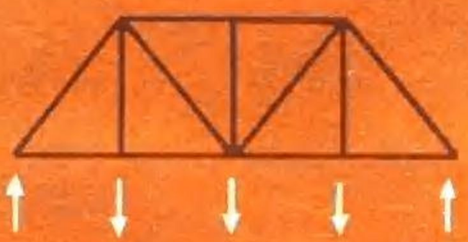
铁路勘测设计基础丛书

# 数学和力学基础知识



第三册

人民铁道出版社

## 内 容 简 介

本书按由浅入深、由易到难的原则，将数学和力学进行分段组合，使广大工农兵读者能尽快地、循序渐进地掌握数学和力学基础知识，解决结构设计计算中的具体问题。本书共分三册。本册的内容主要有平面解析几何，代数函数，对数函数和指数函数，三角函数和反三角函数，图解静力学，用数值积分法进行梁和压杆的计算，虚功和弹性位能，水力学。

本书可供土建专业工人自学用，亦可作为“七·二一”工人大学和技术短训班教学参考用。

**数学和力学基础知识**

铁道部 西南交通大学桥梁专业 / 大桥工程局第五工程处 编

人民铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/32　印张：12.375　字数：282千

1978年6月第1版　1978年6月第1次印刷

统一书号：15043·6114　定价：0.90元

# 目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 第二十一章　平面解析几何

平面解析几何学，就是在平面几何中引入坐标系统，将图形用方程表达，使一些为平面几何所不能研究的图形（例如，抛物线、椭圆和双曲线）能够分析的一门课程*。结合力学问题，今将不对称截面梁的法应力计算列在本章之四。此外，本章还在讲授方程的解在图形上的表现时（本章之十），将一元三次方程的求解方法（微分的一次近似计算法）列入，并将矩形截面钢筋混凝土压弯杆的强度验算作为其应用题。

## 一、直　　线

### （一）直线在直角坐标系的表达式

在平面几何学内有一条公理：两点决定一直线。稍加引伸，那就是：决定一直线，要有两个条件。这两个条件并不一定是两点，它也可以是一点和一个方向。

在直角坐标系内，一条直线可以用一个二元一次方程来表示，所用的二元则应是和所取的两根坐标轴对应的。将二元一次方程叫作线性方程，就是由于它所表示的是直线。这种方程常用下列形式表示：

$$y=f(x)=mx+b \qquad (21-1)$$

式中包括两个待决定的参数，$m$和$b$，它们就是所需的两个

---

*在几何学中引入坐标系，这是笛卡儿在十七世纪初首先提出的。就历史讲，解析几何早于微积分。某些更适宜于用微积分解决的问题，在解析几何中往往按自己的解法求解。本书先讲微积分，所以对这类问题的解法稍作改变。

条件。这方程的图形可用图21—1来示意。

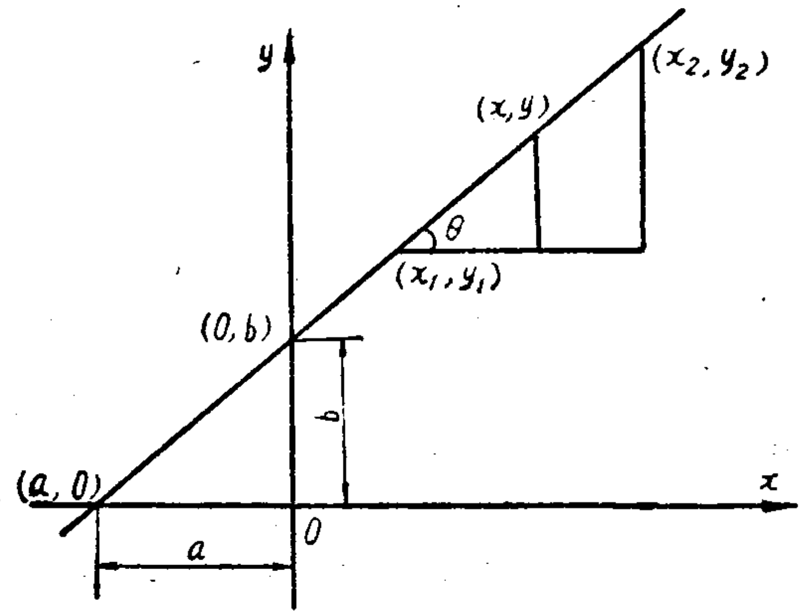



图21—1　二元一次方程的图形是直线

若将$x=0$代入式21—1，可得$y=b$，因此，$(0, b)$是它图线上的一点，且这点是在$y$轴上。今将它称为这图形在$y$轴上的截距。

再用式(8—7)和(8—8)对式(21—1)求导，得$y'=m$，即：这图形的斜率是$m$，它在这儿是一常数。

由于式(21—1)所明显表示出来的作直线的两条件是其截距$b$和斜率$m$，它这种形式常称为“截斜”式。

在不少情况，所遇的二元一次方程是下列式样：

$$Ax+By+C=0 \qquad \text{(A)}$$

式中的$A$、$B$、$C$分别代表三个不同的常数。这是不是表示：这儿需要三个条件才能决定它的图形呢？这并不需要，因为事实表明：为了描点制图，在假定若干个$x$，并为它们分别决定其对应的$y$时，$y$并不因对原方程乘或除某一常数而改变；因此，只要用$B$来除式（A），将$y$的系数化为1.0，式（A）也就只有两个条件（即$A/B$和$C/B$）了。按

式21—1的形式来改变式（A），它将是：

$$y=f(x)=-\frac{A}{B}\cdot x-\frac{C}{B} \qquad (21-1a)$$

这就指出式（A）所示图形的性质：它是斜率为$-A/B$，在$y$轴的截距为$-C/B$的一根直线。

在另一些情况，要求按所给条件来决定一条直线的方程。例如，从实验资料得到某两数量之间成对的对应值，经在直角坐标纸上描点，看到其关系呈直线状。现在，经在图纸上定出这直线的两个点，要求将这直线用方程来表达。今若用（$x_1$，$y_1$）和（$x_2$，$y_2$）表示所定的两点的坐标，参看图21—1，其斜率$m$当为：

$$m=\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (B)$$

这直线上的任意一点的坐标可用（$x,y$）表示，看图21—1，以（$x,y$）和（$x_1$，$y_1$）为准，当有：

$$m=\tan\theta=\frac{y-y_1}{x-x_1} \qquad (C)$$

合并式（B）和（C），这就得到

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad (D)$$

或 $$y=f(x)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x+\left(y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x_1\right) \qquad (21-1b)$$

这种形式叫“两点”式。

若式（D）的右侧是一业经决定的斜率$m$，则式（21—1b）将为：

$$y=f(x)=mx+(y_1-mx_1) \qquad (21-1c)$$

这叫“点斜”式，因为所给条件是一点（$x_1,y_1$）和一斜率$m$。

若式（D）内的已知两点是这直线在$x$轴和$y$轴上的两个截点，看图21—1，它们是$(a,0)$和$(0,b)$，于是，因为$x_1=a$，$y_1=0$和$x_2=0$，$y_2=b$，式(21—1b）将为(注意在字母$a$和$b$内是包括正负号的）：

$$y=\frac{b-0}{0-a}\cdot x+\left(0-\frac{b-0}{0-a}\cdot a\right)$$

$$=-\frac{b}{a}x+b$$

进行等式变形，它将变为：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (21-1d)$$

这种形式叫“截距”式。若将$y=0$代入，这式就给出$x=a$。若将$x=0$代入，这式就给出$y=b$。而$a$和$b$分别代表截距，这就是这式的特征。

**（二）二元一次方程组的解在图上的表现**

在图上，每一个二元一次方程就是一直线，线上各点都满足该方程所示的关系。由两个二元一次方程所形成的组，要求它的解能同时满足这两个方程。这个条件在图上的表现，是：两直线的交点就是所说的两个二元一次方程的解。

在用加减消元法来解二元一次方程组时，一般是用一常数乘其中一式，再和另式相加，借以达到消去一元的目的。例如，有下列的方程组：

$$\begin{cases}3x+2y-1=0 & \text{(G)}\\ x+2y+3=0 & \text{(H)}\end{cases}$$

今以常数$k$乘式（H），再和式（G）相加。若取$k=-3$，就可将$x$消去。若取$k=-1$，就可将$y$消去。一般地说，可以有这样的方程：

$$(3x+2y-1)+k(x+2y+3)=0 \qquad \text{(J)}$$

它就是：

$$(3+k)x+(2+2k)y+(-1+3k)=0 \qquad \text{(K)}$$

为了阐明二元一次方程组的解和式（K）在图上的意义，今在图21—2内将式(G)、(H)和(K)〔式(K)是按$k=-3$，$-1$和1分别作出〕所代表的直线以及它们的交点（2，$-2.5$)绘出。由图可见：由式(G)和(H)所产生的式(K)，它代表一族直线，这族直线都经过其共同的交点（2，$-2.5$)。在第一章讲等式变形时，曾阐明等式两侧同加一确定的数，等式所表达的内容不受影响。现在看到：一个方程和另一方程相加，那就得到一个新方程；新方程和原来两方程的关系，就是有共同的交点。

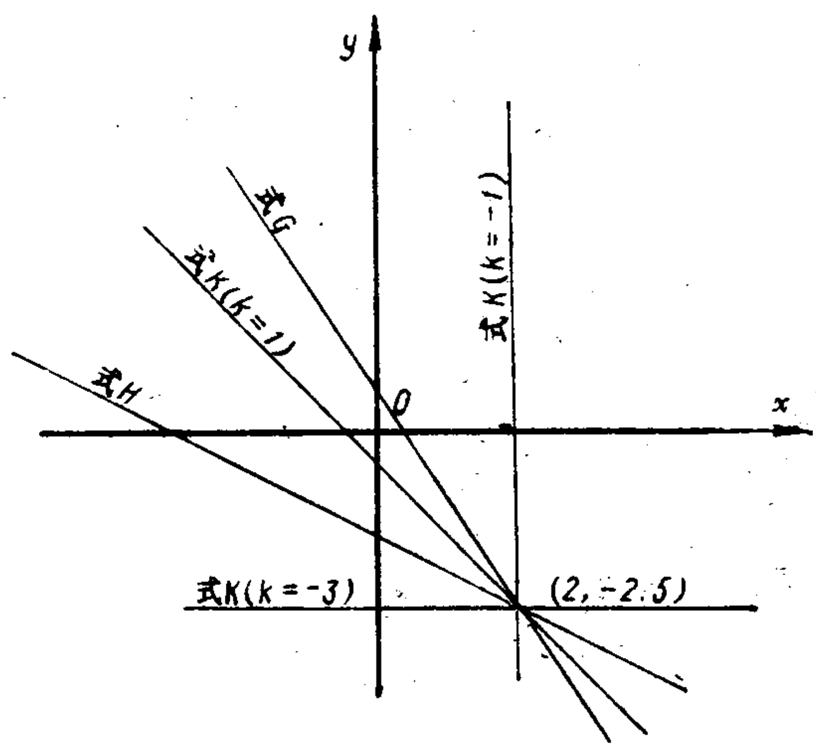



图21—2　二元一次方程组的求解

## 二、圆

圆的特点，就是从其图形上任意一点到圆心的距离是一常数，这常数也就是它的半径。在直角坐标系上，若圆心的坐标业经给定为（$x_1$，$y_1$），半径业经给定为$R$，就可用下法求它的方程。看图21—3，圆周上任意一点的坐标可用

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（$x$，$y$）表示。从点（$x$，$y$）到圆心（$x_1$,$y_1$）的距离应等于半径$R$。按勾股定理，可以从这两点的水平距离（是$x-x_1$）和竖向距离（是$y-y_1$）求它们连线的距离，并让它等于$R$。这就是：

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=R \qquad \text{(A)}$$

两侧都平方，得

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2 \qquad (21-2)$$

这就是：$x^2+y^2-2x_1x-2y_1y-(R^2-x_1^2-y_1^2)=0$ （B）

一般地说，具有下列形式的方程时常是圆：

$$x^2+y^2+Bx+Cy+D=0 \qquad (21-2a)$$

特点是：$x^2$和$y^2$的系数都是1.0，或者数值相同（包括正负号相同），没有$xy$这样的项。

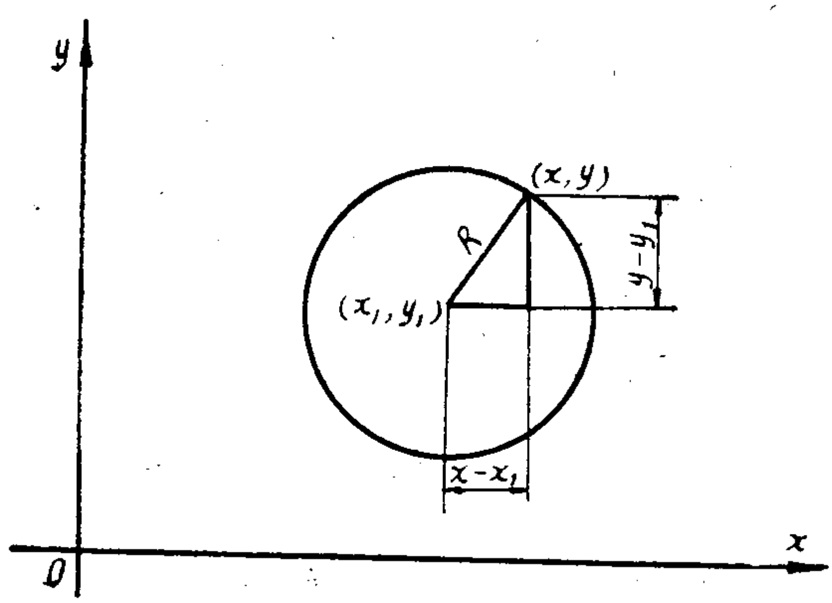



图21—3　圆

为了进一步判定式（21－2$a$）到底是不是圆，一般可比照式（B），将它的圆心位置和半径定出来。通过对比，可以知道式（21—2$a$）所示的圆的圆心坐标当为（$-B/2$，$-C/2$），而半径$R$则当为

$$R=\sqrt{-D+\left(\frac{B}{2}\right)^2+\left(\frac{C}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{B^2+C^2-4D} \tag{C}$$

若按式(C)算出的$R$是一实数，就可肯定式21—2$a$是圆。

若式（C）根号内是负号，$R$就不是实数，式（21—2$a$）在所取的直角坐标系内就没有图形。当式（21—2$a$）的图形是圆时，其方程可以通过坐标变换写作式（21—2$b$）〔见本章之三（一）〕。

## 三、直角坐标变换

几何图形性质不因所取坐标位置的改变而变。但表示图形的方程却因坐标系统的改变而有很大变化。为了研究图形性质，往往需要用坐标变换的方法使方程简化。

### （一）平移变换

看图21—4，原坐标的原点在$O$，新坐标的原点在$O_1$。对于原坐标系统讲，$O_1$的坐标是（$h$，$k$）。若新坐标的两轴和原坐标的两轴互相平行，即$O_1x_1 /\!/ Ox$，$O_1y_1 /\!/ Oy$，则这样的坐标变换叫平移变换。

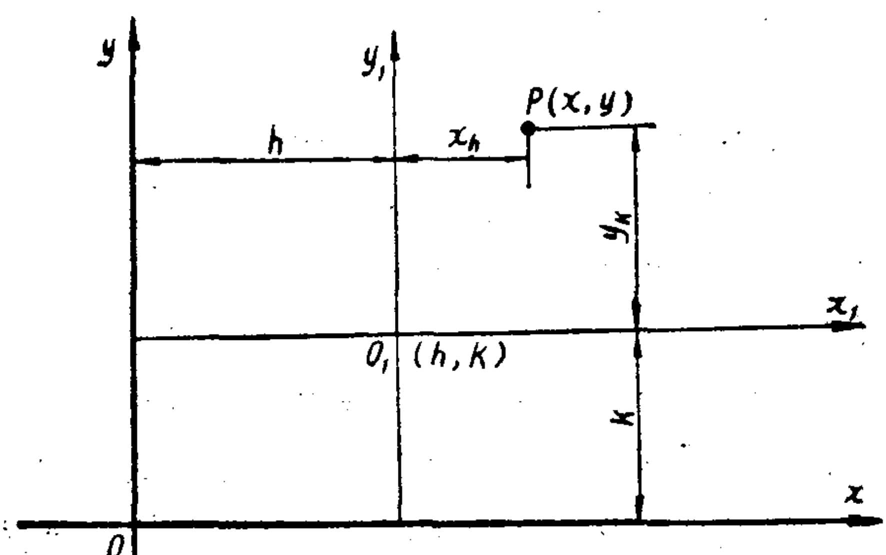



图21—4　坐标的移动变换

若点$P$是图形上的一点，对原坐标系统讲，它的坐标是（$x$，$y$）；对于新坐标系统讲，它的坐标现用（$x_h$，$y_k$）表示。从图上可以看出：

$$\left.\begin{aligned} x &= x_h + h \\ y &= y_k + k \end{aligned}\right\} \qquad (21-3)$$

如果将这一对式子代到某图形用原坐标系表示的方程中去，原方程就变成该图形按新坐标系表示的方程。若使$h$和$k$的值按一定的规律来选择，方程就可简化。例如，某图形的原方程是：

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 75 = 0 \qquad (A)$$

今将式（21—3）代入，得：

$$(x_h + h)^2 + (y_k + k)^2 + 6(x_h + h) - 8(y_k + k) - 75 = 0$$

展开，得：

$$x_h^2 + y_k^2 + (2h + 6)x_h + (2k - 8)y_k + (h^2 + k^2 + 6h - 8k - 75) = 0 \qquad (B)$$

使其含$x_h$和$y_k$的项的系数为零，得$h = -3$，$k = 4$。将这一对坐标所决定的（－3，4）取作新坐标原点，按式（21—3）代入式（B），得：

$$x_h^2 + y_k^2 - 100 = 0$$

将脚注$h$和$k$取消，按新坐标系表达的方程就是

$$x^2 + y^2 - 100 = 0 \qquad (C)$$

这就容易看到：这图形是圆，半径是$\sqrt{100} = 10$；图21—5是其图形。

这儿介绍的坐标平移变换方法适用于各种图形，下文将提供不少例证。而在所遇图形是式（A）这样的圆时，也可用本章之二内所讲的方法，按$B = +6$和$C = -8$决定圆心坐标$-B/2 = -3$，$-C/2 = 4$，以及半径$R$：

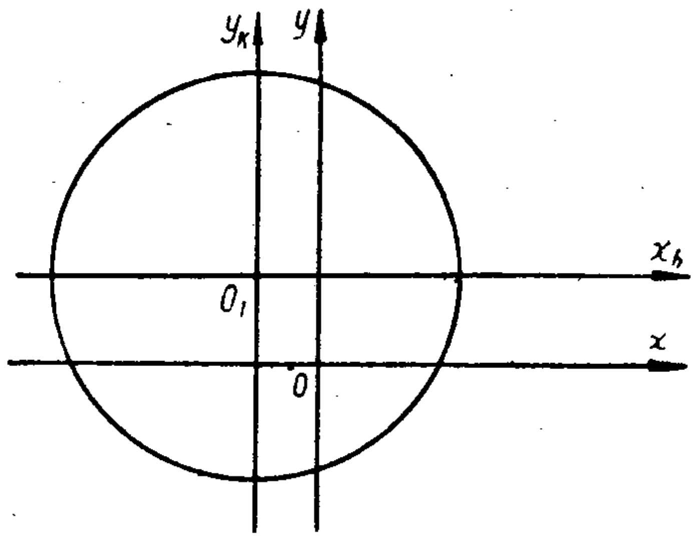



图21—5　圆的坐标平移举例

$$R=\sqrt{75+\left(\frac{6}{2}\right)^{2}+\left(\frac{-8}{2}\right)^{2}}=10$$

这式中的75是式（A）中的$D$的负值〔按二内的式（C）〕。

一般地讲，式（21—2$a$）的方程在将坐标原点平移到（$-B/2$，$-C/2$）之后，其方程将如下式所示（脚注$h$及$k$已弃去）：

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (21—2b)$$

只要$R^2$是正数，式（21—2$b$）在直角坐标系内就是一圆，且其半径是$R$。

**（二）转动变换**

看图21—6，$Ox$和$Oy$是原直角坐标系的两轴，$Ox_\theta$和$Oy_\theta$是新直角坐标系的两轴。它们的原点都是$O$，但新坐标系绕点$O$按逆时针方向转了一个角度，其值是$\theta$，如图所示。

若点$P$是某图形上的一点，对于原坐标系讲，其坐标是（$x$，$y$），而$x$和$y$所代表的线段当如图中$OA$和$AP$所示（点$A$是点$P$在$x$轴投影），对于新坐标系讲，点$P$的坐标是（$x_\theta$，$y_\theta$），而$x_\theta$和$y_\theta$所代表的线段当如图中$OC$和

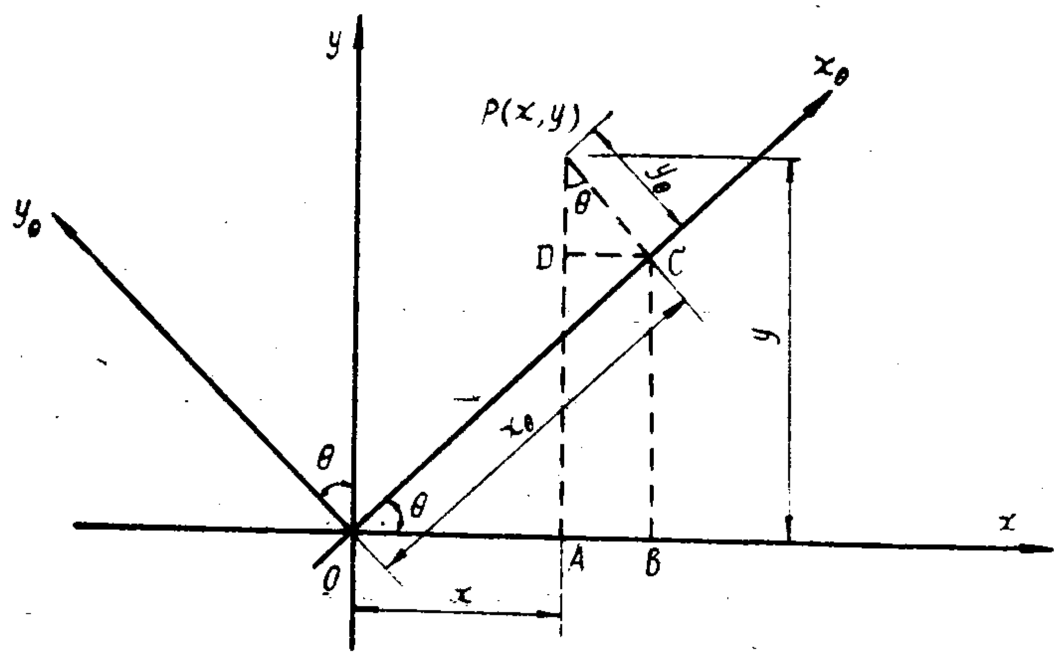



图21－6　坐标转动变换

$CP$所示（点$C$是点$P$在$x_\theta$轴投影）。现在，作$CD\perp AP$，$CB\perp Ox$。从图上可以得到下列关系：

$$\left.\begin{aligned} x&=\overline{OB}-\overline{DC}=x_\theta\cos\theta-y_\theta\sin\theta \\ y&=\overline{BC}+\overline{DP}=x_\theta\sin\theta+y_\theta\cos\theta \end{aligned}\right\}\quad (21-4)$$

在上式推导中曾引用$\angle CPD=\angle COB=\theta$（因为这两个角的两边互相垂直）。

如果将这一对式子代到某图形用原坐标系表示的方程中去，原方程就变成该图形按新坐标系表示的方程。

**（三）用转动变换消去二次方程中的xy项**

二次方程的一般形式可用下式表示：

$$A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \qquad \text{(D)}$$

利用平移变换，决定适当的（$h$，$k$），可将其$x$和$y$项消去。于是，它将具有下列式样：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+F=0 \qquad \text{(E)}$$

这时，可利用转动变换，将$xy$项消去。这就需要将式（21—4）代入式（E），得：

$$A(x_\theta\cos\theta-y_\theta\sin\theta)^2+B(x_\theta\cos\theta-y_\theta\sin\theta)(x_\theta\sin\theta+y_\theta\cos\theta)+C(x_\theta\sin\theta+y_\theta\cos\theta)^2+F=0$$

将乘式展开，得

$$\left.\begin{array}{l}A\cos^2\theta\\+B\sin\theta\cos\theta\\+C\sin^2\theta\end{array}\right|x_\theta^2\quad\left.\begin{array}{l}-2A\sin\theta\cos\theta\\+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\+2C\sin\theta\cos\theta\end{array}\right|x_\theta y_\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}+A\sin^2\theta\\-B\sin\theta\cos\theta\\+C\cos^2\theta\end{array}\right|y_\theta^2\quad+F=0 \tag{F}$$

这式中的竖线代表括号；这样写的目的在于用其第1、2、3横行分别表示前式第1、2、3项的展开，便于核对。

使$x_\theta y_\theta$的系数是零，得：

$$-2A\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta=0,$$

即：$$-A\sin2\theta+B\cos2\theta+C\sin2\theta=0$$

由此得：$$\tan2\theta=\frac{B}{A-C} \tag{21—5}$$

采用这样决定的$\theta$进行转动变换，含$x_\theta y_\theta$项的系数就是零。再将其脚注$\theta$取消，就得到一个没有$xy$项的方程。

当$A$、$B$、$C$是具体数值时，为决定式（F）内的$x_\theta^2$和$y_\theta^2$的系数所需的$\sin\theta$和$\cos\theta$常用以下各式来算：

$$\cot2\theta=\frac{1}{\tan2\theta}=\frac{A-C}{B}$$

$$\cos2\theta=\frac{\cot2\theta}{(1+\cot^22\theta)^{1/2}}=\frac{A-C}{[B^2+(A-C)^2]^{1/2}}$$

$$\sin\theta=\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^{1/2}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com