



强非线性系统 周期解的能量法

李 骊 叶红玲 著



科学出版社

www.sciencep.com

强非线性系统周期解的能量法

李 骊 叶红玲 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统地阐述了研究强非线性系统周期解的新的分析方法——能量法。首先建立能量坐标系并导出能量坐标变换公式,接着顺次研究了强非线性单自由度自治系统与非自治系统,以及多自由度自治系统与非自治系统等4种情况。对每种情况均做了两方面的研究:定性方面推证了一系列周期解存在与稳定的基本定理,并得出了相应的必要与充分条件;定量方面则导出了该周期解的轨线以及时间历程的近似解析表达式。计算实例表明,应用能量法所得结果,定性上是正确的,定量上也有较好精度。

本书可作为高等院校力学、应用数学等专业本科生与研究生教材,也可供相关专业科研人员与工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

强非线性系统周期解的能量法/李骊,叶红玲著. —北京:科学出版社,2008
ISBN 978-7-03-021533-8

I. 强… II. ①李…②叶… III. 非线性系统(自动化)-周期解-能量法 IV. TP271

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第043845号

责任编辑:沈建/责任校对:郭瑞芝

责任印制:刘士平/封面设计:耕者

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年5月第一版 开本:B5(720×1000)

2008年5月第一次印刷 印张:8 3/4

印数:1—2 500 字数:165 000

定价:40.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

序

20 世纪 60 年代后发展起来的混沌科学（或称非线性科学）被认为是人类有史以来创建的十大重要理论之一。该理论的建立及发展，极大地促进了基础科学、应用科学和技术科学的发展。有科学家预言，“非线性将是 21 世纪科学研究的热点之一”。

随着研究的深入，国内外出版了大量非线性动力学的论文和专著，总体来看，这些专著多是针对“弱非线性动力学系统”的理论，但大量的工程实际非线性问题中，尚有相当一部分属于“强非线性系统”。《强非线性系统周期解的能量法》这本专著弥补了非线性科学理论上的空缺，具有重要的理论和工程应用价值。该书具有以下特色：

（1）内容取材先进，反映了国际科学前沿非线性科学的最新成果，也密切吻合工程和技术发展的广泛需求。

（2）该书是作者的重要创新成果，如计算强非向性系统周期解的能量法——单自由度强非线性自治系统；强非线性单自由度非自治系统周期解的能量法；计算多自由度强非线性自治系统周期解的能量法；多自由度强非线性非自治系统周期解的存在性、稳定性及其近似表达式等。

（3）撰写和阐述具有科学性，理论性强，体系严密，定义、命题、定理、推论、例题完整充实。

（4）著作具有广泛的适应性，既将深奥数学理论给出清晰的物理解释，又配以简明的例题，使专业科技读者可以得到严格理论依据，以便从事高层次科研，又可供广大工程技术人员了解和应用于新遇到的科技问题。

（5）文笔流畅，言简意赅，图表清晰。

综上所述，该专著是一部具有国际水平的优秀科技著作，必将为促进非线性科学的发展发挥重要作用。

中国工程院院士，非线性振动专家
哈尔滨工业大学航天学院首席教授
天津大学一般力学学科带头人

陈予恕

2008 年 3 月 26 日

前 言

在科学与工程技术问题中,有许多属于非线性系统。如何寻求该系统的周期解,在理论和应用方面均有重要意义。对于弱非线性系统,已有很多成熟的处理办法。但对于强非线性系统,迄今仍缺少全面有效的分析方法。基于周期解在一个周期内其平均能量应该守恒这一力学概念,我们提出了计算强非线性系统周期解的能量法,并应用该法,对单自由度强非线性自治系统、单自由度强非线性非自治系统、多自由度强非线性自治系统及多自由度强非线性非自治系统的周期解进行了系统的研究。在定性方面,推证了一系列关于周期解存在与稳定的基本定理,并据此得出了周期解存在与稳定的一些必要与充分条件。在定量方面,则导出了相应周期解的轨线以及时间历程的近似解析表达式。计算实例表明,应用能量法所得到的结果,定性上是正确的,定量上也有较好的精度。以上研究成果相继发表在国际力学期刊(*Nonlinear Dynamics*)上(共4篇),且均被国际工程索引(EI)以及科学引文索引(SCI)所收录,说明了这一方法已引起了学术界的关注。本书正是根据这一研究成果整理而成,希望它的出版,对今后强非线性系统周期解的研究能有所帮助。

中国工程院院士、非线性振动专家陈予恕教授对本书的出版给予了热情的关怀和支持。谨表谢忱!

由于作者学识有限,书中难免存在不足,敬请读者不吝指正。

李 骊 叶红玲

2007年12月于北京工业大学

目 录

序

前言

第 1 章 能量坐标系	1
§ 1-1 概述	1
§ 1-2 等能量闭曲线 能量坐标系	1
§ 1-3 能量坐标变换公式	4
§ 1-4 能量坐标变换公式的几点注记	6
§ 1-5 应用举例	7
§ 1-6 小结	10
参考文献	11
第 2 章 单自由度强非线性自治系统	12
§ 2-1 概述	12
§ 2-2 方程的正则形式及其性质的若干讨论	12
§ 2-3 能量坐标系中相应方程的推导	13
§ 2-4 周期解 (极限环) 存在与稳定的基本定理	15
§ 2-5 周期解 (极限环) 的近似表达式	22
§ 2-6 周期解定理的另一种形式及其相应的周期解近似表达式	23
§ 2-7 应用举例	25
§ 2-8 小结	37
参考文献	39
第 3 章 单自由度强非线性非自治系统	40
§ 3-1 概述	40
§ 3-2 方程的正则形式	40
§ 3-3 能量坐标系中方程的相应形式	41
§ 3-4 周期解存在与稳定的基本定理	44
§ 3-5 将定理变形为易于应用形式	53
§ 3-6 以幅频特性曲线斜率表示的稳定性与共振判别准则	55
§ 3-7 周期解的近似解析表达式	57
§ 3-8 应用举例	59
§ 3-9 小结	69

参考文献	69
第 4 章 多自由度强非线性自治系统	71
§ 4-1 概述	71
§ 4-2 方程的正则形式	71
§ 4-3 能量坐标系中相应方程的推导	72
§ 4-4 周期解存在与稳定的基本定理	74
§ 4-5 将定理变换为易于应用形式	81
§ 4-6 周期解的近似表达式	84
§ 4-7 应用举例	85
§ 4-8 小结	100
参考文献	101
第 5 章 多自由度强非线性非自治系统	102
§ 5-1 概述	102
§ 5-2 方程的正则形式	102
§ 5-3 将方程变换为能量坐标形式	103
§ 5-4 周期解存在与稳定的基本定理	105
§ 5-5 将定理 5.4.3 与定理 5.4.4 变换为易于应用形式	114
§ 5-6 周期解的近似表达式	115
§ 5-7 应用举例	117
§ 5-8 小结	131
参考文献	132

第 1 章 能量坐标系

§ 1-1 概 述

本书将阐述如何用能量法研究强非线性系统的周期解问题。众所周知,当物体运动时,在每一时刻都具有一定的能量,对力学系统而言,这一能量即是其动能与势能之和,而且在物体运动的整个时间历程中,是随时变化的。能量法的基本思想是,如果物体的运动是周期运动,则在每一个周期的时间长度中对物体的能量进行平均,所得的平均能量应为一不变的常数。此外,如果上述周期运动为渐近稳定,则位于该周期运动邻域内的其他一切运动,在与上述周期同样的时间长度中所求得平均能量,最终将趋于该周期运动的平均能量,并且以此平均能量为其极限。

应用能量法来研究物体的周期运动,首先需要了解物体运动时其能量的变化情况。为了得到这种能量变化的表达式,一般的直角坐标系或曲线坐标系(极坐标系,球面坐标系等)显然是难以胜任的。因此,需要构造新的坐标系,这就是以物体运动时的能量为基础而构造的能量坐标系。当然,这一坐标系应具有如下最基本的性质,即坐标应与物体的运动状态呈一一对应关系。

本章首先研究能量坐标系的构造方法,并且证明,当物体所受之力具有恢复力的性质时,所构造的能量坐标系中的坐标与物体的运动状态的确存在着——对应的关系;之后,推导了如何将相平面坐标系中的坐标变换为能量坐标系中的坐标的坐标变换公式,并且证明了这一坐标变换公式有着单值的对应关系;最后,举出两个不同类型的实例以说明能量坐标变换公式的具体计算步骤^[1]。

§ 1-2 等能量闭曲线 能量坐标系

考虑如下保守系统:

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \quad (1-2-1)$$

假定 $g(x)$ 连续,并且在区域 $R: -m < g(x) < M (m > 0, M > 0)$ 内满足如下条件:

$$xg(x)_{x \neq 0} > 0 \quad (1-2-2)$$

如果 $g(x)$ 表示力,则上述条件的力学意义是该力为恢复力,即其方向总是指向力的中心 $x=0$ 。

现定义函数

$$V(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi \quad (1-2-3)$$

它代表与 $g(x)$ 相对应的势能。将系统(1-2-1)的每一项均乘以 $\dot{x}$, 于是得

$$\dot{x} \ddot{x} + \dot{x} g(x) = 0 \quad (1-2-4)$$

如果考虑到式(1-2-3), 则上式可写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right) = 0 \quad (1-2-5)$$

现令

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) \quad (1-2-6)$$

显然, $E(x, \dot{x})$ 代表系统(1-2-1)的总能量, 即其动能与势能之和。

将式(1-2-6)代入式(1-2-5), 得

$$\frac{d}{dt} E(x, \dot{x}) = 0 \quad (1-2-7)$$

积分之, 于是有

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) = C \quad (1-2-8)$$

式中, C 为常数。

我们称式(1-2-8)所描绘的曲线为等能量曲线。在条件(1-2-2)被满足的区域 R 内, 它具有以下两个特性:

(i) $E(x, \dot{x})$ 为一定正函数, 亦即 $E(0, 0) = 0$, 且当 $x^2 + \dot{x}^2 \neq 0$ 时, 有 $E(x, \dot{x}) > 0$ 。据此可知, $E(x, \dot{x}) = C$ ($C > 0$, 常数) 必为一闭曲线;

(ii) $E(x, \dot{x}) = C$ ($C > 0$, 常数) 还应为一凸闭曲线, 亦即每一通过原点 O 的半直线, 将与该闭曲线交于且仅交于一点。此外, 如果 $C_1 < C_2$, 则闭曲线 $E(x, \dot{x}) = C_1$ 将被闭曲线 $E(x, \dot{x}) = C_2$ 所包围。

首先证明, 在条件(1-2-2)的情况下, 上述特性(i)必被满足。事实上

$$xg(x)_{x \neq 0} > 0 \rightarrow V(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi > 0 \rightarrow E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) > 0$$

(当 $x^2 + \dot{x}^2 \neq 0$)

此外, 显然有 $E(0, 0) = 0$ 。因此 $E(x, \dot{x})$ 必为一正函数。

其次, 令 $x = r \cos \phi$, $\dot{x} = r \sin \phi$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial r} &= \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial r} + \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} = \dot{x} \sin \phi + g(x) \cos \phi \\ &= \frac{1}{r} (\dot{x} r \sin \phi + g(x) r \cos \phi) = \frac{1}{r} (\dot{x}^2 + xg(x)) \end{aligned}$$

因此

$$xg(x)_{x \neq 0} > 0 \rightarrow \frac{\partial E}{\partial r} > 0$$

这表明上述特性(ii)也必被满足。

正是由于 $E(x, \dot{x})$ 的这些特性, 所以可以用等能量闭曲线

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E \quad (E \text{ 为常数}) \quad (1-2-9)$$

以及与 x 轴正向夹角为 θ 的半直线来构造与系统(1-2-1)相对应的能量坐标系 (E, θ) , 如图 1-2-1 所示。

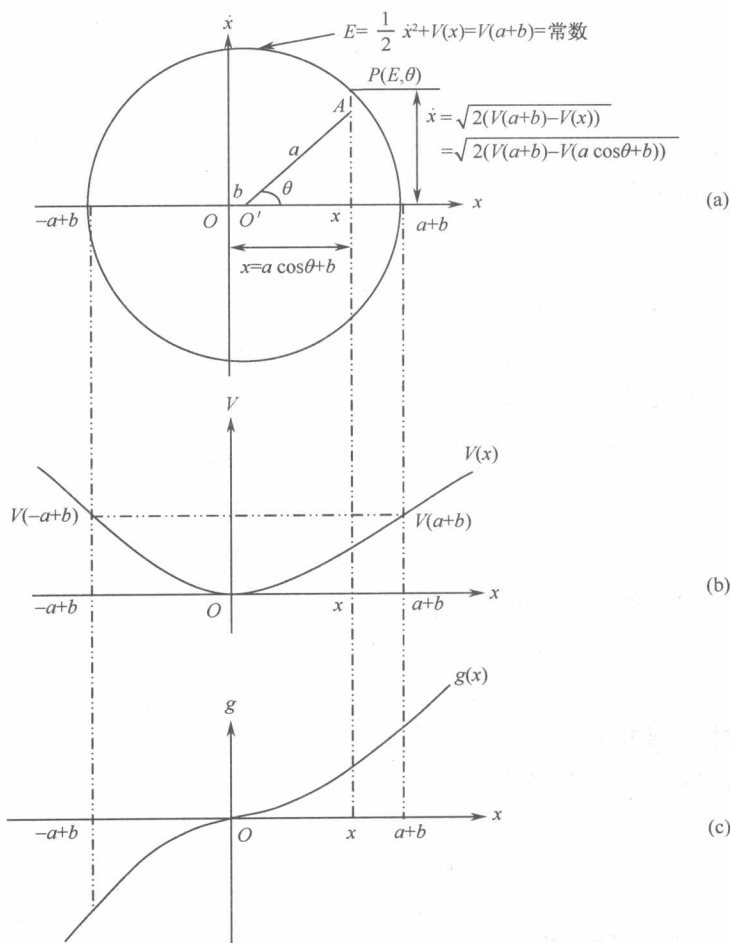


图 1-2-1 能量坐标系

§ 1-3 能量坐标变换公式

现在我们来推导将相平面坐标 $(x, \dot{x})$ 变换为能量坐标 (E, θ) 的公式。首先令

$$x = a \cos \theta + b \quad (1-3-1)$$

式中, a, b 均为能量 E 的函数, 它们的求法将在下面给出。此外, b 表示由于 $g(x)$ 内含有 x 的偶次项, 也即 $g(x)$ 为非奇函数时所引起的振动中心的偏离。后面将会看到, 当 $g(x)$ 为奇函数时, 将有 $b=0$ 。

将式(1-3-1)代入式(1-2-9), 得

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(a \cos \theta + b) = E \quad (1-3-2)$$

式中, E 为常数。

由图 1-2-1(a)可知道, 当 $\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 时, 均有 $\dot{x}=0$ 。将 $\theta=0, \dot{x}=0$ 以及 $\theta=\pi, \dot{x}=0$ 分别代入式(1-3-2), 则得

$$V(a+b) = E \quad (1-3-3)$$

$$V(-a+b) = E \quad (1-3-4)$$

由式(1-3-3)与式(1-3-4)显然可得

$$V(a+b) = V(-a+b) \quad (1-3-5)$$

将式(1-3-3)代入式(1-3-2), 有

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(a \cos \theta + b) = V(a+b) \quad (1-3-6)$$

于是得

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(V(a+b) - V(a \cos \theta + b))} \quad (1-3-7)$$

现将式(1-3-1)与式(1-3-7)重写如下:

$$x = a \cos \theta + b$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(V(a+b) - V(a \cos \theta + b))} \quad (1-3-8)$$

上式即为我们所要推导的能量坐标变换公式的基本形式。

下面来求 a, b 与 E 的关系。首先由式(1-3-5)得

$$V(a+b) - V(-a+b) = 0 \quad (1-3-9)$$

据此可求出

$$b = \tilde{b}(a) \quad (1-3-10)$$

将式(1-3-9)对 b 求导数, 并注意到式(1-2-3), 得

$$\frac{\partial}{\partial b} (V(a+b) - V(-a+b)) = g(a+b) - g(-a+b) \quad (1-3-11)$$

条件(1-2-2)表明 x 与 $g(x)$ 应同号。此外由图 1-2-1(a)知 $a+b>0$ 与 $-a+b<0$,

从而有

$$g(a+b) > 0, \quad g(-a+b) < 0 \quad (1-3-12)$$

将式(1-3-12)代入式(1-3-11), 则得

$$\frac{\partial}{\partial b}(V(a+b) - V(-a+b)) = g(a+b) - g(-a+b) > 0 \quad (1-3-13)$$

于是, 由隐函数定理可知, 上述解(1-3-10)是唯一的。

将式(1-3-10)代入式(1-3-3), 得

$$V(a+\tilde{b}(a)) = E \quad (1-3-14)$$

据此可解得

$$a = a(E) \quad (1-3-15)$$

下面证明, 上述解也是唯一的。为此, 将式(1-3-14)对 a 求导, 并注意到式(1-2-3), 于是得

$$\frac{\partial}{\partial a}V(a+\tilde{b}(a)) = g(a+\tilde{b}(a))\left(1 + \frac{\partial \tilde{b}(a)}{\partial a}\right) \quad (1-3-16)$$

现证

$$\left|\frac{\partial \tilde{b}(a)}{\partial a}\right| < 1 \quad (1-3-17)$$

为此, 将式(1-3-5)两端对 a 求导, 并注意到式(1-2-3), 得

$$g(a+\tilde{b}(a))\left(1 + \frac{\partial \tilde{b}(a)}{\partial a}\right) = g(-a+\tilde{b}(a))\left(-1 + \frac{\partial \tilde{b}(a)}{\partial a}\right) \quad (1-3-18)$$

据此得

$$\frac{\partial \tilde{b}(a)}{\partial a} = \frac{-g(a+\tilde{b}(a)) - g(-a+\tilde{b}(a))}{g(a+\tilde{b}(a)) - g(-a+\tilde{b}(a))} \quad (1-3-19)$$

由式(1-3-12)知

$$g(a+\tilde{b}(a)) = |g(a+\tilde{b}(a))|, \quad -g(-a+\tilde{b}(a)) = |g(-a+\tilde{b}(a))| \quad (1-3-20)$$

将式(1-3-20)代入式(1-3-19), 得

$$\frac{\partial \tilde{b}(a)}{\partial a} = \frac{-|g(a+\tilde{b}(a))| + |g(-a+\tilde{b}(a))|}{|g(a+\tilde{b}(a))| + |g(-a+\tilde{b}(a))|} \quad (1-3-21)$$

由此不难看出

$$\left|\frac{\partial \tilde{b}(a)}{\partial a}\right| < 1 \quad (1-3-22)$$

将式(1-3-12)与式(1-3-22)代入式(1-3-16), 得

$$\frac{\partial}{\partial a}V(a+\tilde{b}(a)) = g(a+\tilde{b}(a))\left(1 + \frac{\partial \tilde{b}(a)}{\partial a}\right) > 0 \quad (1-3-23)$$

于是, 由隐函数定理可知, 由式(1-3-14)所求得解(1-3-15)也是唯一的。

将式(1-3-15)代入式(1-3-10),则得

$$b = \tilde{b}(a(E)) \triangleq b(E) \quad (1-3-24)$$

将式(1-3-15)与式(1-3-24)代入式(1-3-8),得

$$x = a(E)\cos\theta + b(E) \triangleq x(E, \theta),$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(V(a(E) + b(E)) - V(a(E)\cos\theta + b(E)))} \triangleq \dot{x}(E, \theta) \quad (1-3-25)$$

上式即为所要推导的能量坐标变换公式的最终形式。

至于 $\dot{x}$ 右端的符号,按以下规定选取:当 $0 < \theta < \pi$ 时,选“—”, $\pi < \theta < 2\pi$ 时,选“+”。亦即速度 $\dot{x}$ 的方向,当 $0 < \theta < \pi$ 时,指向 x 轴的负向, $\pi < \theta < 2\pi$ 时,指向 x 轴的正向。容易看出,在此规定下, θ 的转向为逆时针转向。

§ 1-4 能量坐标变换公式的几点注记

(1) 首先指出, $\dot{x}$ 右端根号内的函数 $V(a+b) - V(a\cos\theta + b)$ 有一简单因子 $a^2 \sin^2\theta$ 。事实上令

$$f(a\cos\theta) = V(a+b) - V(a\cos\theta + b) \quad (1-4-1)$$

设 $z = a\cos\theta$,则式(1-4-1)化为

$$f(z) = V(a+b) - V(z+b) \quad (1-4-2)$$

将 $z=a$ 代入,显然有

$$f(a) = V(a+b) - V(a+b) = 0 \quad (1-4-3)$$

因此 $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的一个根,从而式(1-4-2)有一个因子 $a-z$ 。此外,将 $z=-a$ 代入,则由式(1-3-5)知

$$f(-a) = V(a+b) - V(-a+b) = 0 \quad (1-4-4)$$

因此 $z=-a$ 是 $f(z)=0$ 的另一个根,从而式(1-4-2)有另一个因子 $a+z$ 。将式(1-4-2)对 z 求导数并注意到式(1-2-3),得

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_{z=\pm a}} = -g(z+b)_{z=\pm a} = -g(\pm a+b) \neq 0 \quad (1-4-5)$$

因此 $z=a$ 与 $z=-a$ 均为 $f(z)=0$ 的单根。于是 $f(z)$ 可表示为

$$f(z) = V(a+b) - V(z+b) = (a-z)(a+z)h(z) \quad (1-4-6)$$

而且 $h(z)_{z=\pm a} \neq 0$ 。注意到 $z=a\cos\theta$,代入式(1-4-6),得

$$\begin{aligned} f(a\cos\theta) &= V(a+b) - V(a\cos\theta + b) = (a - a\cos\theta)(a + a\cos\theta)h(a\cos\theta) \\ &= a^2 \sin^2\theta h(a\cos\theta) \end{aligned} \quad (1-4-7)$$

并且 $h(a\cos\theta)_{\theta=0,\pi} \neq 0$ 。这样就证明了 $V(a+b) - V(a\cos\theta + b)$ 的确有一简单因子 $a^2 \sin^2\theta$ 。将式(1-4-7)代入式(1-3-7),则得

$$\dot{x} = \pm a |\sin\theta| \sqrt{2h(a\cos\theta)} \quad (1-4-8)$$

如前所述, $\dot{x}$ 的符号当 $0 < \theta < \pi$ 时选“—”, $\pi < \theta < 2\pi$ 时选“+”。在此情况下有 $\pm |\sin\theta| = -\sin\theta$ 。于是式(1-4-8)化为

$$\dot{x} = -a \sin\theta \sqrt{2h(a \cos\theta)} \quad (1-4-9)$$

据此, 式(1-3-25)可表示为

$$x = a(E) \cos\theta + b(E) \quad (1-4-10)$$

$$\dot{x} = -a(E) \sin\theta \sqrt{2h(a(E) \cos\theta)}$$

(2) 如果 $g(x)$ 为奇函数, 由式(1-2-3)知 $V(x)$ 必为偶函数。于是由式(1-3-5)可得 $b=0$ 。据此, 式(1-3-25) 变为

$$x = a(E) \cos\theta \quad (1-4-11)$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(V(a(E)) - V(a(E) \cos\theta))}$$

(3) 设 $g(x) = k^2 x$, 此时系统 (1-2-1) 化为线性系统。由式(1-2-3)得

$$V(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi = \int_0^x k^2 \xi d\xi = \frac{1}{2} k^2 x^2 \quad (1-4-12)$$

由于 $V(x)$ 为偶函数, 如上所述, 应有 $b=0$, 从而由式(1-4-11)第一式得

$$x = a(E) \cos\theta \quad (1-4-13)$$

又

$$2(V(a(E)) - V(a(E) \cos\theta)) = k^2 (a^2(E) - a^2(E) \cos^2\theta) = k^2 a^2(E) \sin^2\theta$$

代入式(1-4-11)第二式, 并注意到前述 $\dot{x}$ 符号的选取规则, 于是得

$$\dot{x} = -a(E) k \sin\theta \quad (1-4-14)$$

显然, 式(1-4-13)和式(1-4-14)与线性系统 $\ddot{x} + k^2 x = 0$ 的熟知结果相符合。

§ 1-5 应用举例

例1 考虑如下系统:

$$\ddot{x} + c_1 x + 2c_3 x^3 = 0 \quad (1-5-1)$$

在本例中

$$g(x) = c_1 x + 2c_3 x^3 \quad (1-5-2)$$

易见它为一奇函数。令

$$xg(x) = c_1 x^2 + 2c_3 x^4 = x^2(c_1 + 2c_3 x^2) > 0 \quad (1-5-3)$$

由此得域 $\mathbf{R}$ 为

$$-\infty < x < \infty, \quad \text{当 } c_1 > 0, c_3 > 0, \text{ 亦即为硬弹簧} \quad (1-5-4)$$

$$-\sqrt{-\frac{c_1}{2c_3}} < x < \sqrt{-\frac{c_1}{2c_3}}, \quad \text{当 } c_1 > 0, c_3 < 0, \text{ 亦即为软弹簧}$$

至于 $V(x)$, 由式(1-2-3) 得

$$V(x) = \frac{1}{2}(c_1 x^2 + c_3 x^4) \quad (1-5-5)$$

现求 $a(E)$ 与 $b(E)$ 。首先, 由于 $V(x)$ 为偶函数, 如前所述有 $b(E) = 0$ 。其次, 由式(1-3-3)得

$$\frac{1}{2}(c_1 a^2 + c_3 a^4) = E \quad (1-5-6)$$

注意到一般应有 $a > 0$, 据此, 可解得

$$a = \sqrt{\frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 + 8c_3 E}}{2c_3}} \quad (1-5-7)$$

应指出, 只有像式(1-5-2) 这样简单的非线性函数, $a(E)$ 与 $b(E)$ 才能比较容易地求出。对于一般的非线性函数 $g(x)$, $a(E)$ 与 $b(E)$ 的求出就相当困难甚至不可能。但这对能量法在理论上与应用上均不会构成任何障碍。因为, 以后各章中将会看到, 在证明周期解的存在性与稳定性的有关定理时, 只需知道 $a(E)$ 与 $b(E)$ 是 E 的函数就足够了, 并不需要知道它们的具体表达式。此外, 在应用这些定理来导出周期解的近似表达式时, 并不是先求出与周期解相应的 E , 然后再借助 $a(E)$ 与 $b(E)$ 的表达式来计算出对应的 $a(E)$ 与 $b(E)$ 之值, 而是将这些定理进行某些变形, 使之直接得到与周期解相应的 $a(E)$ 与 $b(E)$ 之值, 从而避免了求解 $a(E)$ 与 $b(E)$ 表达式的麻烦。

下面来导出与系统(1-5-1)相应的能量坐标变换公式。由于此时 $b(E) = 0$, 故由式(1-4-11)的第一式得

$$x = a \cos \theta \quad (1-5-8)$$

为了求出式(1-4-11)的第二式, 先应用式(1-5-5)计算出

$$\begin{aligned} 2(V(a) - V(a \cos \theta)) &= (c_1 a^2 + c_3 a^4) - (c_1 a^2 \cos^2 \theta + c_3 a^4 \cos^4 \theta) \\ &= a^2 \sin^2 \theta (c_1 + c_3 a^2 + c_3 a^2 \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (1-5-9)$$

将上式代入式(1-4-11)的第二式, 并注意到前面关于 $\dot{x}$ 符号的规定, 于是得

$$\dot{x} = -a \sin \theta \sqrt{c_1 + c_3 a^2 + c_3 a^2 \cos^2 \theta} \quad (1-5-10)$$

将式(1-5-8)与式(1-5-10)重写如下:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ \dot{x} &= -a \sin \theta \sqrt{c_1 + c_3 a^2 + c_3 a^2 \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (1-5-11)$$

其中 $a = a(E)$, 它的表达式由式(1-5-7)所确定。式(1-5-11)即为与系统(1-5-1) 相应的能量坐标变换公式。

例 2 考虑如下系统:

$$\ddot{x} + c_1 \dot{x} + \frac{3}{2} c_2 x^2 = 0 \quad (1-5-12)$$

在本例中

$$g(x) = c_1 x + \frac{3}{2} c_2 x^2 \quad (1-5-13)$$

显然,它为一非奇函数。由

$$xg(x) = x^2 \left(c_1 + \frac{3}{2} c_2 x \right) > 0 \quad (1-5-14)$$

可求得域 R 为

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} \frac{c_1}{c_2} < x < \infty, & \text{当 } c_1 > 0, c_2 > 0, \text{亦即为硬弹簧} \\ -\infty < x < -\frac{2}{3} \frac{c_1}{c_2}, & \text{当 } c_1 > 0, c_2 < 0, \text{亦即为软弹簧} \end{cases} \quad (1-5-15)$$

与 $g(x)$ 相应的势能,由式(1-2-3)知

$$V(x) = \frac{1}{2} (c_1 x^2 + c_2 x^3) = \frac{1}{2} x^2 (c_1 + c_2 x) \quad (1-5-16)$$

现求与系统(1-5-12)相应的能量坐标变换公式。由式(1-3-8)第一式得

$$x = a \cos \theta + b \quad (1-5-17)$$

其中 $b=b(a)$, 它的求法如下:首先由式(1-3-3)~式(1-3-5)与式(1-5-16)得

$$\frac{1}{2} (a+b)^2 [c_1 + c_2 (a+b)] = E \quad (1-5-18)$$

$$\frac{1}{2} (-a+b)^2 [c_1 + c_2 (-a+b)] = E \quad (1-5-19)$$

$$\frac{1}{2} (a+b)^2 [c_1 + c_2 (a+b)] = \frac{1}{2} (-a+b)^2 [c_1 + c_2 (-a+b)] \quad (1-5-20)$$

根据式(1-5-20)可得出

$$2a(3c_2 b^2 + 2c_1 b + c_2 a^2) = 0 \quad (1-5-21)$$

由此可知

$$3c_2 b^2 + 2c_1 b + c_2 a^2 = 0 \quad (1-5-22)$$

由式(1-5-22)解得

$$b = -\frac{1}{3} \frac{c_1}{c_2} \pm \sqrt{\frac{1}{9} \frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{1}{3} a^2} \quad (1-5-23)$$

式(1-5-23)的右端共有两个根,现研究如何正确地加以选取。由式(1-5-18)与式(1-5-19)可知,当 $E \rightarrow 0$ 时,有

$$a+b \rightarrow 0, \quad -a+b \rightarrow 0 \quad (1-5-24)$$

这表明当 $E \rightarrow 0$ 时,有

$$a \rightarrow 0 \text{ 与 } b \rightarrow 0 \quad (1-5-25)$$

据此,当 $c_1 > 0, c_2 > 0$, 亦即为硬弹簧时,应选取

$$b = -\frac{1}{3} \frac{c_1}{c_2} + \sqrt{\frac{1}{9} \frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{1}{3} a^2} \quad (1-5-26)$$

当 $c_1 > 0, c_2 < 0$, 亦即为软弹簧时, 应选取

$$b = -\frac{1}{3} \frac{c_1}{c_2} - \sqrt{\frac{1}{9} \frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{1}{3} a^2} \quad (1-5-27)$$

下面来推导第二个坐标变换公式。首先由式(1-5-16)算出

$$\begin{aligned} 2(V(a+b) - V(a\cos\theta + b)) &= c_1(a^2 + 2ab + b^2) + c_2(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &\quad - c_1(a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta + b^2) - c_2(a^3\cos^3\theta + 3a^2b\cos^2\theta + 3ab^2\cos\theta + b^3) \\ &= (c_1 + 3c_2b)a^2(1 - \cos^2\theta) + c_2a^3(1 - \cos^3\theta) + (2c_1b + 3c_2b^2)a(1 - \cos\theta) \end{aligned} \quad (1-5-28)$$

又

$$1 - \cos^3\theta = (1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta + \cos^2\theta) \quad (1-5-29)$$

将式(1-5-29)代入式(1-5-28), 得

$$\begin{aligned} 2(V(a+b) - V(a\cos\theta + b)) &= (c_1 + 3c_2b)a^2(1 - \cos^2\theta) \\ &\quad + (c_2a^2(1 + \cos\theta + \cos^2\theta) + 2c_1b + 3c_2b^2)a(1 - \cos\theta) \end{aligned} \quad (1-5-30)$$

由式(1-5-22)知

$$3c_2b^2 + 2c_1b + c_2a^2 = 0$$

据此, 式(1-5-30)可进而化为

$$\begin{aligned} 2(V(a+b) - V(a\cos\theta + b)) &= (c_1 + 3c_2b)a^2(1 - \cos^2\theta) + c_2a^2\cos\theta(1 + \cos\theta) \\ &\quad a(1 - \cos\theta) = (c_1 + 3c_2b + c_2a\cos\theta)a^2\sin^2\theta \end{aligned} \quad (1-5-31)$$

将式(1-5-31)代入式(1-3-8)第二式并注意到关于 $\dot{x}$ 符号的规定, 于是得

$$\dot{x} = -a\sin\theta \sqrt{c_1 + 3c_2b + c_2a\cos\theta} \quad (1-5-32)$$

将式(1-5-17)与式(1-5-32)重写如下:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta + b \\ \dot{x} = -a\sin\theta \sqrt{c_1 + 3c_2b + c_2a\cos\theta} \end{cases} \quad (1-5-33)$$

这就是与系统(1-5-12)相应的能量坐标变换公式, 其中 $b = b(a)$, 它的表达式当 $c_2 > 0$ (硬弹簧)时为式(1-5-26), 当 $c_2 < 0$ (软弹簧)时为式(1-5-27)。

需要说明的是, 式(1-5-33)中 a 与 b 均为能量 E 的函数, 即 $a = a(E)$, $b = b(E)$ 。但前面已指出, 在以后各章中, 无论是对周期解的定性分析还是定量计算, 都不需要 $a(E)$ 与 $b(E)$ 的具体表达式, 因此也就无需将它们求出。

§ 1-6 小 结

本章阐明了能量坐标系的建立方法, 并推导了相应的能量坐标变换公式。这里需要指出的是, 此处所建立的能量坐标系, 与通常所用的坐标系是不同的。通常所用的坐标系, 不论是直角坐标系还是曲线坐标系, 都是完全独立的, 与力学系统