot B_y(\eta) \cdot B_z(\zeta) \quad (1-11)$$

其中的 $B_z(\zeta)$ 、 $B_y(\eta)$ 、 $B_x(\xi)$ 的表达式可以按公式 (1-7)、(1-8)、(1-9) 写出，但应分别以 ζ 、 η 、 ξ 代替 α 。

由此可见，由原坐标系 $Ox_p y_p z_p$ 到新坐标系 $Ox_q y_q z_q$ 的变换矩阵 B_p^q 可以表示成三个基元变换矩阵的乘积，这三个矩阵的书写顺序恰恰跟由原系到新系的转动顺序相反。

在具体情况下，从一个坐标系到另一个坐标系的转动顺序可能不同于上述顺序，但仍可以按上列原则处理，列出类似于 (1-11) 那样的式子。

1-4 坐标变换矩阵的基本性质

设：某一矢量 r 在两个坐标系中的分量为 (x_p, y_p, z_p) 和 (x_q, y_q, z_q) ，它们的关系为：

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

变换矩阵的各个元素，实际上是各轴之间的方向余弦，即

$$b_{11} = \cos(x_p, x_q), \quad b_{12} = \cos(y_p, x_q),$$

$$b_{21} = \cos(x_p, y_q), \quad b_{22} = \cos(y_p, y_q),$$

$$b_{31} = \cos(x_p, z_q), \quad b_{32} = \cos(y_p, z_q),$$

$$b_{13} = \cos(z_p, x_q),$$

$$b_{23} = \cos(z_p, y_q),$$

$$b_{33} = \cos(z_p, z_q),$$

仍然利用上述方向余弦的符号，可以写出

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

根据定义和符号规则有

$$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} = B_p^q \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \quad (1-14)$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = B_q^p \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} \quad (1-15)$$

比较(1-12)至(1-15)式，可见 B_p^q 与 B_q^p 互相是转置矩阵，即

$$B_q^p = (B_p^q)^{tr}, \quad B_p^q = (B_q^p)^{tr} \quad (1-16)$$

由这个性质，可以列出如下的更为直观的坐标变换表：

		坐 标 系 p			= B_p^q
		x_p	y_p	z_p	
坐 标 系 q	x_q	b_{11}	b_{12}	b_{13}	
	y_q	b_{21}	b_{22}	b_{23}	
	z_q	b_{31}	b_{32}	b_{33}	

另一方面，由(1-14)，可以写出

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = (B_p^q)^{-1} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix}$$

将上式与 (1-15) 比较, 得到

$$B_p^q = (B_p^q)^{-1}, \quad B_p^q = (B_q^p)^{-1} \quad (1-17)$$

这表明, B_p^q 与 B_q^p 互相是逆矩阵。

比较 (1-16) 和 (1-17), 得到

$$(B_p^q)^{tr} = (B_q^p)^{-1} \quad (1-18)$$

具有这样性质的矩阵, 在线性代数中称为正交矩阵。正交矩阵的各元素必满足如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 b_{ki} b_{kj} &= \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \\ \sum_{k=1}^3 b_{ik} b_{jk} &= \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

也就是说, 坐标变换矩阵的任一行 (或列) 的三元素的平方之和等于 1; 不同行 (或列) 的元素彼此乘积之和等于 0。根据解析几何的定理, 也能直接推出上述结论。

公式 (1-16)、(1-17)、(1-18)、(1-19) 反映的就是坐标变换矩阵的重要性质。

§ 2 活动坐标系中刚体质心动力学方程

2-1 旋转坐标系中矢量的导数

设活动坐标系 $Oxyz$ 具有角速度 ω (见图 1-4)。矢量 ω 在此坐标系中的分量为 ω_x 、 ω_y 、 ω_z , 即

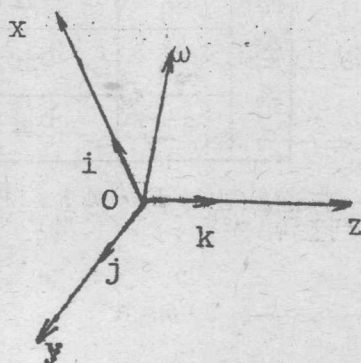


图 1-4

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

其中 i, j, k 是 x, y, z 軸的单位矢量。

设有一个可变的矢量 $a(t)$ ，它在此坐标系中的分量为 a_x, a_y, a_z ，即

$$a = a_x i + a_y j + a_z k \quad (1-20)$$

求 a 对时间的导数。为此，把 (1-20) 式微分：

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & \frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k + \\ & + a_x \frac{di}{dt} + a_y \frac{dj}{dt} + a_z \frac{dk}{dt} \end{aligned} \quad (1-21)$$

后面三项的存在是由于坐标系旋轉， i, j, k 不是常量。

在理論力学中知道，当一剛体绕定点 O 以角速度 ω 旋轉时，剛体上任何一点 P 的速度等于 $\omega \times r$ ，这里 r 是从 O 点引向 P 点的矢徑。另一方面， P 点的速度又等于 dr/dt 。因此

$$\frac{dr}{dt} = \omega \times r \quad (1-22)$$

現在，把单位矢量 i 看成是活动坐标系上某一点 P 的矢徑，于是，与 (1-22) 式相似，可以写出

$$\frac{di}{dt} = \omega \times i$$

同样地，

$$\frac{dj}{dt} = \omega \times j, \quad \frac{dk}{dt} = \omega \times k$$

把以上关系式代入 (1-21) 中，得到

$$\frac{da}{dt} = \frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k + \omega \times (a_x i + a_y j + a_z k)$$

最后得到旋轉坐标系中矢量的导数的公式：

$$\frac{da}{dt} = \frac{\delta a}{\delta t} + \omega \times a \quad (1-23)$$

$$\text{其中 } \frac{\delta a}{\delta t} = \frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k \quad (1-24)$$

称为在活动坐标系中的“相对导数”，相当于站在此活动系中的观察者所看到的矢量 a 变化率，而 $\frac{da}{dt}$ 则称为“绝对导数”，相当于站在固定坐标系中的观察者所看到的矢量 a 变化率。例如，若 a 是某点的矢径，则 $\delta a / \delta t$ 代表该点的相对速度（相对于动坐标系），而 da/dt 则代表该点的绝对速度。

现在把 (1-23) 式推广到更一般的情况。设坐标系 $O_0 x_0 y_0 z_0$ 是静止的，坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 具有角速度 ω_1 ，坐标系 $O_2 x_2 y_2 z_2$ 具有角速度 ω_2 。某一矢量 $a(t)$ 可以分别在坐标系 1 和 2 中分解为

$$\begin{aligned} a(t) &= a_{x_1} i_1 + a_{y_1} j_1 + a_{z_1} k_1 \\ &= a_{x_2} i_2 + a_{y_2} j_2 + a_{z_2} k_2 \end{aligned}$$

根据矢量导数公式 (1-23)，(1-24)，有

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \left(\frac{\delta a}{\delta t} \right)_1 + \omega_1 \times a \\ \frac{da}{dt} &= \left(\frac{\delta a}{\delta t} \right)_2 + \omega_2 \times a \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\delta a}{\delta t} \right)_1 &= \frac{da_{x_1}}{dt} i_1 + \frac{da_{y_1}}{dt} j_1 + \frac{da_{z_1}}{dt} k_1 \\ \left(\frac{\delta a}{\delta t} \right)_2 &= \frac{da_{x_2}}{dt} i_2 + \frac{da_{y_2}}{dt} j_2 + \frac{da_{z_2}}{dt} k_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

分别为矢量 a 在坐标系 1 和 2 中的相对导数。

将 (1-25) 的两式相减，得到

$$\left(\frac{\delta a}{\delta t} \right)_1 = \left(\frac{\delta a}{\delta t} \right)_2 + (\omega_2 - \omega_1) \times a \quad (1-27)$$

这就是所需要的公式，它表示同一矢量 a 在不同坐标系中的相对导数

之間的关系。这里的 $(\omega_2 - \omega_1)$ 就是坐标系 2 相对于坐标系 1 的轉动角速度。

2-2 在任意动坐标系中列写的刚体质心动力学方程
在理論力学中知道，刚体质心的运动方程为

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (1-28)$$

其中 m 为刚体的质量， v 为刚体质心相对于慣性参考系的速度矢量， F 为作用在刚体上的外力总矢量。

设：有一个活动坐标系 $oxyz$ ，它的旋轉角速度为 ω 。在該坐标系中， ω 的分量为 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ，即

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

其中 i, j, k 为沿 x, y, z 軸的单位矢量。

同样，质心速度 v 和力 F 也在該活动坐标系中分解如下：

$$v = v_x i + v_y j + v_z k$$

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

根据在旋轉坐标系中矢量的导数的公式 (1-23)，方程 (1-28) 可改写成

$$m \left(\frac{\delta v}{\delta t} + \omega \times v \right) = F \quad (1-29)$$

$$\text{其中} \quad \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{\delta v_x}{dt} i + \frac{dv_y}{dt} j + \frac{dv_z}{dt} k \quad (1-30)$$

把 $\delta v / \delta t$ ， v ， ω ， F 的表达式代入方程 (1-29) 中：

$$m \left[\left(\frac{dv_x}{dt} i + \frac{dv_y}{dt} j + \frac{dv_z}{dt} k \right) + (\omega_x i + \omega_y j + \omega_z k) \times (v_x i + v_y j + v_z k) \right] = F_x i + F_y j + F_z k$$

展开后，得到

$$m \left(\frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right) = F_x$$

$$\left. \begin{aligned} m \left(\frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right) &= F_y \\ m \left(\frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right) &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

这就是在任意活动坐标系中列写的刚体质心动力学方程。在第二章中，将把方程(1-31)应用到四个不同的坐标系。

§ 3 刚体绕质心转动的动力学方程

3-1 刚体绕质心的转动方程的矢量形式

取一个惯性坐标系 $O_I x_I y_I z_I$ 。设刚体对 O_I 点的动量矩为 H_I ，作用在刚体上的力对 O_I 点的矩为 M_I ，则根据动量矩定理：

$$\frac{dH_I}{dt} = M_I = M + R_0 \times F \quad (1-32)$$

其中 M 是外力对质心之矩， R_0 是质心的矢径（见图1-5）， F 是外力。

动量矩为

$$H_I = \int R \times v dm \quad (1-33)$$

其中 R 是刚体任一点的矢径：

$$R = R_0 + r \quad (1-34)$$

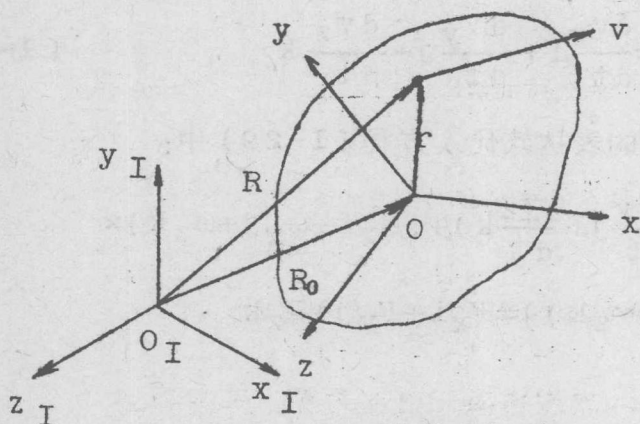


图1-5 刚体的运动