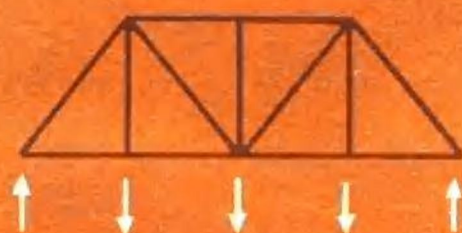


铁路勘测设计基础丛书

数学和力学基础知识



第三册

人民铁道出版社

内 容 简 介

本书按由浅入深、由易到难的原则,将数学和力学进行分段组合,使广大工农兵读者能尽快地、循序渐近地掌握数学和力学基础知识,解决结构设计计算中的具体问题。本书共分三册。本册的内容主要有平面解析几何,代数函数,对数函数和指数函数,三角函数和反三角函数,图解静力学,用数值积分法进行梁和压杆的计算,虚功和弹性位能,水力学。

本书可供土建专业工人自学用,亦可作为“七·二一”工人大学和技术短训班教学参考用。

数学和力学基础知识

西南交通大学桥梁专业
铁道部 大桥工程局第五工程处 编

人民铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092 1/32 印张: 12.375 字数: 282千

1978年6月第1版 1978年6月第1次印刷

统一书号: 15043·6114 定价: 0.90元

目 录

第二十一章 平面解析几何	1
一、直线.....	1
二、圆.....	5
三、直角坐标变换.....	7
四、不对称截面梁的法应力计算.....	13
五、极坐标系及其与直角坐标系的关系.....	22
六、二次抛物线.....	25
七、椭圆.....	29
八、双曲线.....	37
九、参数方程.....	44
十、整式方程的图形和解（包括矩形截面钢筋 混凝土压弯杆应力分析应用题）.....	49
第二十二章 代数函数	58
一、幂的运算规律——指数律.....	58
二、二项式定理.....	63
三、幂函数的微积分.....	68
四、关于极限的概念和有关的运算.....	72
五、函数的积和商的求导.....	75
六、复合函数的微积分（包括高速锤、刚性基 础弹性抗力等应用题）.....	79
七、二项式定理是泰勒级数的一个特例.....	87
八、隐函数、互反函数和参数函数.....	90
九、关于分式（包括整式相除）.....	94

十、关于根式	100
十一、承受水平匀布荷载的缆索	102
十二、简易缆索吊机	108
第二十三章 对数函数和指数函数	115
一、对数，对数运算规律，常用对数	115
二、对数函数和指数函数的微积分运算	124
三、应用题——皮带轮，活载对桥台的土压力，空气冷却，电阻电容电路，气体恒温膨胀	129
四、用级数求以 e 为底的幂和对数	136
五、函数近似值	139
六、对数求导法	147
七、用幂函数和指数函数所表示的经验公式	148
第二十四章 三角函数和反三角函数	151
一、三角函数及其图形	151
二、三角函数的求导	154
三、三角函数的求积	159
四、积分应用题——飞轮轮缘应力，面积，形心，旋转体，惯矩	161
五、钢筋混凝土实心及空心圆形杆件在压弯作用下的应力	172
六、正弦交流电路	182
七、简谐运动	200
八、反三角函数	206
九、分部积分	208
十、曲率及其应用——吊钩法应力，缓和曲线	210
十一、编制三角函数表所用的级数	217

第二十五章 图解静力学	219
一、共面力的合成	219
二、平行力的合成和平行四边形定律	222
三、梁的反力、弯矩图和剪力图	223
四、推力线	227
五、桁架的杆力	232
六、钢筋混凝土梁的斜筋布置	235
第二十六章 用数值积分法进行梁和压杆的计算	246
一、原理及算式	246
二、中活载使路堤填土对桥台所生侧压力的 计算	254
三、简支梁的挠度	258
四、压杆的弹性压屈荷载	263
五、初曲矢度扩大系数的数值计算	274
第二十七章 虚功和弹性位能	276
一、虚功原理概说	276
二、用虚功原理作静定梁和桁架的影响线	279
三、用虚功原理计算实位移	296
四、弹性位能	309
五、功的互等和位移的互等	314
六、简支梁跨中挠度的近似解	319
七、用弹性位能法求理想直杆压屈荷载	323
八、压弯杆的挠度扩大系数	327
九、缀条和缀板式压杆压屈荷载	332
十、第四强度理论	336
十一、撞击性荷载	341
第二十八章 水力学	344
一、静水压力概说	344

二、浮力、浮体稳定和土壤浮重	346
三、稳定流的连续方程和能量方程	357
四、管道的计算	365
五、明渠均匀流的计算	371
六、小桥孔径的决定和验算	375
七、涵洞水力计算概说	382
八、将贮水池排空所需时间	383
九、基坑涌水量	386

第二十一章 平面解析几何

平面解析几何学，就是在平面几何中引入坐标系，将图形用方程表达，使一些为平面几何所不能研究的图形（例如，抛物线、椭圆和双曲线）能够分析的一门课程*。结合力学问题，今将不对称截面梁的法应力计算列在本章之四。此外，本章还在讲授方程的解在图形上的表现时（本章之十），将一元三次方程的求解方法（微分的一次近似算法）列入，并将矩形截面钢筋混凝土压弯杆的强度验算作为其应用题。

一、直 线

（一）直线在直角坐标系的表达式

在平面几何学内有一条公理：两点决定一直线。稍加引伸，那就是：决定一直线，要有两个条件。这两个条件并不一定是两点，它也可以是一点和一个方向。

在直角坐标系内，一条直线可以用一个二元一次方程来表示，所用的二元则应是和所取的两根坐标轴对应的。将二元一次方程叫作线性方程，就是由于它所表示的是直线。这种方程常用下列形式表示：

$$y = f(x) = mx + b \quad (21-1)$$

式中包括两个待决定的参数， m 和 b ，它们就是所需的两个

*在几何学中引入坐标系，这是笛卡儿在十七世纪初首先提出的。就历史讲，解析几何早于微积分。某些更适宜于用微积分解决的问题，在解析几何中往往按自己的解法求解。本书先讲微积分，所以对这类问题的解法稍作改变。

条件。这方程的图形可用图21—1来示意。

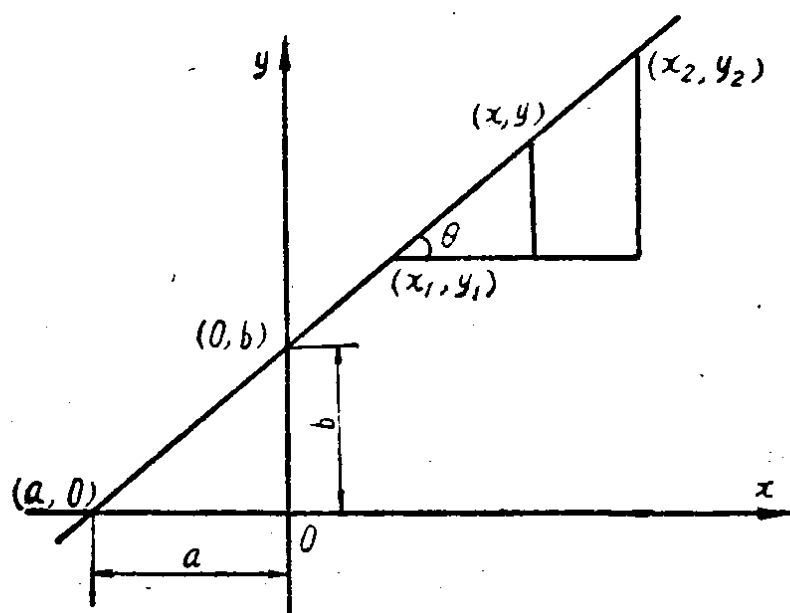


图21—1 二元一次方程的图形是直线

若将 $x=0$ 代入式21—1，可得 $y=b$ ，因此， $(0, b)$ 是它图线上的一点，且这点是在 y 轴上。今将它称为这图形在 y 轴上的截距。

再用式(8—7)和(8—8)对式(21—1)求导，得 $y' = m$ ，即：这图形的斜率是 m ，它在这儿是一常数。

由于式(21—1)所明显表示出来的作直线的两条件是其截距 b 和斜率 m ，它这种形式常称为“截斜”式。

在不少情况，所遇的二元一次方程是下列式样：

$$Ax + By + C = 0 \quad (A)$$

式中的 A 、 B 、 C 分别代表三个不同的常数。这是不是表示：这儿需要三个条件才能决定它的图形呢？这并不需要，因为事实表明：为了描点制图，在假定若干个 x ，并为它们分别决定其对应的 y 时， y 并不因对原方程乘或除某一常数而改变；因此，只要用 B 来除式(A)，将 y 的系数化为1.0，式(A)也就只有两个条件（即 A/B 和 C/B ）了。按

式21—1的形式来改变式(A),它将是:

$$y = f(x) = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B} \quad (21-1a)$$

这就指出式(A)所示图形的性质:它是斜率为 $-A/B$;在 y 轴的截距为 $-C/B$ 的一根直线。

在另一些情况,要求按所给条件来决定一条直线的方程。例如,从实验资料得到某两数量之间成对的对应值,经在直角坐标纸上描点,看到其关系呈直线状。现在,经在图纸上定出这直线的两个点,要求将这直线用方程来表达。今若用 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 表示所定的两点的坐标,参看图21—1,其斜率 m 当为:

$$m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (B)$$

这直线上的任意一点的坐标可用 (x, y) 表示,看图21—1,以 (x, y) 和 (x_1, y_1) 为准,当有:

$$m = \tan \theta = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad (C)$$

合并式(B)和(C),这就得到

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (D)$$

$$\text{或} \quad y = f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \right) \quad (21-1b)$$

这种形式叫“两点”式。

若式(D)的右侧是一业经决定的斜率 m ,则式(21—1b)将为:

$$y = f(x) = mx + (y_1 - mx_1) \quad (21-1c)$$

这叫“点斜”式,因为所给条件是一点 (x_1, y_1) 和一斜率 m 。

若式 (D) 内的已知两点是这直线在 x 轴和 y 轴上的两个截点, 看图 21-1, 它们是 $(a, 0)$ 和 $(0, b)$, 于是, 因为 $x_1 = a, y_1 = 0$ 和 $x_2 = 0, y_2 = b$, 式 (21-1b) 将为 (注意在字母 a 和 b 内是包括正负号的):

$$y = \frac{b-0}{0-a} \cdot x + \left(0 - \frac{b-0}{0-a} \cdot a \right) \\ = -\frac{b}{a}x + b$$

进行等式变形, 它将变为:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (21-1d)$$

这种形式叫“截距”式。若将 $y=0$ 代入, 这式就给出 $x=a$ 。若将 $x=0$ 代入, 这式就给出 $y=b$ 。而 a 和 b 分别代表截距, 这就是这式的特征。

(二) 二元一次方程组的解在图上的表现

在图上, 每一个二元一次方程就是一直线, 线上各点都满足该方程所示的关系。由两个二元一次方程所形成的组, 要求它的解能同时满足这两个方程。这个条件在图上的表现, 是: 两直线的交点就是所说的两个二元一次方程的解。

在用加减消元法来解二元一次方程组时, 一般是用一常数乘其中一式, 再和另式相加, 借以达到消去一元的目的。例如, 有下列的方程组:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 & (G) \\ x + 2y + 3 = 0 & (H) \end{cases}$$

今以常数 k 乘式 (H), 再和式 (G) 相加。若取 $k = -3$, 就可将 x 消去。若取 $k = -1$, 就可将 y 消去。一般地说, 可以有这样的方程:

$$\begin{aligned} \text{它就是: } & (3x + 2y - 1) + k(x + 2y + 3) = 0 & (J) \\ & (3+k)x + (2+2k)y + (-1+3k) = 0 & (K) \end{aligned}$$

为了阐明二元一次方程组的解和式(K)在图上的意义,今在图21-2内将式(G)、(H)和(K)[式(K)是按 $k = -3, -1$ 和 1 分别作出]所代表的直线以及它们的交点 $(2, -2.5)$ 绘出。由图可见:由式(G)和(H)所产生的式(K);它代表一族直线,这族直线都经过其共同的交点 $(2, -2.5)$ 。在第一章讲等式变形时,曾阐明等式两侧同加一确定的数,等式所表达的内容不受影响。现在看到:一个方程和另一方程相加,那就得到一个新方程;新方程和原来两方程的关系,就是有共同的交点。

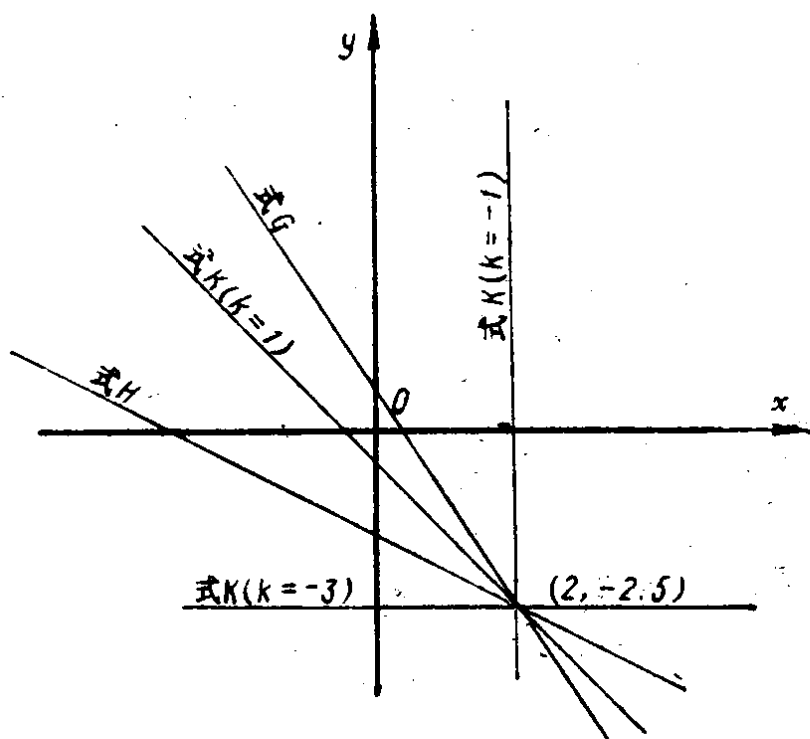


图21-2 二元一次方程组的求解

二、圆

圆的特点,就是从其图形上任意一点到圆心的距离是一常数,这常数也就是它的半径。在直角坐标系上,若圆心的坐标业经给定为 (x_1, y_1) ,半径业经给定为 R ,就可用下法求它的方程。看图21-3,圆周上任意一点的坐标可用

(x, y) 表示。从点 (x, y) 到圆心 (x_1, y_1) 的距离应等于半径 R 。按勾股定理，可以从这两点的水平距离（是 $x - x_1$ ）和竖向距离（是 $y - y_1$ ）求它们连线的距离，并让它等于 R 。这就是：

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = R \quad (\text{A})$$

两侧都平方，得

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2 \quad (21-2)$$

这就是： $x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y - (R^2 - x_1^2 - y_1^2) = 0$ (B)

一般地说，具有下列形式的方程时常是圆：

$$x^2 + y^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad (21-2a)$$

特点是： x^2 和 y^2 的系数都是 1.0，或者数值相同（包括正负号相同），没有 xy 这样的项。

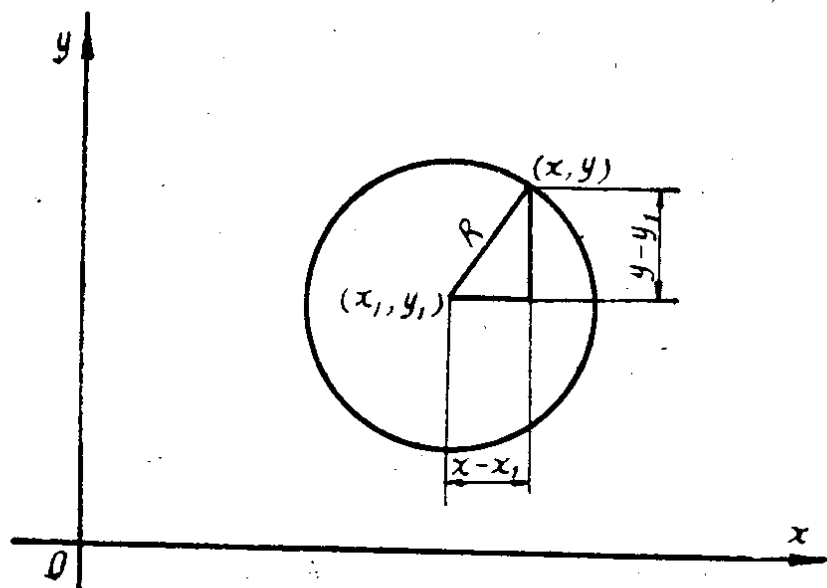


图21-3 圆

为了进一步判定式 $(21-2a)$ 到底是不是圆，一般可比照式 (B)，将它的圆心位置和半径定出来。通过对比，可以知道式 $(21-2a)$ 所示的圆的圆心坐标当为 $(-B/2, -C/2)$ ，而半径 R 则当为

$$R = \sqrt{-D + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{B^2 + C^2 - 4D} \quad (C)$$

若按式(C)算出的 R 是一实数,就可肯定式21—2a是圆。

若式(C)根号内是负号, R 就不是实数,式(21—2a)在所取的直角坐标系内就没有图形。当式(21—2a)的图形是圆时,其方程可以通过坐标变换写作式(21—2b)〔见本章之三(一)〕。

三、直角坐标变换

几何图形性质不因所取坐标位置的改变而变。但表示图形的方程却因坐标系统的改变而有很大变化。为了研究图形性质,往往需要用坐标变换的方法使方程简化。

(一) 平移变换

看图21—4,原坐标的原点在 O ,新坐标的原点在 O_1 。对于原坐标系讲, O_1 的坐标是 (h, k) 。若新坐标的两轴和原坐标的两轴互相平行,即 $O_1x_1 \parallel Ox, O_1y_1 \parallel Oy$,则这样的坐标变换叫平移变换。

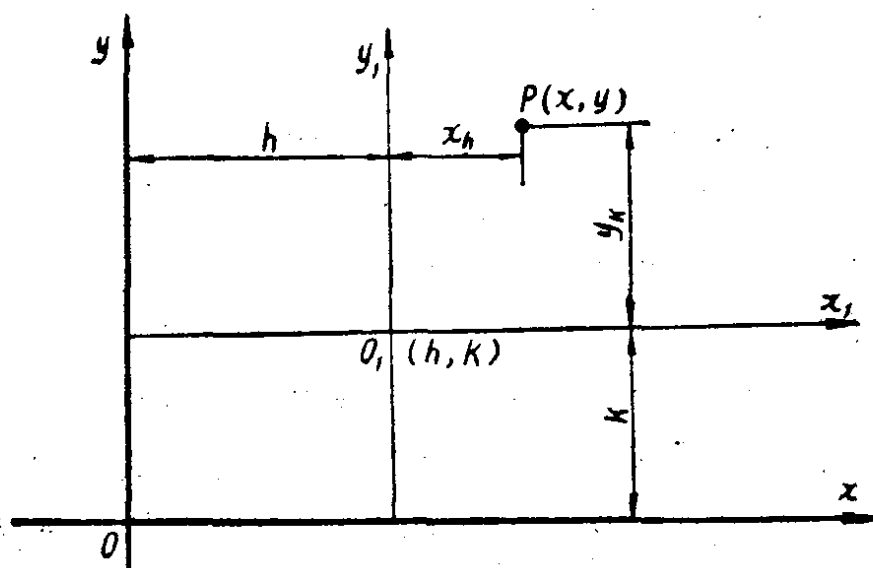


图21—4 坐标的移动变换

若点 P 是图形上的一点，对原坐标系讲，它的坐标是 (x, y) ；对于新坐标系讲，它的坐标现用 (x_h, y_h) 表示。从图上可以看出：

$$\left. \begin{aligned} x &= x_h + h \\ y &= y_h + k \end{aligned} \right\} \quad (21-3)$$

如果将这一对式子代到某图形用原坐标系表示的方程中去，原方程就变成该图形按新坐标系表示的方程。若使 h 和 k 的值按一定的规律来选择，方程就可简化。例如，某图形的原方程是：

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 75 = 0 \quad (A)$$

今将式 (21-3) 代入，得：

$$\begin{aligned} (x_h + h)^2 + (y_h + k)^2 + 6(x_h + h) \\ - 8(y_h + k) - 75 = 0 \end{aligned}$$

展开，得：

$$\begin{aligned} x_h^2 + y_h^2 + (2h + 6)x_h + (2k - 8)y_h \\ + (h^2 + k^2 + 6h - 8k - 75) = 0 \end{aligned} \quad (B)$$

使其含 x_h 和 y_h 的项的系数为零，得 $h = -3$ ， $k = 4$ 。将这一对坐标所决定的 $(-3, 4)$ 取作新坐标原点，按式 (21-3) 代入式 (B)，得：

$$x_h^2 + y_h^2 - 100 = 0$$

将脚注 h 和 k 取消，按新坐标系表达的方程就是

$$x^2 + y^2 - 100 = 0 \quad (C)$$

这就容易看到：这图形是圆，半径是 $\sqrt{100} = 10$ ，图21-5是其图形。

这儿介绍的坐标平移变换方法适用于各种图形，下文将提供不少例证。而在所遇图形是式 (A) 这样的圆时，也可用本章之二内所讲的方法，按 $B = +6$ 和 $C = -8$ 决定圆心坐标 $-B/2 = -3$ ， $-C/2 = 4$ ，以及半径 R ；

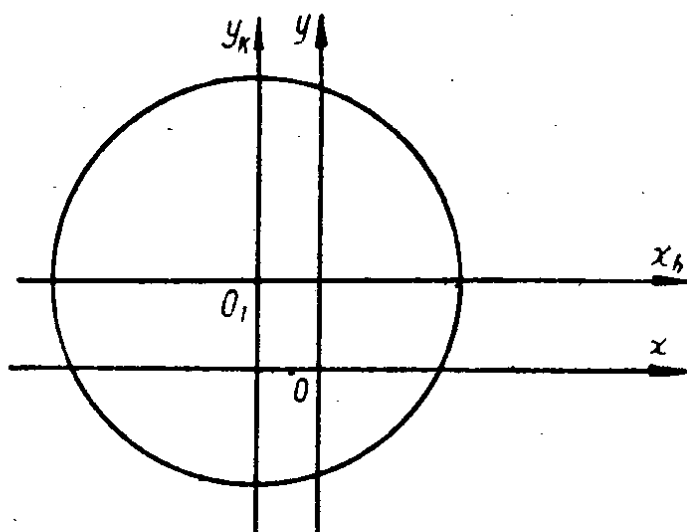


图21—5 圆的坐标平移举例

$$R = \sqrt{75 + \left(-\frac{6}{2}\right)^2 + \left(-\frac{8}{2}\right)^2} = 10$$

这式中的75是式(A)中的D的负值〔按二内的式(C)〕。

一般地讲，式(21—2a)的方程在将坐标原点平移到 $(-B/2, -C/2)$ 之后，其方程将如下式所示(脚注h及k已弃去)：

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (21-2b)$$

只要 R^2 是正数，式(21—2b)在直角坐标系内就是一圆，且其半径是R。

(二) 转动变换

看图21—6， Ox 和 Oy 是原直角坐标系的两轴， Ox_0 和 Oy_0 是新直角坐标系的两轴。它们的原点都是O，但新坐标系绕点O按逆时针方向转了一个角度，其值是 θ ，如图所示。

若点P是某图形上的一点，对于原坐标系讲，其坐标是 (x, y) ，而x和y所代表的线段当如图中OA和AP所示(点A是点P在x轴投影)，对于新坐标系讲，点P的坐标是 (x_0, y_0) ，而 x_0 和 y_0 所代表的线段当如图中OC和

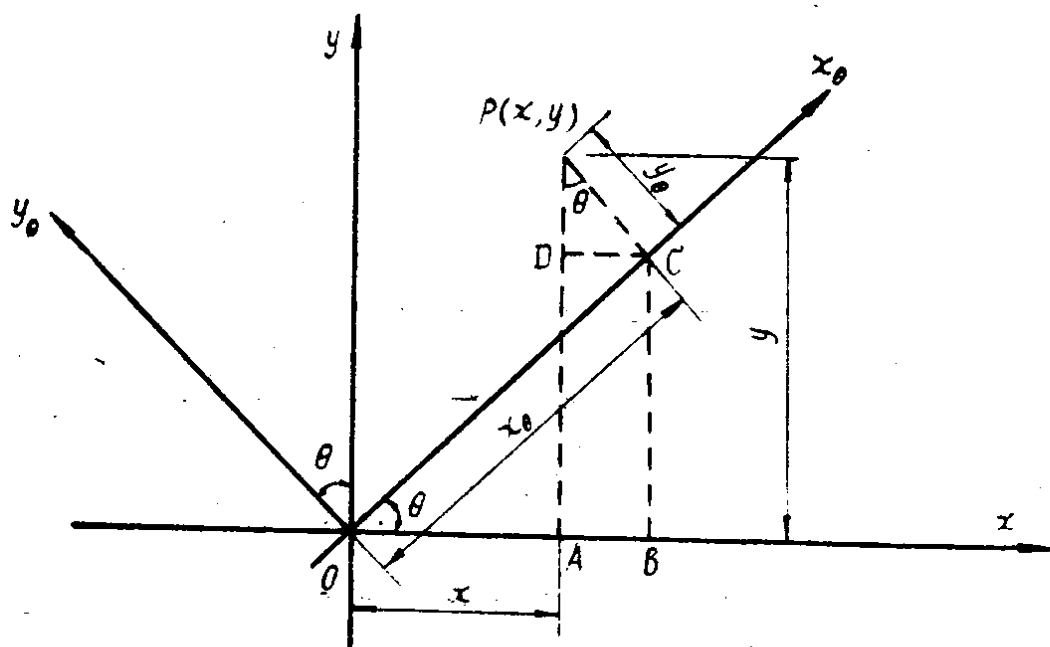


图21-6 坐标转动变换

CP 所示（点 C 是点 P 在 x_0 轴投影）。现在，作 $CD \perp AP$ ， $CB \perp Ox$ 。从图上可以得到下列关系：

$$\left. \begin{aligned} x &= \overline{OB} - \overline{DC} = x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta \\ y &= \overline{BC} + \overline{DP} = x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (21-4)$$

在上式推导中曾引用 $\angle CPD = \angle COB = \theta$ （因为这两个角的两边互相垂直）。

如果将这一对式子代到某图形用原坐标系表示的方程中去，原方程就变成该图形按新坐标系表示的方程。

（三）用转动变换消去二次方程中的 xy 项

二次方程的一般形式可用下式表示：

$$A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \quad (D)$$

利用平移变换，决定适当的 (h, k) ，可将其 x 和 y 项消去。于是，它将具有下列式样：

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0 \quad (E)$$

这时，可利用转动变换，将 xy 项消去。这就需要将式(21-4)代入式(E)，得：

$$A(x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta)^2 + B(x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta)(x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta) + C(x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta)^2 + F = 0$$

将乘式展开，得

$$\begin{array}{l|l} A \cos^2 \theta & x_0^2 \\ + B \sin \theta \cos \theta & -2A \sin \theta \cos \theta \\ + C \sin^2 \theta & + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ + A \sin^2 \theta & y_0^2 \\ - B \sin \theta \cos \theta & + 2C \sin \theta \cos \theta \\ + C \cos^2 \theta & + F = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_0 y_0 \\ \\ \\ \end{array} \quad (F)$$

这式中的竖线代表括号，这样写的目的在于用其第 1、2、3 横行分别表示前式第 1、2、3 项的展开，便于核对。

使 x_0, y_0 的系数是零，得：

$$\begin{aligned} -2A \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta &= 0, \\ \text{即：} \quad -A \sin 2\theta + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{由此得：} \quad \tan 2\theta = \frac{B}{A - C} \quad (21-5)$$

采用这样决定的 θ 进行转动变换，含 x_0, y_0 项的系数就是零。再将其脚注 θ 取消，就得到一个没有 xy 项的方程。

当 A, B, C 是具体数值时，为决定式 (F) 内的 x_0^2 和 y_0^2 的系数所需的 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 常用以下各式来算：

$$\begin{aligned} \cot 2\theta &= \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{A - C}{B} \\ \cos 2\theta &= \frac{\cot 2\theta}{(1 + \cot^2 2\theta)^{1/2}} \\ &= \frac{A - C}{[B^2 + (A - C)^2]^{1/2}} \\ \sin \theta &= \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$