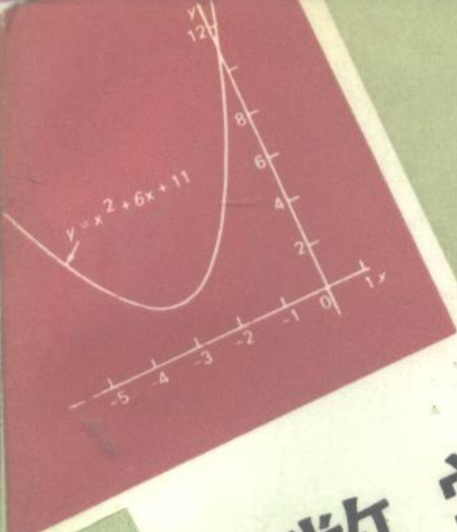
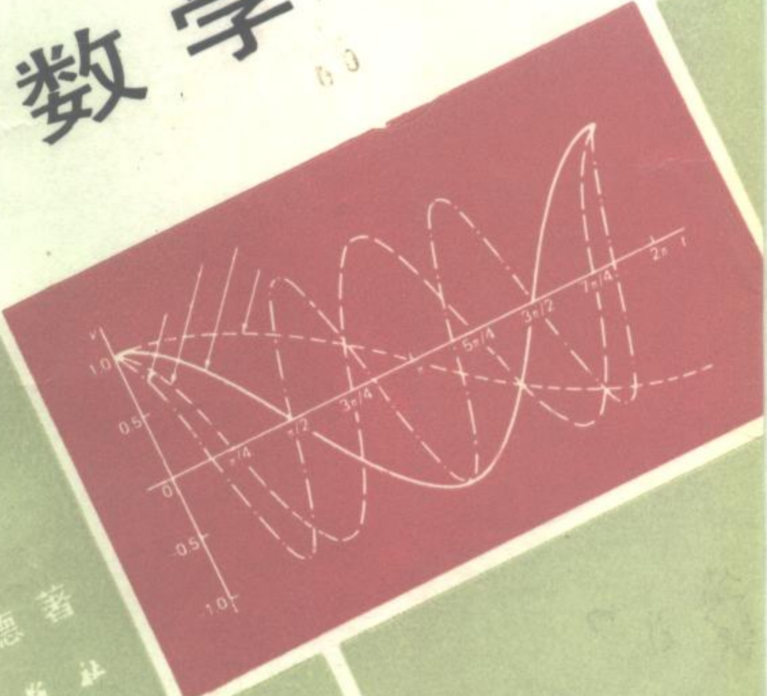
新技术、科学系列



数学手册



J.O.伯德 著

科学出版社

新技术、科学系列

数学手册

J. O. 伯德 著

方开文 华玉清 译

许履瑚 梁在中 校

科学出版社

1990

内 容 简 介

本数学手册是英国巴特沃思出版公司出版的新技术科学系列手册之一。它以简明的形式介绍了学生、工程技术人员所必需掌握的各种数学运算公式和有关资料．本手册特别适用于普通中学和技术学校的学生，其编排使读者能很快地查到所需要的内容，对工程师和技术人员及技工也是一部很有价值的参考书和工具书．

J. O. Bird
NEWNES
MATHEMATICS POCKET BOOK
FOR ENGINEERS
Butterworth & Co (Publishers) Ltd, 1983

新技术、科学系列
数 学 手 册
J. O. 伯 德 著
方开文 华玉清 译
许履瑚 梁在中 校
责任编辑 李义发
科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100707
中国科学院印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1990年12月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1990年12月第一次印刷 印张：10 1/4
印数：0001—4 000 字数：234 000
ISBN7-03-001840-0/O·356
定价：7.20 元

前　　言

本手册为学生、技术人员、工程师和科学家提供一些简明适用的参考资料，包括他们在学习和工作中所必需的一些基本数学公式、定义以及一般知识.

本手册要求的预备知识不多，适应范围广，对于那些正为取得技术证书和文凭而学习的学生，以及为取得中等教育证书（包括高中和初中水平证书）的学生特别适用.

作者对出版者的友好合作和有益建议，对托尼·梅（Tony May）先生在编辑手稿中所给予的帮助深表谢意．作者也向伊莱恩·伍莉（Elaine Woolley）夫人表达感激之情，她出色地打印了手稿.

最后，还要感谢我的妻子伊丽莎白（Elizabeth）在手册编写过程中所给予的耐心支持和鼓励.

J. O. 伯德

朴次茅斯　海伯利工学院

目　　录

第 一 章　算术运算 …………………………………………（ 1 ）
第 二 章　数系 ………………………………………………（ 11 ）
第 三 章　代数学 ……………………………………………（ 28 ）
第 四 章　级数 ………………………………………………（ 48 ）
第 五 章　矩阵和行列式 ……………………………………（ 79 ）
第 六 章　复数 ………………………………………………（ 92 ）
第 七 章　几何学 ……………………………………………（106）
第 八 章　图象 ………………………………………………（112）
第 九 章　求积法 ……………………………………………（131）
第 十 章　三角学 ……………………………………………（145）
第十一章　双曲函数 …………………………………………（169）
第十二章　微分学 ……………………………………………（179）
第十三章　积分学 ……………………………………………（202）
第十四章　微分方程 …………………………………………（231）
第十五章　布尔代数和逻辑电路 ……………………………（252）
第十六章　统计学 ……………………………………………（271）
第十七章　拉普拉斯变换 ……………………………………（309）
索引 ……………………………………………………………（319）

第一章　算术运算

1. 算术是数的科学——计数、计算和运算的技艺.

最大公因(约)数

2. 当两个或两个以上的数相乘时，每个数都称为因数. 因此，一个因数是一个能整除另一个数的数. 最大公因数就是能够同时整除两个或两个以上数的那个最大的数.

例如，求 12, 30 和 42 的最大公因数，首先将每个数用它的质因数连乘积的形式来表示. 这可依次用质数 2, 3, 5, 7, 11, 13, …, 反复相除(可能的话)而达到. 因此

$$\begin{array}{rcccccccl}
12 = & 2 & \times 2 \times & 3 & , & & \\
30 = & 2 & \times & 3 & \times 5, & \\
42 = & 2 & \times & 3 & & \times 7.
\end{array}$$

对这三个数来说，公共的因数是等号右边第 1 列中的 2 和第 3 列中的 3，如虚线框所示. 因此，最大公因数是 2×3，即 6. 也就是说，6 是能够整除这三个数的最大的数.

最小公倍数

3. 若一个数是另一个数的整数倍，则这个数就称为倍数. 能够同时被两个或两个以上的数整除的最小的数称为最小公倍数.

例如，求 12, 42 和 90 的最小公倍数，先将每个数用它的质因数连乘积的形式来表示，然后选择各因数中最大的一组. 因此

$$
\begin{aligned}
12 &= \boxed{2\times2} \times 3, \\
42 &= 2 \times 3 \times \boxed{7}, \\
90 &= 2 \times \boxed{3\times3} \times \boxed{5}.
\end{aligned}
$$

各因数中，最大一组数为虚线框所示，即 12 中的 2×2，90 中的 3×3，90 中的 5 和 42 中的 7. 因此，最小公倍数是 $2\times2\times3\times3\times5\times7=1260$，这是能够被 12，42 和 90 整除的最小的数.

运 算 顺 序

4. 在算术运算中，其运算顺序如下：

（i）计算括号内的运算值；

（ii）作乘法和除法运算；

（iii）作加法和减法运算.

例如 $13-2\times3+14\div(2+5)$.

计算上式的值：

$$
\begin{aligned}
&13-2\times3+14\div7 && \text{（括号）}\\
&=13-2\times3+2 && \text{（除法）}\\
&=13-6+2 && \text{（乘法）}\\
&=15-6 && \text{（加法）}\\
&=9. && \text{（减法）}
\end{aligned}
$$

分 数

5. 当 2 被 3 除时，可以写成 $\frac{2}{3}$ 或 2/3. $\frac{2}{3}$ 就叫做分数. 分数线上的数，即 2，叫做分子；分数线下的数，即 3，叫做分母. 当分子的值小于分母的值时，该分数叫做真分数，例如 $\frac{2}{3}$ 就是一个真分数. 当分子的值大于分母的值时，该分数叫

做假分数，例如 $\frac{7}{3}$ 就是一个假分数．假分数也可以表示成一个带分数，即一个整数加上一个真分数．例如，假分数 $\frac{7}{3}$ 就等于带分数 $2\frac{1}{3}$．

用同一个数去除一个分数的分子和分母，使其简化，这个过程称为约分．零不能做除数．

持 分 数

6．任何一个分数都可以以下列分数所示的形式来表示；

$$\frac{26}{55}=\frac{1}{\frac{55}{26}}=\frac{1}{2+\frac{3}{26}}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{26}{3}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

后者的一般形式可以表示为

$$\frac{1}{A+\frac{1}{B+\frac{1}{C+\frac{1}{D}}}},$$

与前式比较可知，A, B, C 和 D 分别是 2, 8, 1 和 2.

以上述一般形式表示的分数称为连分数．整数 A, B, C 和 D 称为连分数的商．这些商可用于求原分数的逐渐近似值，这些近似值称作收敛子．

可以用列表的方法求一个分数的收敛子：

	1	2	3	4	5
a		2	8	1	2
$b\begin{cases} bp \\ \overline{bq} \end{cases}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{26}{55}$

（i）在 $a2$, $a3$, $a4$ 和 $a5$ 格内写出商 2, 8, 1 和 2; $a1$ 格留空;

（ii）分数 $\frac{0}{1}$ 总是写在 $b1$ 格内;

（iii）$a2$ 格中的商的倒数总是写在 $b2$ 格中，此时即 $\frac{1}{2}$;

（iv）$b3$ 格中的分数是

$$\frac{(a3\times b2p)+b1p}{(a3\times b2q)+b1q},$$

即

$$\frac{(8\times 1)+0}{(8\times 2)+1}=\frac{8}{17};$$

（v）$b4$ 格中的分数是

$$\frac{(a4\times b3p)+b2p}{(a4\times b3q)+b2q},$$

即

$$\frac{(1\times 8)+1}{(1\times 17)+2}=\frac{9}{19},$$

等等. 因此，$\frac{26}{55}$ 的收敛子是 $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{9}{19}$ 和 $\frac{26}{55}$，每个值都愈来愈逼近于 $\frac{26}{55}$.

分数的这些近似值用于求得齿轮或分度器（用以测量所需的角位移）的实际比率.

比

7. 一个量与另一个量之比是一个分数，是具有同类量纲的一个量为另一个量的倍数. 因此，25 便士与 3.75 英镑之比可表示为

$$\frac{25}{375}, \quad 即 \quad \frac{1}{15}.$$

比　例

8. 如果一个量与另一个量成正比，那么，当一个量加倍时，另一个量也加倍. 反之，若一个量与另一个量成反比，那么，当一个量加倍时，另一个量则减半(参见第三章第 5 条的(iii)).

如果要将 126 按 5 与 13 之比来划分，那么，首先将这两个份数加起来，即 $5+13=18$. 此时，18 份相当于 126. 因此

$$1\text{ 份相当于 }\frac{126}{18}=7,$$

$$5\text{ 份相当于 }5\times7=35,$$

$$13\text{ 份相当于 }13\times7=91.$$

所以，126 按 5 与 13 之比划分，结果为 35:91.

小　数

9. 十进制的数码是以数字 0 至 9 为基础. 例如数 53.17 就叫做十进小数，小数点把这个十进小数分成整数部分，即 53，和小数部分，即 0.17.

一个能够精确写成十进小数的数称为有尽小数，而那些不能精确写成十进小数的数称为无尽小数.

例如，$\frac{3}{2}=1.5$ 是有尽小数；而 $\frac{4}{3}=1.33333\cdots$ 是无尽小数.

$1.33333\cdots$ 可以写成 $1.\dot{3}$，读做"1.3，以 3 为循环数的循环小数". 按照精度的要求，无尽小数可以有如下两种表达方式：

（i）精确到几位有效数字，即几个具有实际意义的数字；

（ii）精确到几位小数，即小数点后几位数字.

如果答案中最后一个数字的下一个数字是 0，1,2,3 或 4，则答案的最后一位数字不变. 但若这下一个数字是 5，6，7，8 或 9，答案中最后一位数字增加 1. 因此，精确到三位有效数字，无尽小数 7.6183… 化成 7.62，这是因为右边下一位数字是 8，8 是属于 5，6，7，8 和 9 这一组中的. 同样，精确到 3 位小数位，7.6183… 化成 7.618，这是因为右边下一位数字是 3，它属于 0，1，2，3 和 4 这一组中的.

百　分　比

10. 百分比是以数字 100 为分母的分数，它用以提供一个共同的标准.

例如，百分之二十五，意指 $\frac{25}{100}$，即 $\frac{1}{4}$，写成 25%.

因此，378 英镑的 $12\frac{1}{2}\%$，意指 $\frac{12\frac{1}{2}}{100}\times 378$ 英镑 $=\frac{1}{8}\times 378$ 英镑 $=47.25$ 英镑.

134 毫米表示成 2.5 米的百分比是

$$\frac{134}{2500}\times 100\%=5.36\%$$

底数、指数和幂

11. 2000 的质因数连乘积是 $2\times2\times2\times2\times5\times5\times5$. 可以写成 $2^4\times5^3$, 其中 2 和 5 称为底数, 4 和 3 称为指数. 当指数是整数时,就称整个数为幂.

例如, 2^4 称"2 的 4 次幂",其底数为 2, 指数为 4. 同样, 5^3 称做"5 的 3 次幂",其底数为 5, 指数为 3. 当指数为 2 和 3 时, 可以用一个专门名称, 即分别称之为"平方"和"立方". 例如 7^2 称为"7 的平方", 9^3 称为"9 的立方". 没有写出指数时,表明其幂指数是 1, 即 2 就是 2^1.

倒　　数

12. 一个数的倒数就是它的指数为 -1 的那个数, 其值由 1 除以底数求得. 例如, 2 的倒数是 2^{-1}, 它的值是 $\frac{1}{2}$, 即 0.5. 同样, 5 的倒数是 5^{-1}, 其值为 $\frac{1}{5}$, 即 0.2.

平　方　根

13. 一个数的平方根就是它的指数为 $\frac{1}{2}$ 时的那个数, 2 的平方根写为 $2^{\frac{1}{2}}$ 或 $\sqrt{2}$. 平方根的值就是自乘能得到底数的那个数的值.

因为 $3\times3=9$, 所以 $\sqrt{9}=3$. 然而 $(-3)\times(-3)=9$, 于是 $\sqrt{9}=-3$. 因此,当求一个数的平方根时,总有两个答案, 这表明要在平方根的答案前面加上一个"+"号和一个"−"号. 例如, $\sqrt{9}=\pm3$, $4^{1/2}=\sqrt{4}=\pm2$, 等等.

指　数　律

14. 在简化指数的计算时, 可以运用一些基本法则或定

律，即指数律．这些定律如下：

（i）当两个或两个以上的同底数的数相乘时，其指数相加．例如

$$3^2\times3^4=3^{2+4}=3^6;$$

（ii）当一个数被一个同底的数相除时，其指数相减．例如

$$\frac{3^5}{3^2}=3^{5-2}=3^3;$$

（iii）当一个幂指数自乘更高次幂时，等于其指数相乘．例如

$$(3^5)^2=3^{5\times2}=3^{10};$$

（iv）当一个数的指数为零时，其值为 1．例如

$$3^0=1;$$

（v）一个数的负指数幂是该数的正指数幂的倒数．例如

$$3^{-4}=\frac{1}{3^4},$$

同样 $$\frac{1}{2^{-3}}=2^3;$$

（vi）一个数的指数为分数时，分数的分母是该数开方次数，而分子是乘方次数．例如

$$8^{2/3}=(\sqrt[3]{8})^2=(2)^2=4,$$

以及 $$25^{1/2}=(\sqrt{25})^1=\pm5.$$

标 准 型

15. 把一个数写成小数点左边只有一位数字，再乘以 10 的某次方，这个形式称为标准型．例如

5837 写成标准型，为 5.837×10^3，

以及 0.0415 写成标准型，为 4.15×10^{-2}．

把一个数写成标准型时，第一个因数称为尾数，第二个因

数称为指数。例如 5.8×10^3 这个数，5.8 为尾数，10^3 为指数.

误　差

16. (i) 在测量距离、时间、质量和其他一些量的各种问题中，要得到一个完全精确的值是不可能的，只能得到一个具有一定精确程度的值. 考虑到这一点，测量的误差总是存在的.

(ii) 考虑到测量误差，通常对答案要加以限制，以便使求得的结果，与给定的数据中精度最差的数相比，其有效数字不多于一位.

(iii) 舍入误差可以同十进小数一起写出来，例如，$\pi=3.142$ 的说法就不是十分精确的，但是"$\pi=3.142$ 精确到 4 位有效数字"却是正确的说法(实际上 $\pi=3.14159265\cdots$).

(iv) 由于一个不正确的过程，在计算中得出错误的答案是可能的. 这种误差被认为是差错.

(v) 完成一项计算以后，如果出现小数点的定位不正确，于是就会产生数量级的误差.

对　数

17. (i) 一个数的对数是以某个数为底的幂指数，其幂等于这个数.

例如，若 $y=a^x$，那末，$x=\log_a y$.

(ii) 以 10 为底的对数称为常用对数，x 的常用对数写为 $\lg x$.

(iii) 以 e 为底的对数称为双曲对数、讷皮尔(Naperiarb)对数或自然对数. x 的自然对数写为 $\log_e x$，或更一般地为 $\ln x$.

(iv) 对数的换底公式为

$$\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a},$$

因此 $$\ln y = \frac{\lg y}{\lg e} = \frac{\lg y}{0.4343} = 2.3026 \lg y.$$

(v) 对数运算法则

(a) $\log(A \times B) = \log A + \log B$,

(b) $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$,

(c) $\log A^n = n \log A$.

第二章　数　　系

十进制数和二进制数的相互换算

1. (i) 日常使用的数系是用数字 0 到 9 的十进制数系. 它有 10 个不同的数字(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 和 9), 就是说,它以 10 为基数或底.

(ii) 二进制数系以 2 为基数, 仅使用 0 和 1 两个数字.

2. (i) 十进制数 234.5 等于

$$2\times10^2+3\times10^1+4\times10^0+5\times10^{-1},$$

即由"一位数字"乘以"底的某次幂"组成的各项之和.

(ii) 在二进制数系中,底为 2, 因此 1101.1 等于

$$1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1},$$

所以与二进制数 1101.1 相当的十进制数为

$$8+4+0+1+\frac{1}{2},$$

也就是 13.5, 即 $1101.1_2=13.5_{10}$, 下标 2 和 10 分别表示二进制和十进制数系.

3. 一个十进制整数反复除以 2, 并记下每阶段的余数, 就能换算成一个对应的二进制数. 以 39_{10} 为例,如下面所示:

2	39	余数
2	19	1
2	9	1
2	4	1
2	2	0
2	1	0
	0	1

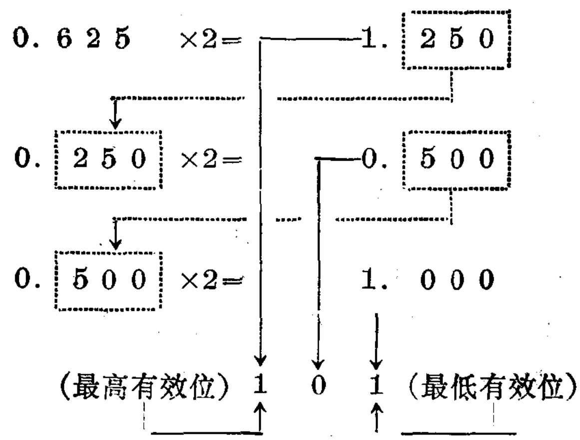
1 0 0 1 1 1

(最高有效位)　　　　(最低有效位)

将余数的最上面的数字写在最低有效位(一位是指二进制数位，最低有效位是指位于右边的数位)，余数的最下面的数字写在最高有效位，即左边的数位，就得其结果.

因此　　　　$39_{10}=100111_2$.

4. 一个十进制数的小数部分反复乘以 2，就可以换算成一个二进制数. 以小数 0.625 为例，如下所示：



对于小数，其结果的最高有效位是用 2 相乘的整数部分的最高位数字；其结果的最低有效位是用 2 相乘的整数部分的最低位数字. 因此

$$0.625_{10}=0.101_2.$$

5. 对于包含几位数字的十进制整数来说，反复除以 2 的过程可能相当长. 在这种情况下，简单一些的办法通常是用八进制数系把一个十进制数换算成二进制数. 八进制数系有一个基数 8，取用的数字为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 和 7. 与八进制数 4317_8 相当的十进制数为

$$4\times8^3+3\times8^2+1\times8^1+7\times8^0,$$

也就是　　$4\times512+3\times64+1\times8+7\times1$,

即　　　　2255_{10}.