



国家出版基金项目  
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 53

# 量子场论 (上)

郑汉青 编著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目  
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 53

# 量子场论 (上)

郑汉青 编著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

量子场论. 上 / 郑汉青编著. —北京: 北京大学出版社, 2018. 8  
(中外物理学精品书系)  
ISBN 978-7-301-29695-0

I. ①量… II. ①郑… III. ①量子场论 IV. ①O413.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第154991号

- 书 名 量子场论(上)  
LIANGZI CHANGLUN
- 著作责任者 郑汉青 编著
- 责任编辑 刘啸
- 标准书号 ISBN 978-7-301-29695-0
- 出版发行 北京大学出版社
- 地 址 北京市海淀区成府路205号 100871
- 网 址 <http://www.pup.cn>
- 电子信箱 zpup@pup.cn
- 新浪微博 @北京大学出版社
- 电 话 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62754271
- 印刷者 北京中科印刷有限公司
- 经 销 者 新华书店
- 730毫米 × 980毫米 16开本 18印张 343千字  
2018年8月第1版 2018年8月第1次印刷
- 定 价 55.00元

---

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子信箱: [fd@puppkuedu.cn](mailto:fd@puppkuedu.cn)

图书如有印装质量问题, 请与出版部联系, 电话: 010-62756370

# “中外物理学精品书系”

(二期)

## 编 委 会

主 任：王恩哥

副主任：夏建白

编 委：(按姓氏笔画排序，标\*号者为执行编委)

丁 洪	王力军	王孝群	王 牧	王雪华
王鼎盛	石 兢	田光善	冯世平	邢定钰
朱邦芬	朱 星	向 涛	刘 川*	汤 超
许宁生	许京军	李茂枝	李建新	李新征*
李儒新	吴 飙	汪卫华	张立新	张振宇
张 酣*	张富春	陈志坚*	武向平	林海青
欧阳钟灿	罗民兴	周月梅*	郑春开	赵光达
钟建新	聂玉昕	徐仁新*	徐红星	郭 卫
资 剑	龚新高	龚旗煌	崔 田	阎守胜
谢心澄	解士杰	解思深	樊铁栓*	潘建伟

秘 书：陈小红

## 序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础,同时还与许多新兴学科和交叉学科的前沿紧密相关。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天,物理学不再囿于基础科学和技术应用研究的范畴,而是在国家发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到,改革开放四十年来,随着中国政治、经济、科技、教育等各项事业的蓬勃发展,我国物理学取得了跨越式的进步,成长出一批具有国际影响力的学者,做出了很多为世界所瞩目的研究成果。今日的中国物理,正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下,近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势,在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。然而从另一方面看,尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书,但系统总结物理学各门类知识和发展,深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源,并针对不同层次的读者提供有价值的学习和研究参考,仍是我国科学传播与出版领域面临的一个富有挑战性的课题。

为积极推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展,特别是集中展现近年来中国物理学家的研究水平和成果,北京大学出版社在国家出版基金的支持下于2009年推出了“中外物理学精品书系”,并于2018年启动了书系的二期项目,试图对以上难题进行大胆的探索。书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名学者。他们都是目前各领域十分活跃的知名专家,从而确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富、涵盖面广、可读性强,其中既有对我国物理学发展的梳理和总结,也有对国际物理学前沿的全面展示。可以说,“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理科学发展的全貌,是一套目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”的另一个突出特点是,在把西方物理的精华要义“请进来”的同时,也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学在世界范围内的重要性不言而喻。引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态,可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。与此同时,我国的物理学研究数十年来取得了长足发展,一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次成规模地将中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域,使世界对中国物理学的过去和现状有更多、更深入的了解,不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”,也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新发展的“软实力”,对全面提升中国科学教育领域的国际形象起到一定的促进作用。

习近平总书记在2018年两院院士大会开幕会上的讲话强调,“中国要强盛、要复兴,就一定要大力发展科学技术,努力成为世界主要科学中心和创新高地”。中国未来的发展在于创新,而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信,在第一期的基础上,第二期“中外物理学精品书系”会努力做得更好,不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思想的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣,也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展,为我国的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会主任

中国科学院院士,北京大学教授

王恩哥

2018年7月于燕园

## 内 容 提 要

本书共分上、下两册,比较系统地讲授了相对论性量子场论的基础知识,所需要的背景物理知识包括经典力学和量子力学,以及部分高等量子力学的内容.如果学过一些李群的基础知识,也会对本课程的学习有所帮助.本书上册为标准的正则量子场论的内容,主要包括了相对论性量子力学、场量子化、场的相互作用和微扰论、量子电动力学、Feynman 振幅的解析性和色散关系、重整化理论简介,以及手征对称性、分波动力学等内容.本书下册则从路径积分量子化开始讲起,内容包括积分方程与束缚态问题、重整化群方程简介、对称性自发破缺与线性和非线性  $\sigma$  模型、有效场论简介,以及非 Abel 规范场的量子化、量子色动力学简介,还包括了量子反常、弱电标准模型的建立及其单圈重整化等.

本书可作为物理系高年级本科生和粒子物理相关专业研究生的教材,也可供场论、粒子物理等方向的科研人员参考.

# 前 言

本书共分上、下两册,系统地介绍了标准的现代量子场论与量子规范场论教科书应有的最基础内容,如场量子化、微扰理论、正规化和重整化方案等,除此以外还用一定篇幅介绍了色散关系、 $S$  矩阵理论以及分波动力学的一些基础知识. 这些知识很少在现代场论书里讨论,但是作者认为在目前粒子物理的发展形势下,重新开始重视这些内容是值得的,因为它们对于研究强子之间相互作用动力学是必不可少的. 基于同样理由,本书也用了一些篇幅来介绍有效场论技术,尤其是手征微扰理论的基础知识.

本书是介绍相对论性量子场论的基础书籍,但是由于粒子物理与量子场论之间的紧密联系,作者也尽可能地附带介绍了一些相应的粒子物理学知识. 对本书从头到尾的讲授大约会花费 150 个学时,但是教师和其他读者完全可以根据授课、学习和未来工作需要做出取舍.

本书是根据作者多年来在北京大学教授量子场论、量子规范场论以及研究生讨论班的讲义发展而来. 本书可以作为粒子物理与核物理专业的研究生、高年级本科生的教材,以及研究者的参考书. 在编写本书的过程中,我得到了许多同行与学生的热情帮助、批评与鼓励. 尤其是学生们的求知热情与进取精神,是我整理这本讲义的最大的动力. 感谢肖志广、郭志辉、姚德良、王宇飞、马驰川等人在教学和写作本书的不同阶段给予我的诸多帮助. 感谢曹沁芳、马垚在书稿校对过程中的辛勤工作. 还有许多别的名字,这里就不一一致谢了. 当然,本书所暴露的任何错误与问题都是我自己的原因造成的. 感谢廖玮教授对本书写作的关心. 最后特别感谢北京大学出版社编辑刘啸先生在本书写作过程中的热情支持、鼓励,没有他的努力,本书也是不可能如期完成的.

郑汉青  
2018 年 2 月



# 目 录

第一章	引言	1
第二章	相对论性量子力学	4
§2.1	Dirac 方程	4
§2.2	Dirac 方程的 Lorentz 协变性	8
§2.3	自由粒子解	12
§2.4	正电子, $C$ 和 $T$ 变换	18
第三章	经典场论	23
§3.1	从经典力学到量子力学	23
§3.2	拉格朗日场论与正则形式	26
§3.3	连续对称变换、Noether 定理与守恒流	31
第四章	自由场的量子化	37
§4.1	自由 Klein-Gordon 场的量子化	38
§4.2	自由 Dirac 场的量子化	44
§4.3	电磁场的量子化	47
§4.4	场算符在分立对称变换下的性质	54
第五章	场的相互作用	62
§5.1	相互作用表象、演化算符与 $S$ 矩阵	62
§5.2	Wick 定理	65
§5.3	Feynman 图与 Feynman 规则	67
§5.4	不变矩阵元、散射截面	81
§5.5	$S$ 矩阵在 $T$ 变换下的性质	86
第六章	QED 过程的树图计算	91
§6.1	$\gamma$ 矩阵的性质, $\gamma$ 代数与 Fierz 变换	91
§6.2	Compton 散射	95
§6.3	正负电子湮灭	101

§6.4	螺旋度、手征性与手征表象	104
§6.5	$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : 极化过程的计算	107
<b>第七章</b>	<b>Feynman 图的解析行为</b>	<b>118</b>
§7.1	散射矩阵的么正性与光学定理	118
§7.2	Feynman 图的奇异性分析, Cutkosky 规则	119
§7.3	Mandelstam 谱表示	135
§7.4	关于色散关系理论和 $S$ 矩阵理论的一些简单讨论	138
<b>第八章</b>	<b>散射的 <math>S</math> 矩阵</b>	<b>140</b>
§8.1	粒子的场的假说、散射的 $S$ 矩阵	140
§8.2	LSZ 约化公式	147
§8.3	微扰理论	152
§8.4	交叉对称性	155
§8.5	Källén-Lehmann 表示	156
§8.6	因果性与解析性、色散关系	159
<b>第九章</b>	<b>紫外发散与重整化</b>	<b>163</b>
§9.1	紫外发散与重整化	164
§9.2	正规化与重整化	174
<b>第十章</b>	<b>QED 单圈辐射修正</b>	<b>185</b>
§10.1	QED 单圈发散的重整化	185
§10.2	1+1 维 QED	192
§10.3	辐射修正的例子	195
§10.4	红外发散, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 过程	200
<b>第十一章</b>	<b>手征对称性与 <math>\pi</math> 介子</b>	<b>207</b>
§11.1	强相互作用的手征对称性	207
§11.2	流代数	209
§11.3	对称性的自发破缺和 Goldstone 定理	211
§11.4	部分轴矢流守恒与流代数的应用	214
§11.5	Weinberg-Tomozawa 公式	216
§11.6	Weinberg 关于 $\pi\pi$ 散射的讨论, 两个软 $\pi$ 的情形	218
§11.7	Goldberger-Treiman 关系和 Adler-Weisberger 求和规则	220
<b>第十二章</b>	<b>分波矩阵元</b>	<b>222</b>
§12.1	光学定理与分波振幅	222
§12.2	$\pi\pi$ 散射中的交叉对称性	225
§12.3	交叉对称性与 Balachandran-Nuyts-Roskies 关系	226

---

§12.4	左手割线、Froissart-Gribov 投影公式	228
§12.5	有自旋时的分波展开	231
§12.6	一般情况下两两散射分波振幅的奇异性分析	233
<b>第十三章</b>	<b>分波矩阵元的么正性</b>	<b>243</b>
§13.1	Riemann 面与共振极点	243
§13.2	分波矩阵元的么正表示	253
<b>附录</b>	<b>常用公式</b>	<b>266</b>
1	$d$ 函数	266
2	Feynman 参数积分公式	268
3	动量空间积分公式	269
	<b>主要参考书目</b>	<b>271</b>
	<b>名词索引</b>	<b>272</b>

# 第一章 引言

20 世纪初期相对论与量子力学的建立是物理学史上划时代的事件. Dirac 建立的相对论性电子 (与空穴) 的量子理论开辟了物理学发展的新天地<sup>①</sup>. 这最终导致了相对论性量子场论的建立与发展. 可以说量子场论是狭义相对论与量子力学结合的必然产物. 如果从 Dirac 电子理论的建立开始算起, 量子场论发展到今天已走过了近 90 年的历程.

量子场论最初的应用, 即用来描述电子与无质量的光量子的相互作用, 始于 1930 年代, 而在 1940 年代末开始成熟. 该阶段在理论上最主要的障碍是高阶计算中的无穷大问题, 并因此发展出了重整化理论<sup>②</sup>. 这些努力促成了量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 的建立并使之取得了巨大的成功.

量子场论的发展与粒子物理的发展是互相促进且一路相伴而来的. 20 世纪初 Rutherford  $\alpha$  粒子散射实验揭示了原子核内带正电粒子——质子的存在, 使得核子本身也成为了研究对象. 1920 年代人们开始建立加速器来研究各种实验室里制造出来的核反应过程, 并导致了 Chadwick 于 1932 年发现了中子. 原子核的  $\beta$  衰变的发现导致了 Pauli 的中微子假说以及 Fermi 弱相互作用理论的建立, 而中子的发现也推动了 Heisenberg 关于两核子的相互作用理论以及 Yukawa 的介子交换理论的建立. 因此到 1930 年代, 对两种短程相互作用, 即核子-核子之间的强相互作用以及  $\beta$  衰变的弱相互作用的研究均已开始起步.

二战结束后, 量子场论和粒子物理进入了一个蓬勃发展的时期. 至 1960 年, 即标准模型诞生前, 粒子物理学的发展大致能够分为几个方向: 量子电动力学与规范原理;  $\pi$  介子物理与色散关系理论; 带奇异数粒子的物理和强相互作用的内部整体对称性; 弱作用中重子-轻子的对称性; Yang-Mills 场论与对称自发破缺. 在这些探索中, 对称性, 特别是规范对称性起到了关键作用, 尤其是 Yang-Mills 场论成为了现代量子场论的核心. Higgs 机制的提出解决了规范粒子的质量产生问题. 所有这些努力导致了描述弱、电相互作用的“标准模型”的建立.

标准模型建立之初, 人们对其抱有怀疑态度, 因为对其可重整性的理解不是十分清楚, 另外 Higgs 机制看起来也比较人为和任意. 直到 1970 年代规范理论的可重整性被证明, 标准模型才渐渐地被普遍接受. 1974 年 Yang-Mills 场渐近自由的发

<sup>①</sup>Dirac P A M. Proc. Roy. Soc. A, 1928, 117: 610; 118: 351.

<sup>②</sup>Schwinger J. Phys. Rev., 1948, 74: 416; 1949, 75: 898. Tomonaga S. Phys. Rev., 1948, 74: 224. Feynman R P. Phys. Rev., 1948, 74: 939; 1430. Dyson F J. Phys. Rev., 1949, 75: 486.

现确立了规范理论在基本层次上描述强相互作用的地位. 自此标准模型被扩充至描述强、弱、电三种力的规范相互作用理论.

在以上的回顾中读者可能发现, 历史上可重整性在建立一个正确的物理理论的过程中的地位至关重要. 传统的重整化理论是建立在 Bogliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann 的工作基础上的. 't Hooft 所提出的维数正规化方法是建立规范理论中保持规范不变性的重整化方法的不二选择. 而且, 维数正规化最小减除方案还带来了可对重整性的更深的理解. 在这个基础上, 传统意义下的不可重整理论又重新获得了生命力, 有效场论技术也得到了越来越多的研究. 现代场论认为 BPHZ 意义下的可重整性并不是一个建立正确物理理论的必要条件, 相反它是一个物理后果, 即导致不可重整的高阶算符是从很高能量处下来的, 因而受到了压低. 而质量无关的重整化方案 (即最小减除方案) 以及对 Wilson 重整化群方程的认识保证了这些受到幂次律压低的算符在圈图水平上继续受到压低.

1970 年代以后进入了精确验证标准模型的时代. 具有划时代意义的是 1990 年代 CERN 的 LEP 实验直接发现了传递弱相互作用的中性规范粒子  $Z^0$ . 最近的重大成果是 2012 年 LHC 发现了标准模型预言的最后一个, 也是地位最独特的粒子——Higgs 粒子, 为标准模型的检验画上了一个完美的句号.

标准模型的理论预言被广泛地检验 (从原子的宇称破坏实验到 TeV 量级的大型强子对撞机), 并且理论预言和实验在千分之几的水平上相符合. 在其使人赞叹的同时, 当然, 也没有人会相信有二十几个自由参数的标准模型理论是终极理论. 按照现代场论的观点, 所有的场论都应该是“有效” (相对于“基本”这两个字而言) 场论, 那么问题变为, 为什么在弱电能标上的一个有效场论可以很好地用一个可重整的场论来描述? 为什么一个有效场论能够如此好地来描述物理实验? 这些问题在一些人看来, 实际上存在一个清楚的回答: 标准模型背后的更深层次的物理处在一个高得多的能标上! 如果事实真的是这样, 那么未来的以大型对撞机为代表的高能物理实验将越来越不可行. 物理学本质上是一门实验科学, 理论研究如果没有实验的支持, 则唯一检验理论的标准将仅仅剩下逻辑上的自洽性, 这种情况最终会导致研究者彻底的迷失.

人们做了许多尝试来超越标准模型, 其中占主流的思考方式是追求越来越大的对称性, 把标准模型中  $SU_c(3) \times SU_w(2) \times U_Y(1)$  对称性从一个更大的对称群中破缺下来, 这一思想可以回溯到爱因斯坦统一电磁规范理论和引力理论的尝试. 然而这一大统一思想到目前为止并没有给物理学带来真正的收获, 其所预言的质子衰变在经过了数十年的实验探索后仍然没有被观测到. 事实上追求越来越大的对称性会导致一个终极问题, 即为为什么会存在一个最大、最后的对称性. 从这个角度来说, 追求更大的对称性不可能导致一个真正的终极理论. 真正的终极理论, 如果存在的话, 应该是没有办法问下一个为什么的理论, 比如平衡态统计物理.

因此本书的读者, 正处在历史的十字路口: 标准模型的辉煌已是过去, 未来将何去何从? 新一代人能够做些什么呢? 本书试图对希望进入这一领域的读者产生一些有益的帮助 (而不是误导). 首先可以肯定的是, 物理学不会终结, 人类对自然的认识永远也不可能有终结的一天. 另外更值得强调的是, 即使知道了基本拉氏量的写法, 也远远不能说就知道了相关的物理的一切. 凝聚态物理就是一个生动的例子. 本质上凝聚态物理的基本理论是量子电动力学, 但是只知道这一点显然对理解凝聚态物理里面丰富的物理现象是远远不够的. 另外一个例子就是色禁闭. 虽然我们知道描述强相互作用的基本理论是量子色动力学, 但是彻底理解和解决色禁闭问题应该还会有很长的路要走. 量子场论本身也还有许多非微扰的问题有待人们长期不懈探索. 对于比标准模型更深层次的物理的研究也不会终结, 即使加速器物理停滞, 宇宙学的观测也有助于我们窥伺未知的领域. 最后还有一个“古老”的话题, 即引力场的量子化问题. 引力是四种相互作用中最早被认识到的, 但直到今天还没有建立起一个正确的量子引力理论. 这也期待着未来的研究.

## 第二章 相对论性量子力学

### §2.1 Dirac 方程

#### 2.1.1 Klein-Gordon 方程

考虑一孤立的单粒子系统, 其能量

$$E = \frac{p^2}{2m},$$

其中  $p$  为动量. 为了实现向量子力学的过渡, 做替换

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad (2.1)$$

就有非相对论性的 Schrödinger 方程,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(q, t). \quad (2.2)$$

这一方程是非协变的, 在相对论情形需要改写. 根据狭义相对论, 能量  $E$  和动量  $(p_x, p_y, p_z)$  构成一个具有不变长度的逆变 4-矢量<sup>①</sup>

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left( \frac{E}{c}, p^1, p^2, p^3 \right) = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right). \quad (2.6)$$

不变长度是

$$\sum_{\mu=0}^3 p_\mu p^\mu \equiv p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \equiv m^2 c^2. \quad (2.7)$$

<sup>①</sup>协变与逆变: 为表述简单取  $\hbar = c = 1$ . 对于  $(t, x, y, z) \equiv (t, \mathbf{x})$ , 用逆变 4-矢量表示为

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z). \quad (2.3)$$

协变 4-矢量  $x_\mu$  则为

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (2.4)$$

其中  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = g^{\mu\nu}$  为度规张量. 度规张量的一个明显的用处是升降指标. 不变长度  $x^2 \equiv x_\mu x^\mu = t^2 - \mathbf{x}^2$ . 类似地,  $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$ , 内积是  $p_1 \cdot p_2 = p_1^\mu \cdot p_{2\mu} = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$ . 又有

$$p^\mu \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left( i \frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i} \nabla \right) \equiv i \nabla^\mu, \quad p^\mu p_\mu \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv -\square. \quad (2.5)$$

一种改造方程 (2.2) 的方法是将其修改为

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi. \quad (2.8)$$

但是这一方法并不成功. 首先, 对时间的导数和对空间坐标的导数并不对称. 其次, 更为严重的问题是, 开根号导致这一理论成为一个非定域的理论并因此带来各种问题, 很难处理<sup>①</sup>. 所以为了数学上的简洁, 我们尝试改造 (2.8) 式为

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi.$$

可以把上式改写为更为简洁, 明显协变的形式:

$$\left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0, \quad (2.9)$$

其中  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ . 这一方程叫作 Klein-Gordon 方程.

然而, Klein-Gordon 方程带来了另外的问题, 看起来更为严重. 首先是它引入了负能解, 即  $E = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ . 另外同样非常严重的困难是概率密度不再正定. 我们可以得到如下的守恒流:

$$\partial^\mu (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*) = 0. \quad (2.10)$$

非相对论理论中的概率密度项在这里的对应是  $(i\hbar/2mc^2) \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$ , 但是很显然这一表达式并不正定. 造成这些困难的原因是方程中关于时间的导数是二阶的<sup>②</sup>. 因此, 我们这里遵循历史的足迹, 暂时放弃 Klein-Gordon 方程, 而试图寻找一个关于时间导数的线性方程, 这样就可以恢复概率密度的意义.

### 2.1.2 Dirac 方程

我们把线性方程写为如下形式:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \left( \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right) + \beta mc^2 \psi \equiv H\psi, \quad (2.11)$$

其中的  $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ . 显然, 这里的  $\alpha_i$  不能是数, 否则即使在空间转动下方程也不是不变的. Dirac 建议把上式看成一个矩阵方程, 波函数看成有  $N$  个分量

<sup>①</sup>定域相互作用指的是, 相互作用拉氏量是由在同一个时空点上的场或其有限阶导数之间的简单乘积所构成的.

<sup>②</sup>这里我们指出, 这两个严重困难在做了场量子化以后最终都将被克服, 即通过引入反粒子解决负能级问题, 并且放弃守恒流的概率解释.



的列矩阵:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

对这个矩阵方程当然有要求. 首先, 这个方程必须给出正确的质能关系  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ . 除此以外, 它还应该存在一个连续性方程和对波函数的概率解释. 最后它还必须是 Lorentz 协变的.

为了得到正确的质能关系,  $\psi$  的每个分量  $\psi_r$  必须满足 Klein-Gordon 方程. 这样迭代方程 (2.11), 得到如下必要条件:

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij} I, \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0, \\ \alpha_i^2 &= \beta^2 = I. \end{aligned} \quad (2.13)$$

哈密顿量  $H$  的厄米性要求  $\alpha_i, \beta$  必须是厄米矩阵, 因此由  $\alpha_i^2 = \beta^2 = I$  得知这些矩阵的本征值只能为  $\pm 1$ . 又由  $\alpha_i$  与  $\beta$  的反对易关系和矩阵求迹的性质知道  $\alpha_i$  与  $\beta$  必须是无迹的:  $\text{tr}(\alpha_i) = -\text{tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{tr}(\alpha_i) = 0$ . 由于厄米矩阵均可以通过么正变换对角化, 所以  $\alpha_i, \beta$  只能是偶数维矩阵. 维数  $N = 2$  被排除在外 (因为独立的矩阵只有三个 Pauli 矩阵和单位矩阵), 所以满足以上要求的最低维数为  $N = 4$ . 事实上, 可以把这些矩阵写为<sup>①</sup>

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

其中  $\sigma_i$  是熟知的  $2 \times 2$  Pauli 矩阵, 式中的  $I$  表示  $2 \times 2$  的单位矩阵.

再看概率密度问题. 不难验证从 Dirac 方程出发可以得到连续性方程  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , 其中  $\rho = \psi^\dagger \psi$  是正定的且满足守恒律

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \psi^\dagger \psi = 0. \quad (2.15)$$

因此  $\rho$  的确适合于作为概率密度. 这时  $\mathbf{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi$ , 因此  $\boldsymbol{\alpha}$  为速度算符.

还需要证明方程 (2.11) 的协变性. 但是在搞清这件事之前, 我们更急于知道方程 (2.11) 的非相对论极限. 只有它能回到我们所熟知的情形, 才能对 (2.11) 式建立信心. 我们将在下一节来讨论这件事情.

<sup>①</sup>不唯一, 相应于不同表示, 而不同表示在物理上是等价的. 这里写的表示叫作 Dirac 表示.