小学数学教师参考书

SUANSHU

算术

上海教育出版社

小学数学教师参考书

算术

上海市中等师范学校教材编写组
上海市安亭师范学校数学教研组

上海教育出版社

小学数学教师参考书

算 术

上海市中等师范学校教材编写组
上海市安亭师范学校数学教研组

上海教育出版社出版
（上 海 永 福 路 123 号）

新华书店上海发行所发行 上海新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 8.625 字数 190,000
1978 年 12 月第 1 版 1979 年 6 月第 2 次印刷
印数 130,001—230,000 本

统一书号：7150·1922 定价：0.59 元

目　录

第一章 整　　数

现实世界中的事物具有各种各样的量，例如多少、长短、粗细、大小、轻重、运动的快慢等。为了研究事物的各种量以及它们之间的关系，例如比较同类量的大小等，从量这一侧面来了解事物，就需要把各种量所具有的共同特征抽象出来，这样就产生了数的概念。

数是数学里一个最主要的、也是最基本的概念。在算术这一学科中，我们将主要讨论整数和分数。

第一节 整数的认识

一、自然数和自然数列

1. 自然数及其起源

(1) 集合。

为了讲清自然数的概念，我们采用了集合的观点，这里先对集合作些简单的介绍。

集合就是具有某种特征的单个事物所组成的整体。一只手的所有手指，一个学校的所有学生，一个人民公社的所有拖拉机等等，分别都可以看作是一个集合。

组成集合的每个个体，都叫做这个集合的元素。例如，每个手指、每个学生、每台拖拉机就分别是上面所举的集合的元素。

一本书也可以作为一个集合，它的元素就是这本书；一个人也可以作为一个集合，它的元素就是这个人。

通常，我们用大写字母 A, B, M, N 等来表示集合，用小写字母 a, b, c, d 等来表示集合里的元素。如果元素 a 是集合 M 里的一个元素，我们就说元素 a 属于集合 M，记成

$$a \in M.$$

反过来，如果元素 a 不是集合 M 里的元素，我们就说元素 a 不属于集合 M，记成

$$a \overline{\in} M (\text{或 } a \notin M).$$

集合可以通过指出它的所有元素来给出。

例如：
$$A = \{a, b, c\},$$
表示集合 A 含有三个元素 a, b, c；
$$B = \{a\},$$
表示集合 B 只含有一个元素 a。

集合也可以通过指出其元素的共同特征来给出。

例如：
$$A = \{\text{立新小学的学生}\},$$
表示集合 A 的元素是立新小学的每个学生。

集合的例子很多。再如，一本书的所有字组成一个集合，这时，在不同页、不同行、或同一行不同位置上的同一单字，算作集合的不同元素；地球上所有的人组成一个集合，这时，应该假定在所讨论的一瞬间既没有出生的人，也没有死去的人。上面所举的集合中，元素的个数都是有限的，它们叫做有限集合。

如果一个集合 A 里的每一个元素，都可以在另一个集合 B 里找到一个唯一的（即有一个也只有一个）元素和它相对应；并且反过来，集合 B 里的每一个元素也都可以在集合 A 里找到一个唯一的元素和它相对应，那末，我们就说这两个集合

里的元素可以一一对应，或者说集合A和集合B等价（或等势），记成

$$A \sim B.$$

例如，右手手指的集合和左手手指的集合等价；又如，如果教室里每个学生正好有一张椅子，不多也不少，那末这些学生的集合和这些椅子的集合等价。

显然，如果集合A和集合B等价，集合B又和集合C等价，那末集合A也一定和集合C等价。即若

$$A \sim B, \quad B \sim C,$$

则

$$A \sim C.$$

根据集合的这一性质，我们可以把所考察的一切集合划分成类，把彼此等价的集合放在一类里。例如，人体上眼睛的集合，耳朵的集合，手的集合，足的集合，它们是等价的，可以放在一类里；左手或右手的手指的集合，左足或右足的足趾的集合，它们也是等价的，可以放在另一类里。

在同一类的集合里，有一种共同的特征。用通俗的说法，就是这些集合里元素的个数相同，且是一定的。

（2） 自然数。

早在远古时代，人类由于在狩猎、捕鱼和采集果实的劳动中，有时有收获，有时无收获，就已逐渐形成了“有”、“无”的概念。随着生产的发展，人类在进行产品分配和物物交换等活动中，需要对不同的“有”进行比较。例如，在物物交换时，就要对物品进行数量的比较，有了比较，才能把不同的“有”区分开。数的概念的形成就是从对“有”的认识开始的。

起初，人类只能把一个物体和多个物体区分开。慢慢地，人类能把一个物体、二个物体和多个物体区分开。至于三个，人类已经认为是很多了。我国古代就是以“一”为“余”（“我”

的意思)、以“二”为“尔”(“你”的意思),而以“三”人为“众”的。直到今天,我们还用“再三”来表示多次。

随着生产和经济活动的复杂化,人类开始利用手指来数数。但是,“屈指可数”的数目必竟是极为有限的。当多到屈指难数的时候,人们就利用周围的物体来作为数数的工具。例如,用木棒打捆、刻刀痕、数石块的办法来数数。我国古代,曾经用竹筹作为计数和进行运算的工具,这种历史状况至今还保留在“算”这个字的写法中。“算”是由“竹”、“具”两字合成的,意即“算”是用“竹具”进行的。我国古代还有用结绳记事进行数数的,并由起先的大事结大结、小事结小结,逐渐演变为一事一结。

当人类还没有使用数字符号,即当人类还没有把数作为抽象的数而与具体物体的集合分离开来时,只是用彼此等价的集合中的一个集合,作为代表来指明这一类集合的物体的个数。例如,在某些民族中,和“月亮”这个集合等价的一类集合就用“月亮”集合作为代表;和“一个人的耳朵”这个集合等价的一类集合就用“一个人的耳朵”集合作为代表。

经过很长的时期,人类才渐渐地把数与具体物体的集合分离开来,采用了数字符号。例如,用“一”来标记“月亮”这一类集合的共同特征;用“二”来标记“一个人的耳朵”这一类集合的共同特征;……。这样就逐步产生了自然数。

由此我们知道,每一个自然数实际上是某一类等价有限集合的共同特征的标记,它表示其中任一集合里的元素的个数。

“一”是自然数中最小的一个,而且任何一个自然数都是由若干个“一”组成的。例如,“二”是两个“一”的结合,“三”是三个“一”的结合;等等。所以,“一”叫做自然数的单位。

刚入学的小学生，习惯于用手指，并进而用点子图、计数器，甚至用数轴上的点（例如尺上的点）来进行数数，并认识抽象的数，这是合乎情理的。小学生在大人（例如教师）的指导下，用极短的时间（与人类对数的认识相比）就完成了从具体物体的集合到抽象的数的飞跃。

2. 自然数列及其性质

从“一”起，逐次添上一个单位，就得到依次排列着的一列自然数：一、二、三、……，它叫做自然数列。自然数列包含了所有的自然数，它是全体自然数的集合。因此，我们经常用自然数列来表示自然数集合。如用N来标记自然数集合，则

$$N=\{一,二,三,\cdots\cdots\}.$$

从上面可以看到，自然数列中最前面的一个自然数是“一”，在“一”后面的一个自然数是“二”，在“二”后面的一个自然数是“三”，……。这就是说，在自然数列中，每一个自然数的后面都跟着且仅跟着一个自然数，自然数列可以无限制地延续下去。由此可以知道，自然数集合是一个无限集合。无限集合的例子很多。例如，自然数中的奇数集合和偶数集合，也都是无限集合。

由前面知道，自然数列中的自然数都是按一定的顺序排列着的，这就是后面的数总是比前面的数包含更多的单位“一”。所以我们说，在自然数列中任何两个数都不相同，排在前面的数较小，排在后面的数较大，它是有序的。

综上所述，自然数列是一个有序的无限集合。

3. 计数

有了自然数列，我们可以更加方便地数数。例如，要知道

教室里有多少学生，我们可以一个一个地指着学生，同时依次念出(或口唱或默念)自然数列中的自然数一、二、三、四等，和所指的学生一一对应，这种过程叫做计数。如果数到"五十二"，那末教室里的学生就和"一"到"五十二"这些自然数一一对应。这就是说，教室里学生的集合与自然数列里的部分自然数（从一到五十二）所组成的集合等价。因为集合$A=\{$一，二，三，……，五十二$\}$中元素的个数正好就是其最后一个自然数"五十二"，所以我们立刻就能知道，教室里共有学生五十二人。

显然，无论用什么顺序来数教室里的学生，或一排一排数，或一列一列数，最后的结果总是相同的。这就是说，只要不遗漏也不重复，计数的结果与计数的顺序没有关系。

同时，由于自然数列是无限的，所以，对于一个有限集合来说，无论其元素多少，计数总是可以进行的。

上面计数时，我们是一个一个数的，这叫逐一计数，又称用单元数。

为了数起来方便，也可以两个两个地数，五个五个地数，甚至十个十个地数。例如两个两个地数，数到九对，就总共数出了十八个物体。这种数法，叫做按群计数，又称按群数。熟练按群计数能提高计算的能力。

4．基数和序数

自然数作为一类等价集合的共同特征的标记，它可以表示集合中元素的多少。同时，由于自然数列的有序性，所以，自然数还可以给有限集合和一些无限集合的元素编号。

例如，一列横队自右向左报数，排尾报"二十五"，这时，这列队伍中的人就和自然数列中"一"到"二十五"这些自然数一

一对应。自然数"一"对应自右起的第一个人，自然数"二"对应自右起的第二个人，……，自然数"二十五"对应自右起的第二十五人(即排尾)。这样就给每个人编上了号。注意：这里的"二十五"既可以表示这列队伍有二十五个人（即集合中有二十五个元素），也可以表示排尾是第二十五号。

用自然数给事物编号，使每件事物都有自己的号数，这样，就可用不同的号数来区别它们。例如，给参加比赛的运动员编上号，使每个运动员都有自己的号数，而且每个号数只代表一个运动员，于是，我们只要说出号数，就可以确定是哪个运动员了。又如，给某街道的大门编上号后，我们就能根据号码很方便地找到所要寻找的大门了。

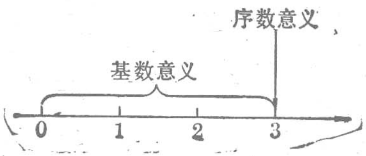
用来表示有限集合中元素多少的数叫做基数；

用来表示有序集合中元素次序（即第几号）的数叫做序数。

综上所述，自然数既具有基数的意义，又具有序数的意义。

小学生有时会幼稚地提出，既然 2 比 1 大，为什么运动会中第一名的成绩反而比第二名好？实际上，这个问题就是反映了小学生还没有理解自然数具有基数和序数这样两重意义。

自然数的这两重意义，也可反映在数轴上。例如，数轴上的"3"既反映了表示"3"的点到原点的距离是 3（即自然数的基数意义），又反映了这一点是从原点向右的第三个自然数点（即自然数的序数意义）。



二、零

自然数是用来表示一个或一个以上物体的个数的。但是，我们常常会遇到一个物体也没有的情况。例如，教室里一个学生也没有，书架上一本书也没有。这时，我们就说教室里学生的集合是个空集合，书架上书本的集合也是个空集合，并用一个新的数“零”来表示这一类集合中元素的个数，即“没有”。空集合一般用记号$\varnothing$表示。注意：$\{0\}$表示只有一个元素0的集合，它不是空集合。

人们是在认识“有”的过程中才逐渐认识“没有”的。例如，飞来三架敌机，全部被打下来，问空中还有几架敌机。首先是空中“有”3架敌机，由于全部被打下来了，否定了空中“有”敌机，于是就产生了“没有”这个概念（这个“没有”是有对象的，即空中没有敌机）。

零作为一个独立的数，它具有非常确定的内容。

例如，数学上零的引进是位置记数法的一个结果。因为这种记数法要求用某种方法来表明缺位。比如三百零六，为了表示其十位上是缺位，在我国古代就必须把算筹摆成|||　丄，而不能摆成|||丄。上述空位虽然没有数字符号，但却有非常确定的内容，它显示|||所在的位置，因而使|||代表“三百”。空就是“没有”。空位在记数法中产生，是“没有”出于“有”的一个例证。“没有”在数学上就是零。

零在特定的条件下还有它特定的内容。例如，“今天气温是摄氏零度”，这并不是说今天没有温度。大家知道，摄氏零度是通常情况下，水开始结冰时的一个完全确定的温度，它是温度零上与零下的界线。

零不是自然数，它比任何自然数都小。如果需要把它和

自然数列放在一起，我们就把它放在一的前面，写成零，一，二，……，这就成了扩大的自然数列。扩大的自然数列仍是一个有序无限集合。

零和自然数都是整数，反之不然。当认识了正、负数以后，可以知道零和自然数只是非负整数。这里说明一点，由于本书不涉及负数，所以在本书中整数通常只是指零和自然数。

根据历史记载，零作为数字，用一个独立的符号来表示"没有"，是在自然数和分数(不带正、负号)产生后才出现的。这种情况可以给予唯物的解释，因为零的最初意义是表示"没有"，正是因为"没有"，所以也就没有过早给予独立符号的迫切需要，完全可以用"不写"或"空位"来代替。

在今天的小学数学课本中，零和自然数一，二，三，……几乎是同时出现的，这样做，可以使小学生迅速地掌握记数的一般方法。

三、进位制和整数的读写

每一个数都应当给它一个名称和书写的符号，这样，我们才能够读出(或称呼)、写出(或记下)这个数。

但是，自然数是无限多的，如果每一个自然数都用一个独立的名称(或符号)来读出(或写出)它，那是非常不方便的，也是不可能做到的。

随着生产和经济的发展，人类迫切需要创造一种较为方便的计数和读、写数的方法。人类生来就有十个指头，而且常常利用这十个指头来计数，所以，就很自然地创造出一种"十进"的计数和读、写数的方法，这就是十进位制。

在我国殷代留下的甲骨文字中，自然数的记法已经毫无

例外地采用十进位制。直到今天,最常见、应用最广泛的也还是十进位制。

1. 十进位制与数位顺序表

从"十进位制"的名称中,我们已经能够知道,十进位制的特点就是"满十进一"。

利用十进位制,我国按如下方法命名各自然数。

(1) 自然数列中最前面的十个数,各有一个独立的名称,这就是一、二、三、四、五、六、七、八、九、十。

十以上的数不给新的名称,而把十和不满十的数结合起来,例如十一、十二、十三、……、十九;十和十合在一起,就是两个十,叫做二十;同样,三个十叫做三十,……,九个十叫做九十。

(2) 十个十给一个新的名称,叫做百。三个百叫做三百;六个百、五个十、三个一,叫做六百五十三。

(3) 十个百给一个新的名称,叫做千。

(4) 十个千给一个新的名称,叫做万。

万以上虽然仍是十进,但不逐一给新的名称。十个万叫做十万,十个十万叫做百万,十个百万叫做千万。

(5) 十个千万给一个新的名称,叫做亿。亿以上有十亿、百亿、千亿。

(6) 十个千亿(即万亿)给一个新的名称,叫做兆。兆以上有十兆、百兆、千兆。

(7) 十个千兆(即万兆)给一个新的名称,叫做京。京以上有十京、百京、千京。

…………

一(个)、十、百、千、万、十万、百万、千万、亿、十亿、百亿、