泛复变函数及其在数学与物理中的应用

QI ZHAI SHU XUE YU WU LI ZHONG DE YING YONG

XONG XI JIN

熊锡金 著

东北师范大学出版社

泛复变函数及其在数学与物理中的应用

熊锡金 著

东北师范大学出版社

泛复变函数及其在
数学与物理中的应用
Fanfubian Hanshu ji qi zai
shuxue yu wuli zhong de yingyong
熊锡金　著

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街110号）　　长春市第六印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：6.6875　字数：155千
1988年4月第1版　　1988年4月第1次印刷
印数：00001—1 0000册

ISBN　7-5602-0070-2/O·15

统一书号：13334·30　定价：（精装）2.35元
（平装）1.30元

JY1/100/110

序

Michael Atiyah曾经说过："G. Mackey有次对我说的话，我认为是很正确的。在数学的某个领域中，重要的东西常常不是技术上最困难的即最难证的东西，而常常是较为初等的部分。因为这些部分与其他领域、分支的相互作用最广泛即影响面最大。"

古典解析函数在高维的推广（当然这里指的不仅仅是变量的多寡，而是自变数所在域的扩充）以及数系的发展一直是数理科学家以至整整十几代科技精英奋斗的目标。对这本书来说，似乎完成了最基础的一步。而它在技术上并未遇到十分的困难。也许这一简明的创新，可以符合 Atiyah 的判断。

数与量是横贯万事万物的概念，它的认识与发展一直是人类智慧的象征，它既是一切科学的基础，又是科学最高峰上的霞光。从泛系理论来看，具有较多运算与相对丰富性质的数学结构、广义系统或泛结构都可看成广义的数或量。由自然数族出发，逐步利用泛积（直积的商缩影）这一泛系工具就可引出整数、有理数、无理数、实数、非标准数、复数、泛复数、四元数、超复数、区间数、模糊数、布尔代数等数学结构以及其他通用的数学结构。但是每种广义数或量的具体研究与理论系统创建却是极其艰苦的工作。熊锡金同志的泛复变函数理论对泛复数进行了开拓性的研究，既别具特色而独创地发展了泛系理论赋范环微积的新方向，同时又

是各种超复变函数的推广，具有我们中国的风韵，就其内容和作用来看，它将成为数学中一种新的分支。

从熊锡金最早的论文开始，我一直以极其欣喜而羡慕的心情来看待有关工作。熊锡金同志做了我多年想做而又自愧力弱而难为的研究，许多结果比我想象的要简括而优美，发展下去，不但会有许多用途，还会成为一种新的流派。

熊锡金同志在这个新领域中已经奋战二十多年了。泛复变函数不仅在函数论上得到了许多有趣的定理与公式，而且已经和一些数学、物理中的重要问题结下了亲缘，诸如数学中的数域的广域扩张，代数方程根的新数量，偏微分方程中高阶与低阶的关系、函数论解法、不同型的统一边值问题、"通解"概念等，方程与各种域中等式扩展等概念，在物理中则涉及经典的、相对论的及一种新力学的统一，奇异电磁场的描述，空间流场的直接处理，基本粒子与时空结构等等。本书对上述极为重要的一些问题已做出了很有意义的结果，作出了一种开拓性的引导。它与多种领域与专题的关联，可能导致泛复变函数这一新方向的蓬勃发展。

这本专著篇幅虽小，但它内容的基础性与广泛性，它深入浅出的写法，可能为未来大学生的必修课程准备了一本好的教科书。书中入门性的工作，可以为现在大学生、研究生挑选研究课题时作参考。而其中的一些方法也可作为专业数理工作者解决有关问题的一种有力工具。

现代科学技术发展的主流是整体化趋势与辩证综合，是多专题的跨域结合与相互渗透。泛复变函数理论把古典分析、泛函分析、数系推广、数学物理与泛系方法具体结合起来，是一种可贵而引人入胜的探索、主动迎合了学科发展新的趋势，已经得到钱伟长、L.Bers 等教授和美国泛系研究

组的好评和关注。现在能集结出一专著，有利于这一新兴方向的发展。我深信，本书内容若能纳入教科书中，为一般数理科学工作者及工程技术人员所掌握，它的重要作用将随着时间的推移而会日益加速地显示出来。

吴学谋

1986年11月 8日

目　　录

第二章　泛复变函数

第三章　应　用

第一章　数的扩充

下一个重要的代数创造由哈密尔顿所创始。他揭开了全新的领域，打破了对于“数”所必须遵循的规则的古老信念。

——M·克莱因

从实数到具有良好性质的复数，人们陶醉于自己的胜利，但在欢呼之余，邦德列雅金拓扑域定理象在泼水节中洒出的一大盆水，既是祝福又使大家冷静下来。他说，不会再有比复数更大而和它性质完全相同的集合。的确是这样，但不必沮丧，平行的路也许是可以找到的。

§1　平面泛复数

泛复数的严格定义将在后面叙述，这里让我们先获得一些感性认识。

定义1　实数域可以添加三种不同的非实域中的元素——虚单位i，j，k，它们分别满足下面等式及构成三种复数，统称为平面泛复数或称为圆锥复数。

$$
\begin{array}{llll}
\text{椭圆数} & a=\alpha+\beta i & \text{满足}\ i^2+1=0 & \text{简记为}\ C \\
\text{抛物数} & a=\alpha+\beta k & \text{满足}\ k^2=0 & \text{简记为}\ P \\
\text{双曲数} & a=\alpha+\beta j & \text{满足}\ j^2-1=0 & \text{简记为}\ H
\end{array}
\quad (1)
$$

其中α、β为实数，称α为a的实部，记为$R_e a=\alpha$，称β为a的

虚部，记为$I_m a=\beta$. 两圆锥复数相等是指实部虚部分别相等。

读者也许会问，j不就是± 1吗？k不就是0吗？不是的。因为i、j、k都不是实域中的元素。即1和j以及1和k在实域上是线性无关的。也就是在实数中设有不全为零的元素α、β，使得$\alpha\cdot 1+\beta\cdot j=0$或$\alpha\cdot 1+\beta\cdot k=0$。而$\pm 1$和0则不然。

定义2 称i、k、j分别为椭园、抛物、双曲虚单位。用ω代替i、k、j中任一虚单位，与定义1吻合的平面复数运算是：

加减法：

$$(\alpha+\beta\omega)\pm(\gamma+\delta\omega)=(\alpha\pm\gamma)+(\beta\pm\delta)\omega$$

乘法：

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)&=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i\\(\alpha+\beta k)\cdot(\gamma+\delta k)&=\alpha\gamma+(\alpha\delta+\beta\gamma)k\\(\alpha+\beta j)\cdot(\gamma+\delta j)&=(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)j\end{aligned}\tag{2}$$

定义3 $a=\alpha+\beta\omega$的共轭元为$\bar{a}=\alpha-\beta\omega$。易知$a\bar{a}$为实数。对两个非零泛复数$a$和$b$，如果$a\cdot b=0$，则称$a$和$b$为共轭或相伴零因子。

显然，椭圆复数C中没有零因子。而双曲复数H中的共轭零因子是$\lambda(1+j)$及$\mu(1-j)$。抛物复数P中的共轭零因子是λk与μk。

定义4 除法

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}&=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i &&(\gamma、\delta\text{不全为0})\\\frac{\alpha+\beta k}{\gamma+\delta k}&=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}k &&(\gamma\neq 0)\\\frac{\alpha+\beta j}{\gamma+\delta j}&=\frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\gamma^2-\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2-\delta^2}j &&(\gamma\neq\pm\delta)\end{aligned}\tag{3}$$

易知，零和零因子不能作除数。

如果引进新的算符圆加⊕规定：

$$\oplus=\begin{cases}+ & (C)\\ +\ 0\ \times & (P)\\ - & (H)\end{cases}$$

乘除定义也可统一为：

$$(\alpha+\beta\omega)(\gamma+\delta\omega)=(\alpha\gamma-\oplus\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)\omega$$

$$\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}=\frac{\alpha\gamma\oplus\beta\delta}{\gamma^2\oplus\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\oplus\delta^2}\omega$$

它们虚单位满足的条件（1）也可统一成：

$$\omega^2\oplus 1=0$$

定义 5　如果$ab=1$，则称ab互为逆元。

显然，非零和非零因子a均有逆元：

$$a^{-1}=\frac{1}{a}=\frac{\bar{a}}{a\bar{a}}$$

这种元素称为正则元。

圆锥复数的开方运算可能会有一定的条件限制，对椭圆复数n次方程有n个根，其它复数就不一定了。从例2可看到双曲复数中，平方根有四个或没有，如果双曲复数平方根存在，则这四个方根在不同的区限。

例1　求圆锥复数$a=1+3\omega$的逆元

解　因　$\bar{a}=1-3\omega$

所以　$a^{-1}=\dfrac{\bar{a}}{a\bar{a}}=\dfrac{1-3\omega}{(1+3\omega)(1-3\omega)}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i & \omega\in C\\ 1-3k & \omega\in P\\ -\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}j & \omega\in H\end{cases}$$

例2　求双曲复数$\alpha+\beta j$的平方根。

解　设$\sqrt{\alpha+\beta j}=x+yj$，则$(x+yj)^2=\alpha+\beta j$

因此　　$x^2+y^2=\alpha,\ 2xy=\beta$　　（4）

当$\alpha\geqslant|\beta|$时，

$$x=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{\alpha+\beta}\pm\sqrt{\alpha-\beta})$$

$$y=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{\alpha+\beta}\mp\sqrt{\alpha-\beta})$$

符号顺序由x定。

当$\alpha<|\beta|$时，方程4无解。即双曲复数无平方根。

例3　在C、P、H中分别求下列方程的解。

$$z^4-4z^2=0$$

解　原方程变形为

$$z^2(z^2-4)=0$$

在C中　$z=0$，$z=\pm 2$

在P中　$z=0$，$z=\pm 2$，$z=\lambda k$

在H中　$z=0$，$z=\pm 2$，$z=\pm 2j$

例4　试用矩阵定义双曲复数H。

解　令　　$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　　$J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

由于　　$IJ=JI=J,\ I^2=I,\ J^2=I$.

因此它的运算规律全同于双曲数基1和j。而I、J在R上又线性无关，因此$A=\alpha I+\beta J$构成一种数，$\alpha\in R$，$\beta\in R$. 它全同于双曲数。

研究课题1　抛物数P与双曲数H中代数方程根的规律.

§ 2　圆锥复数的几何意义

三种圆锥复数可用平面直角坐标系中的点和向量来对应。这三种平面分别称为椭圆平面（C）、抛物平面（P）、双曲平面（H）。

定义 6　设$a=\alpha+\beta\omega$为平面泛复数，非负实数$|a|_M$叫做a的模：

$$|a|_M=\sqrt{|a\cdot\bar{a}|}=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & a\in C\\ |\alpha| & a\in P\\ \sqrt{|\alpha^2-\beta^2|} & a\in H\end{cases}$$

或简记为

$$|a|_M=\sqrt{|\alpha^2\oplus\beta^2|}$$

当$|a|_M=0$时，称a为零模数也叫做奇异元。显然a为零模数的充要条件是a为零或零因子。

全体零模数的集合记为Z_0，它的形状如图1。即在C平面上是原点（$x=y=0$）；P平面上是纵轴（$x=0$）；H平面是垂直的两直线（$x\pm y=0$）。

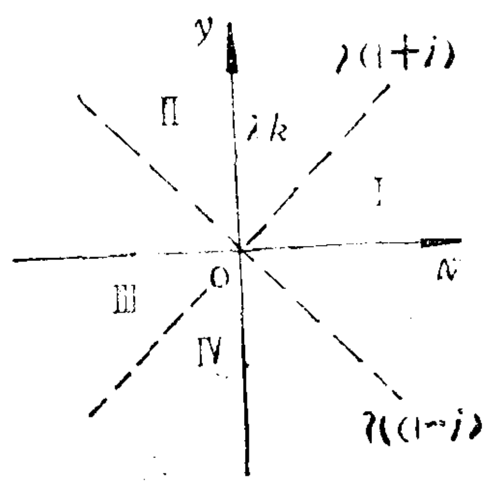

图　1

椭圆平面的零模点是孤立的，而抛物与双曲平面的零模点则是连续的。后者将抛物平面分成左、右两区限，将双曲平面分成四个区限。我们把P平面右区限，H平面的第I区限叫做主区限。

关于平面泛复数的模可以得到以下一些规律：

定理 1 ①$|ab|_M=|a|_M|b|_M$.

②如果平面泛复数a、b在同一区限，则

$$
\begin{aligned}
&|a+b|_M\leqslant|a|_M+|b|_M \quad a、b\in C\\
&|a+b|_M=|a|_M+|b|_M \quad a、b\in P \qquad (6)\\
&|a+b|_M\geqslant|a|_M+|b|_M \quad a、b\in H
\end{aligned}
$$

在三种平面上，a、b的拟距离定义为$d=|a-b|_M$。那么，按拟距离定义，仅有椭园平面是欧氏平面，而另两则不然。

也可定义平面复数的拟数积如下：

C $\qquad [a_1a_2]=|\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2|$

P $\qquad [a_1a_2]=|\alpha_1\alpha_2|$

H $\qquad [a_1a_2]=|\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2|$

在C、P、H平面建立直角坐标后，以原点为中心，通过主区限中圆锥复数$a=\alpha+\beta\omega$的对应点$A(\alpha,\beta)$分别在C平面上作圆，在P平面上作与y轴平行的直线，在H平面上作等轴双曲线，得图 2

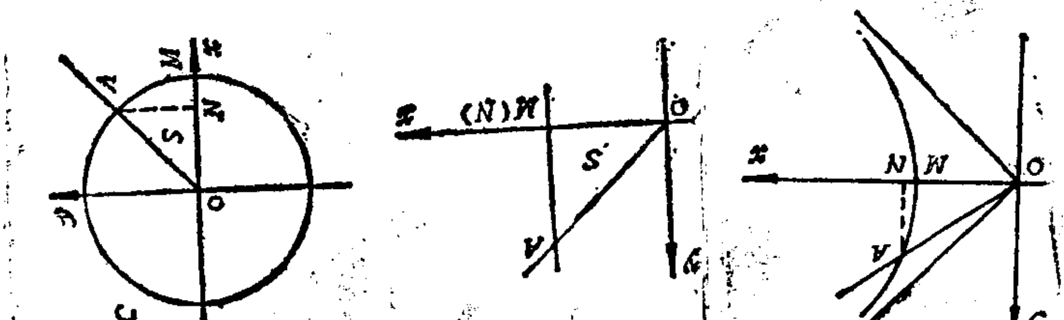

图 2

曲边三角形OAM在三种平面中都起作十分重要的作用。因为$ON=\alpha$，$AN=\beta$。所以OM在C、P、H中分别为$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，α，$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$，即可写成$OM=|a|_M=r$。

设曲边三角形OAM的面积为S，则称比值$\theta=\frac{2S}{r^2}$为a的幅角。幅角在椭圆平面C上就是角AOM的值，而在抛物及双曲平面上只能看成一个比值，是用（r，θ）来确定A的一个坐标，不能是欧氏角AOM的数值。后面将看出它是不同力学系统中与速度有关的量。它的数值下节中将叙述。

例1 设平面泛复数$z=x+y\omega$，试求在C、P、H平面上$|x+y\omega|_M<1$分别是什么区域。

解 $|x+y\omega|_M<1$在三种平面上为

C：$x^2+y^2<1$，　单位圆内。

P：$|x|<1$，　两直线$x=\pm1$间带形域。

H：$|x^2-y^2|<1$，四支双曲线$x^2-y^2=\pm1$间星形域。

例2 复式“圆”方程$az\bar{z}+bz+\overline{bz}+c=0$，$I_m a=I_m c=0$在三种平面上的图形是什么？

解 令$b=\beta+\gamma\omega$原方程变为

C：$a(x^2+y^2)+2(\beta x-\gamma y)+c=0$　圆

P：$ax^2+2\beta x+c=0$　两直线

H：$a(x^2-y^2)+2(\beta x+\gamma y)+c=0$　双曲线

研究课题2 P和H平面上的零因子没有幅角θ，由此能否产生不同性质的多个∞概念？其性质如何？

§3　圆锥复数的指数函数式

我们先用幂级数来定义指数函数：

$$e^{\theta\omega}=1+\theta\omega+\frac{(\theta\omega)^2}{2!}+\frac{(\theta\omega)^3}{3!}+\cdots+\frac{(\theta\omega)^n}{n!}+\cdots$$

$$=\begin{cases}\cos\theta+i\sin\theta & \omega=i\in C\\ 1+k\theta & \omega=k\in P\\ \mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta & \omega=j\in H\end{cases}$$

可知它也满足一般指数函数的运算规律，如 $e^p\cdot e^q=e^{p+q}$，$e^p/e^q=e^{p-q}$，$(e^p)^q=e^{pq}$等。

设圆锥复数 $a=\alpha+\beta\omega$ 在主区限中，则它可以写成指数形式，也称为**广义欧拉公式**：

$$a=\alpha+\beta\omega=re^{\theta\omega}=\begin{cases}r(\cos\theta+i\sin\theta) & \omega\in C\\ r(1+k\theta) & \omega\in P\\ r(\mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta) & \omega\in H\end{cases}\qquad(7)$$

对照实部和虚部有

$$\alpha=\begin{cases}r\cos\theta\\ r\\ r\mathrm{ch}\theta\end{cases}\qquad \beta=\begin{cases}r\sin\theta & (C)\\ r\theta & (P)\\ r\mathrm{sh}\theta & (H)\end{cases}$$

将α、β平方圆加后可得：

$$r=\sqrt{|\alpha^2\oplus\beta^2|}=|a|_M$$

将α、β相比后可得：

$$\theta=\begin{cases}\mathrm{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha} & (C)\\ \dfrac{\beta}{\alpha} & (P)\\ \mathrm{arth}\dfrac{\beta}{\alpha} & (H)\end{cases}$$

其它区限也有类似结果，但符号有区别。

指数式便于平面复数进行乘、除、乘方，开方的运算。即对于$a=re^{\theta\omega}$，$b=r'e^{\theta'\omega}$有

$$ab=rr'e^{(\theta'+\theta)\omega}$$