火炮自动武器优化设计

HUOPAO ZIDONG WUQI YOUHUA SHEJI

□ 毛保全 邵毅 编著 □

国防工业出版社
National Defense Industry Press

火炮自动武器优化设计

毛保全　邵　毅　编著

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

本书以优化设计思想为基础，以火炮自动武器设计为主线，系统介绍优化的一般方法，尤其是有关火炮动态特性和总体结构参数优化的动力学优化设计方法，并着重介绍了优化技术在火炮自动武器设计中的具体应用及相关成果。全书共5章，包括优化设计的基本理论、火炮动力学优化理论、火炮自动武器总体结构优化设计、火炮自动武器零部件优化设计、火炮弹道优化设计。

本书以从事火炮自动武器研究、论证、设计、生产、试验的科研人员和火炮自动武器专业的研究生、本科生为主要读者对象，也可供力学研究和机械设计领域的专业技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

火炮自动武器优化设计/毛保全，邵毅编著．—北京：
国防工业出版社，2007.11
ISBN 978-7-118-05354-8

Ⅰ．火… Ⅱ．①毛… ②邵… Ⅲ．火炮－最优设计
Ⅳ．TJ302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 137028 号

※

国防工業出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码 100044)
天利华印刷装订有限公司印刷
新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16 印张 10 字数 225 千字
2007年11月第1版第1次印刷 印数 1—3000 册 定价 26.00 元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474
发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前　言

早在20世纪六七十年代，国外军事技术发达国家即在武器系统的研发中引入了优化设计的思想和方法，如运用优化方法进行直升机、飞机有关结构和火炮炮身、反后座装置、平衡机设计等。大量实践表明，武器的设计质量和水平与所采用的设计方法密切相关。随着武器性能的不断提升和技术复杂程度的不断增加，在武器系统研发中，对新的设计方法的需求和依赖程度进一步增大。

在火炮自动武器设计中，如何在既定约束条件下，运用科学的方法和手段，合理地确定相关的性能和结构参量，最大限度、最为有效地实现规定的作战使用性能和战术技术指标要求，一直是设计人员面临和努力解决的重大课题和难题。本书根据作者多年从事火炮自动武器与弹药工程教学、科研的理论探索和工作实践，以近20年来发表的20余篇学术论文和博士论文为基础，并充分借鉴和融入了他人的最新研究成果，对火炮自动武器的优化设计理论、方法等进行了系统归纳和全面介绍。

对照国内外出版的大多数有关优化设计的书籍，本书在详尽介绍目前通用的优化方法和火炮自动武器设计的相关知识的基础上，将优化方法与火炮自动武器设计紧密结合，注重和突出了优化设计技术在火炮自动武器领域的实际应用。

我国在工程设计中越来越广泛地运用了优化设计理论和方法，其中不乏成功应用的范例，但优化技术在火炮自动武器设计中的应用，迄今依然处于探索起步阶段。目前，国内外有关火炮自动武器优化设计的研究专著很少见到，作者期望通过本书的出版，能对我国火炮自动武器优化设计工作的全面普及和深入开展，起到积极的推动作用。

本书以优化设计思想为基础，以火炮自动武器设计为主线，系统介绍优化的一般方法，尤其是有关火炮动态特性和总体结构参数优化的动力学优化设计方法，并着重介绍了优化技术在火炮自动武器设计中的具体应用及相关成果。全书共5章，包括优化设计的基本理论、火炮动力学优化理论、火炮自动武器总体结构优化设计、火炮自动武器零部件优化设计、火炮弹道优化设计。

本书以从事火炮自动武器研究、论证、设计、生产、试验的科研人员和火炮自动武器专业的研究生、本科生为主要读者对象，也可供力学研究和机械设计领域的专业技术人员参考使用。

本书的撰写得到了装甲兵工程学院各级领导的大力支持和国防工业出版社的热情帮助。在本书涉及的相关内容中，朵英贤院士、陈运生教授、杨国来博士、敖勇博士、何

永博士、马吉胜博士、王建中教授等，曾提供了有益的指导和帮助。全书的文稿处理和插图绘制工作由纪兵、费丽博、吴东亚、范栋、陈占峰等同志完成，尤其是纪兵为本书的完稿做了大量工作。在此，谨对上述同志的大力支持和辛勤付出，一并表示衷心的感谢。

由于水平和经验所限，书中难免有不少缺点和错误，恳请读者予以批评指正。

编　者

2007 年 5 月

目 录

第1章　优化设计的基本理论

1.1　优化设计的基本概念

1.1.1　概述

人们在进行各种设计工作时，总是希望和寻求在给定或允许的条件下，从各种可能的方案中选择出最优的方案，达到最佳的设计目标和效果，这就是优化设计的基本思想。优化设计是建立在最优化数学理论和现代计算方法、手段基础上的一种现代设计方法，其目的在于借助计算机技术和手段，寻求和确定最优的设计方案。

尽管优化技术在工程设计中广泛应用并收到了许多很好的应用效果，但将优化技术系统有效地应用于武器系统尤其是火炮自动武器的设计中，在我国仍是一个有待探索和实践的新课题。

武器系统的优化设计问题一般包括两个方面：一是技术方案的优化；二是主要技术参数的优化。常用的优化方法可以概括为综合优化、数字优化和实验优化三种，在研制工作中需要结合具体问题合理选择应用。

技术方案优化设计一般不宜运用数学方法，设计中通常需要注意以下几个方面。

(1)制定和遵循明确的设计指导思想和原则。从武器系统综合性能的先进性和技术实现的可行性、经济性、时效性等综合考虑权衡，确定方案设计的指导思想和原则，如必须实现的主要功能、性能要求及其立足的主要技术途径和关键技术，为降低研制风险和费用需充分借鉴和继承相关的成熟技术，为便于今后进一步改进升级采用系列化、通用化、模块化设计等。方案设计必须充分考虑和遵循所确定的设计原则。

(2)研制过程的系统管理和动态优化调整。运用系统工程思想方法对研制工作全过程实施管理和动态控制，按照研制程序，在主要节点组织专家对设计方案进行把关评审，对重大技术问题及其解决措施进行分析确认，帮助和促进设计者不断修订和完善设计方案。

(3)重视和利用各种技术信息。在设计过程中，设计者要充分了解和获取相关武器系统的技术信息和本系统前期研制、试验的情况，特别是暴露的设计缺陷信息，在深入分析的基础上，有针对性地修改和完善设计。

(4)加强理论计算、仿真分析和试验验证。针对设计中遇到的技术问题，首先要尽可能地进行定量分析计算、计算机仿真等，对一些重大或复杂问题，必要时可开展先期的实物、半实物试验验证，以保证设计的可行性和合理性，降低技术实施的风险性。

与单纯的类比设计、经验设计不同，上述设计思路，事实上已经将武器系统研制的设计思想、过程控制等纳入到了现代设计理念和方法学中。

主要技术参数的优化，由于战术技术指标要求的多元性，导致了设计参数过多且难以

与指标对应的目标要求之间建立起确定的数学模型，因而在参数优化时，一般采用综合优化方法。

目前，武器系统某些重要部件或涉及总体性能的部分参数设计已在可能条件下应用了数学优化方法，如目前广泛应用的非线性有约束离散优化方法。

在新产品或新组成研制中，因机理不完全清楚，或设计经验不足，各参数对设计指标影响的程度难以确定，只能用试验优化方法。通过制造样机或模拟装置，根据多次试验结果，经过不断修改，最终确定方案，或者按试验数据构造一个函数，通过求该函数的极值，确定方案。

优化问题的数学描述称为最优设计的数学模型，建立数学模型是解决最优化设计的首要问题。

由于最优化问题在计算上的复杂性，通常都必须借助于电子计算机进行求解，因此最优化设计必须是电子计算机辅助设计。优化设计的一般过程及其相互关系可用图 1－1 所示的框图表示出来。

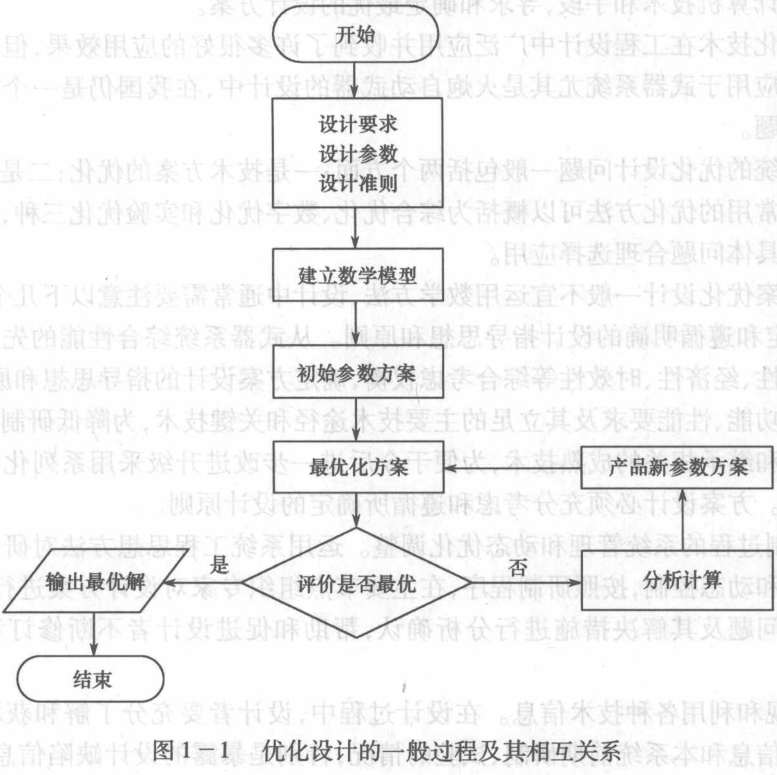

图 1－1　优化设计的一般过程及其相互关系

1.1.2　设计变量

如上节所述，一个优化问题首先要把它所研究优化的问题用数学形式表达出来，也就是要建立一个数学模型。最优化问题的数学模型的完善描述，必须考虑设计变量、设计约束和目标函数等诸方面。下面逐项讨论这些基本问题。

优化设计的一个方案常用一组参数来表示。在各类不同的设计问题中，这些参数也是各不相同的。但概括起来不外是两种类型：一类是几何参数，例如零件的直径、长度尺

寸、齿轮的模数、变位系数、连杆机构的运动简图尺寸等；另一类是物理参数，例如力、功率、质量等。在这些参数中，有些是可以根据设计具体情况或条件预先给定的，这些参数叫设计常量；另一些参数可以与其他参数之间有一定的依赖关系，它们属于非独立变量，优化问题中所指的设计变量则是指那些在设计中可供选择的独立变量。

1.1.2.1 优化问题的维数

最优化问题中设计变量的数目称为该问题的维数。设计变量越多，即问题的维数越高，则设计的自由度也越大，容易得到比较理想的设计结果。但随着设计变量的增多也必然使问题复杂化，给优化设计带来更大的困难，因此，在一般情况下，设计者还是应尽量减少设计变量的数目为好。对于那些按照过去设计经验或工艺生产要求能给予规定的值先确定为设计常量，而选定对设计目标影响比较大的少量参数为设计变量。

根据设计变量的多少，可将最优化设计的题目分成三种类型。设计变量有 2 个 ~10 个的为小型题目；设计变量有 10 个 ~50 个的为中型题目；而设计变量在 50 个以上者为大型题目。

1.1.2.2 设计点与设计空间

设计变量是一组数，构成一个数组，这个数组在优化设计中被看成一个矢量。设有 n 个设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，可以把它们作为某一矢量 $\boldsymbol{X}$ 在 n 个坐标轴的分量。若用矩阵来表示这个矢量，则有

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

即一组设计变量对应着一个以坐标原点为始点的矢量，矢量端点的坐标值就是这一组设计变量。一组设计变量表示一个参数方案，它与一个矢量端点相对应，这个矢量端点称为设计点。设计点的集合称为设计空间。由于工程设计中的设计变量都是实数，所以称这种设计空间为欧几里得空间。若用符号 R^n 表示 n 维的实欧几里得空间，则用集合概念可写出

$$X \in R^n$$

对于二维最优化问题，R^2 这个空间是一个平面，所有的设计方案都可以用平面中的设计点表示。对于三维问题，则 R^3 就是一个通常所说的三维空间了，空间的每一个点有确定的坐标值 x_1, x_2, x_3，对应着一个设计方案。当 $n > 3$ 时，只能把 R^n 想象成一个抽象的超越空间。超越空间的每一个设计点是与 n 个设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 一一对应的。

一般来说，设计变量大多是一些连续变化的量。但在火炮自动武器这些特殊的机械设计中，有些变量也可能是跳跃式的量。例如齿轮的齿数必须为整数，模数必须符合国家标准所规定的值，轴承的尺寸必须符合产品样本中所规定的值等。凡属这类跳跃式的量称为离散量。对于离散设计变量，在优化设计过程中常常把它们视作连续量，在求得连续量的优化结果后再进行圆整或标准化，以求得一个实用的最优方案。

1.1.2.3　关于设计变量的选择

设计变量是能影响设计质量或结果的可变参数。但如果将所有能影响设计质量的参数都列为设计变量,将使问题复杂化,而且也没有必要。因此,应对影响设计指标的所有参数进行分析、比较,从中选择对设计质量确有显著影响且能直接控制的独立参数,作为设计变量,其他参数则作常量处理。例如,关于材料的力学性能,因可供选择的材料有限,而且其力学性能常常要用试验方法才能确定,无法直接控制,所以按常量予以赋值更为合理;又如,对于应力、应变、压力、挠度、功率、温度等一些具有一定函数关系式的因变量,当它们在数学上易于消去时,一般不定为设计变量;不能消去时,则也可作为设计变量,列出相应的状态方程(等式约束函数),并把设计变量分为决策变量和状态变量。在一个最优化设计问题中,设计变量太多,将使问题变得十分复杂;而设计变量太少,则设计的自由度少,不能求得最优化的结果。因此,应根据具体设计问题综合考虑这两个方面,合理地选取设计变量。

1.1.3　约束条件

1.1.3.1　概述

在优化设计问题中,设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 一般总要受到某些条件的限制,这些限制条件就称为设计约束。设计约束一般分成两大类:边界约束和性能约束。所谓边界约束是指考虑到设计变量的许可变化范围而给予的一种界限条件。例如,在机构设计中,杆件的长度必须满足 $0 < l < l_{\max}$;某铰链支点的位置需限定在 $X_{A_1} \leqslant X_A \leqslant X_{A_2}, Y_{A_1} \leqslant Y_A \leqslant Y_{A_2}$ 范围内等。所谓性能约束是指由机械工作性能所提出的一些限制条件。例如,设计一曲柄摇杆机构需要各杆的长度关系满足曲柄存在的条件;齿轮设计中需要所选的参数满足接触强度和弯曲强度条件等。

设计约束在数学模型中用约束函数不等式或等式来表示,即

$$g_u(X) \leqslant 0, u = 1,2,\cdots,p \tag{1-2}$$

或

$$g_u(X) \geqslant 0$$

和

$$h_v(X) = 0, v = 1,2,\cdots,q$$

式中:$g_u(X)$、$h_v(X)$ 是按设计限制条件建立起的函数关系式,称为约束函数;$g_u(X) \leqslant 0$ 和 $g_u(X) \geqslant 0$ 形式的设计约束统称为不等式约束条件,简称不等约束;$h_v(X) = 0$ 形式的约束则称为等式约束条件,简称等约束。

例如在齿轮设计中,按强度条件,齿轮的应力 σ 应小于或等于许用应力 $[\sigma]$,即 $\sigma \leqslant [\sigma]$,则可以建立起一个不等式约束条件 $[\sigma] - \sigma \geqslant 0$。如果又要求所设计的一对齿轮在齿根处有相同的滑动系数使磨损均匀,则有

$$\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)\frac{\tan\alpha - \tan\alpha_{A_1}}{\tan\alpha_{A_1}} = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)\frac{\tan\alpha - \tan\alpha_{A_2}}{\tan\alpha_{A_2}} \tag{1-3}$$

写成等式约束条件,即

$$\left(1+\frac{Z_1}{Z_2}\right)\frac{\tan\alpha-\tan\alpha_{A_1}}{\tan\alpha_{A_1}}-\left(1+\frac{Z_2}{Z_1}\right)\frac{\tan\alpha-\tan\alpha_{A_2}}{\tan\alpha_{A_2}}=0 \tag{1-4}$$

应该指出，三种形式的约束条件实际上都可以处理成 $g_u(X) \leqslant 0$ 的单一形式，因为 $g_u(X) \geqslant 0$ 可以看成是 $-g_u(X) \leqslant 0$，而 $h_v(X)=0$ 可以用两个不等式约束条件 $h_v(X) \leqslant 0$ 和 $-h_v(X)>0$ 来代替。因此，在后面的叙述中，一般均将设计约束表达成 $g_u(X) \leqslant 0$ 的形式。

由于引入了设计约束，设计点 X 在 n 维设计空间 R^n 内就被分成两部分：一部分是满足设计约束条件的设计点，称之为可行设计点，可行设计点的集合 D 称为可行设计区域，或称可行域；另一部分是不满足设计约束条件的设计点，称之为非可行设计点，这种设计点的集合为非可行域。

当设计点处于某一不等约束条件的边缘上时，该设计点称为边界设计点。这是一个为该项约束所允许的极限设计方案。带有约束条件的最优化问题称为约束最优化问题。显然，没有约束条件的则称为无约束最优化问题。约束最优化问题较之无约束最优化问题难度要更大些。在火炮自动武器设计中，大多数问题都属于约束最优化问题。

1.1.3.2 关于约束条件的确定

设计约束是对设计变量取值范围的限制条件。当一个约束条件不仅与设计变量而且还与另外一种参数有关时，则称它为参数约束。例如，在桥式起重机桥架的优化设计中，由于载荷沿桥架移动，故桥架的工作应力是载荷位置 l 的函数，这时其不等式约束条件为

$$g(X)=\sigma(l)-[\sigma] \leqslant 0 \tag{1-5}$$

与参数 l 有关，称为参数约束。

又例如，在研究火炮动力学的最优化问题中，由于动态响应是时间的函数，故按动态响应所建立的约束条件是以时间为参数的参数约束，必须保证在参数变化范围内参数约束条件均成立。

有时根据需要，可以补充约束条件，引入附加约束。例如在片式摩擦离合器的优化设计中，若把摩擦片厚度定为设计变量，则它会只在温度约束条件中出现，而不包含于目标函数中。这时应根据摩擦片厚度的允许取值范围补充约束条件，以免摩擦片过厚。若想得到最理想的厚度，尚需在求得原目标函数最优值后，进行以优选摩擦片厚度为目的的再次寻优，这时原目标函数应以其最优值建立一个约束条件。采用这种办法时要求计算程序有相应的措施，例如使目标函数和约束函数容易隔离和置换。

总之，要根据对设计问题的周密分析合理地确定约束条件。要从设计要求出发，对那些必要的而且能用设计变量表示为约束函数的限制，都可以确定为约束条件。不必要的限制，不仅是多余的，而且使设计可行域缩小，限制了设计的自由度而影响最优化结果。

1.1.4 目标函数

1.1.4.1 目标函数及其类型

最优化设计是要在多种因素下寻求使人最满意、最适宜的一组参数。这里所指的“最满意”和“最适宜”当然都是针对某具体问题体现出来的人们所追求的某一特定目标而

言的。根据特定问题所追求的目标，用设计变量的数学函数关系式来表达它，就是优化设计的目标函数，有的书籍中也称为评价函数。对于有 n 个设计变量的最优化问题，目标函数写为

$$F(X) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1-6}$$

目标函数的值是评价设计方案优劣程度的标准。在一般情况下，追求目标函数的最小值，即目标函数值越小，设计方案越优。当然，对于某些设计问题也可以追求目标函数的最大值(如追求效率最高)。但对于追求 $F(X)$ 极大值的问题也可以转化成为追求 $-F(X)$ 极小值的问题，故下面叙述的最优化问题，都把优化过程看成是追求目标函数极小值的过程。

目标函数有单目标函数和多目标函数之分。仅根据一项设计准则建立起来的目标函数称为单目标函数。

若某项设计，要求同时兼顾若干个设计准则，这就是多目标函数。例如设计一多挡汽车变速器的设计准则如下。

(1) 要求箱体体积最小，即各齿轮中心距之和为最小。

(2) 要求质量最小，即齿轮、轴等体积之和最小。

(3) 要求设计的变速器噪声最小等。

工程实际问题中存在的大多数问题属于多目标优化问题。由于这类问题要同时考虑多个指标，往往比较复杂，所以多目标函数的最优化问题比单目标函数复杂得多。

1.1.4.2　关于目标函数的建立

目标函数是以设计变量表示设计所要追求的某种性能指标的解析表达式。通常，设计所要追求的性能指标较多，显然应以其中最重要的指标作为设计追求的目标，建立目标函数。例如，对于一般机械的设计，可以按质量最小或体积最小的要求建立目标函数；对于精密仪器，则应按其精度最高或误差最小的要求建立目标函数。对于机构设计，当对所设计机构的运动规律有明确要求时，则可针对机构的运动学参数建立目标函数；当对机构的动态特性提出专门要求时，则应针对机构的动力学参数建立目标函数；而对于要求再现轨迹的机构设计，则应根据机构的轨迹误差最小的要求建立目标函数。

当设计所要追求的目标不止一个时，可以取其中最主要的作为目标函数，其余的列为设计约束；也可以有多个目标函数，采用多目标函数的最优化方法求解。原则上应尽量控制目标函数的数目，使同时追求的目标少一些。

1.1.4.3　多目标函数的处理方法

多目标函数最优化问题的求解方法，目前尚缺乏系统的研究，下面介绍两种比较常见的方法。

1) 主要目标法

假设根据设计准则建立了 m 个目标函数，$f_1(X)$，$f_2(X)$，$\cdots$，$f_m(X)$，可以按照这些准则的重要程度，选择其中最为重要的一个目标作为主要目标，而将其余的目标作为次要目标，只限它们在一定的许可范围内取值。这样就可以把多目标函数转化为一个单目标函

数，而将非主要目标函数处理成约束条件。

例如，若$f_1(X)$为主要目标函数，则取$f_1(X)$为优化问题的目标函数，规定其余目标函数$f_i(X)(i=2,\cdots,m)$的上界值f'_i和下界值f''_i，也即把它处理成约束条件：

$$\begin{cases} f''_i - f_i(X) \leqslant 0 \\ f_i(X) - f'_i(X) \leqslant 0 \end{cases} \quad (i=2,3,\cdots,m) \tag{1-7}$$

这样，就变成了主要目标函数的极小化问题，即

$$\min f_1(X) \quad X \in R' \tag{1-8}$$

2）线性加权法

这种方法是对多目标函数$f_i(X)(i=1,2,\cdots,m)$建立广义的目标函数，即

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} W_i f_i(X) \tag{1-9}$$

式中：W_i为加权系数。

加权系数的作用有两个方面：一方面是每项目标函数的值可能在量级上有差异，通过适当加权系数取值大小来调整这些差异，使各项函数在量级上大致等量齐观，以获得较好的优化效果；另一方面是各项目标函数所体现的设计准则在重要程度上不一定相同，通过适当选取加权系数可以起到突出主要目标的作用。加权系数的选取是一个比较复杂的问题，至今尚没有确定加权系数较为理想的方法。通常只是根据设计者的经验或初步的试算来适当地选取。

除了上述两种方法之外，对于多目标函数的处理还有功效系数法、理想点法、乘除法、协调曲线法等。有人认为其中功效系数法优点较多，这里不再详叙，可参考有关文献。

1.1.5 优化设计的数学模型

综上所述，最优化问题数学模型一般表示如下。

对于无约束最优化问题：

$$\begin{cases} \min F(X) \\ X \in R^n \end{cases} \tag{1-10}$$

对于约束最优化问题：

$$\begin{cases} \min F(X) \quad X \in D \subset R^n \\ D: q_u(X) \leqslant 0, u=1,2,\cdots,p \\ h_v(X) = 0, v=1,2,\cdots,q \end{cases} \tag{1-11}$$

式中：D表示由p个不等约束条件和q个等约束条件所规定的可行域。

通过最优化方法求得的一组最优设计变量

$$\boldsymbol{X}^* = [x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*]$$

表示了一个最优化的设计方案，称为最优设计点。对应于该设计方案的目标函数

$$F^* = F(X^*) = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$$

称为最优化值。最优设计点和最优化值两者构成了一个优化问题的最优解。

在数学模型中，若目标函数 $F(X)$ 和约束函数 $g_u(X)$、$h_v(X)$ 都是设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性函数，这样的优化问题常称为线性规划问题，否则称为非线性规划问题。

1.1.6 数学模型的几何描述

为了进一步说明最优化问题的一些基本概念，下面再对它作必要的几何描述，以便比较直观、形象地理解它。先以一个二维优化问题为例。

设有一个约束最优化问题，数学模型如下：

$$\begin{cases} \min(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4) \\ X \in D \subset R^2 \\ D: g_1(X) = -x_1 + x_2 - 2 \leqslant 0 \\ g_2(X) = x_1^2 - x_2 + 1 \leqslant 0 \\ g_3(X) = -x_1 \leqslant 0 \\ g_4(X) = -x_2 \leqslant 0 \end{cases} \tag{1-12}$$

对于这样一个优化问题，可用图 1-2 的几何图形来说明几个基本概念。

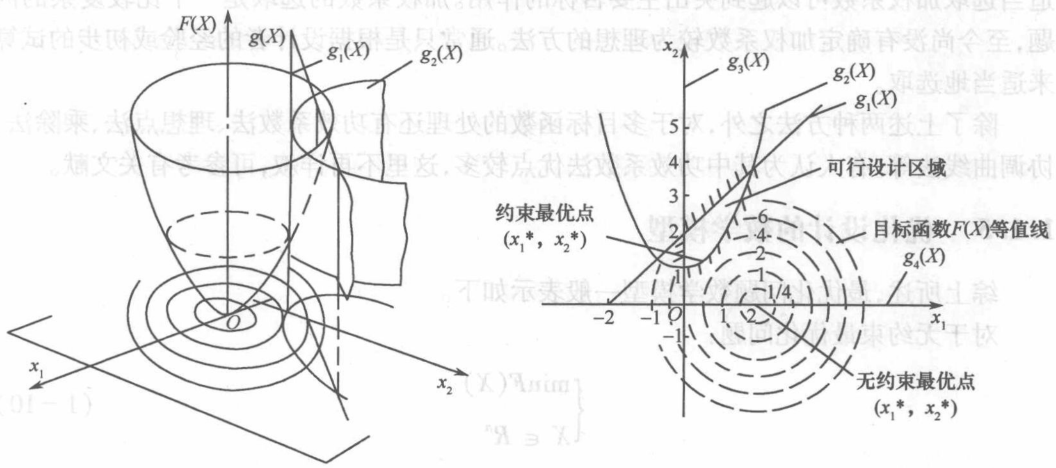

图 1-2 几何图形

1.1.6.1 目标函数等值线

当令目标函数 $F(X)$ 的值等于一系列常数 $C_1, C_2, \cdots$ 时，则对于二维问题便在 x_1Ox_2 坐标平面上得到相应的一系列平面曲线，这一系列平面曲线就是等值线的曲线族。在所举的例子中，由于

$$F(X) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4 = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \tag{1-13}$$

令

$$F(X) = C_i \quad (i = 1,2,\cdots)$$

则等值线曲线族方程为

$$(x_1-2)^2+x_2^2=C_i \tag{1-14}$$

因此曲线族是在 x_1Ox_2 平面上以点(2,0)为中心、以 $\sqrt{C_i}$ 为半径的一族同心圆，如图1-2所示。

目标函数等值线的分布规律表示了目标函数的变化情况。

对于一般形式的二维目标函数，由极值理论可以证明在目标函数极值点附近，等值线近似于共心的椭圆族，极值点就是这族椭圆的中心。

1.1.6.2 可行域与非可行域

如前所述，不等式约束条件使设计变量的选择受到限制，满足 $g_u(X)\leqslant 0$ 的一切设计点 X 的集合构成了可行域，其余的设计点集合则构成了非可行域。由图1-2可以清楚地看到，由 $g_1(X)$、$g_2(X)$ 和 $g_3(X)$ 围成了一个封闭的区域，这就是设计点的可行域，至于 $g_4(X)$，在这个例子中实际上并没有起到约束作用，但在数学模型中仍要无遗漏地列出全部约束方程。

如果在约束中还包含有等约束条件 $h_v(X)=0$，则又给设计变量带来了特殊的限制。在二维问题中，等约束条件在平面 x_1Ox_2 上组成一条特定的曲线，设计点被限定在此曲线上，所以当存在等约束条件时，会使设计变量的选择范围大大缩减。

1.1.6.3 最优化解

对于无约束最优化问题，无约束最优化解是点 $\boldsymbol{x}_1^*=[2,0]^{\mathrm{T}}$ 和函数值 $F(x_1^*)=0$，而对于约束最优化解则是目标函数等值线与约束函数曲线及目标函数等值线的切点和切点的目标函数值构成的最优化解。例如，在所举的例子中，无约束最优解是点 $\boldsymbol{x}_1^*=[2,0]^{\mathrm{T}}$ 和函数值 $F(x_1^*)=0$，而对于约束最优化解则是目标函数等值线与约束函数曲线 $g_2(X)$ 的切点 $\boldsymbol{x}_2^*=[0.58,1.34]^{\mathrm{T}}$ 和该点的目标函数值 $F(x_2^*)=3.80$。

对于某些目标函数可能存在多个极值点，这样的目标函数称为多形态的。例如：

$$F(X)=4+\frac{9}{2}x_1-4x_2+x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+x_1^4-2x_1^2x_2 \tag{1-15}$$

它的等值线如图1-3所示，有两个极值点。

$$\boldsymbol{x}_1^*=[-1.053,1.028]^{\mathrm{T}}$$

$$F(x_1^*)=-0.5134$$

$$\boldsymbol{x}_2^*=[1.941,3.854]^{\mathrm{T}}$$

$$F(x_2^*)=0.9855$$

在点 $A(0.61173,1.4929)$ 处，是一个驻点，此点虽有 $\partial F/\partial x_1=0$ 和 $\partial F/\partial x_2=0$，但因二阶导数矩阵 $\boldsymbol{H}$ 并非正定，故不是极值点。在多形态目标函数的若干个极值点中，择其函数值最小的点称为全局最优点，相应的函数值称为全局的最优值，它们构成了一个全局最优解。其余的极值点和相应的极值称为局部最优点和局部最优值，所构成的解称为局部最优解。