

數學物理方法

柯朗 著
希伯特

I

I

科学出版社

數學物理方法

卷 I

R. 柯朗 著
D. 希伯爾特
錢敏 譯
郭敦 仁

科學出版社

1958

R. COURANT and D. HILBERT
METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS
VOL. I
1953

內 容 簡 介

本書係一經典性名著。

本書系統地提供了為解決重要物理問題所需的基本數學方法；分上下兩卷。上卷內容包括：綫性代數與二次型、任意函數的級數展開、綫性積分方程、變分法、振動和本徵值問題、變分法在本徵值問題上的應用以及本徵值問題所定義的特殊函數。

本書可以作為高等學校“數學物理”課程的教本；對一切理論物理學工作者，它也是一本有用的參考書。

數 學 物 理 方 法

著 者 R. 柯 朗 D. 希 伯 爾 特

譯 者 錢 敏 郭 敦 仁

出版者 科 學 出 版 社

北 京 朝 陽 門 大 街 117 號
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

印刷者 科 學 出 版 社 上 海 印 刷 廠

總經售 新 華 書 店

1958年11月第一版

書號：1429

1958年11月第一次印刷

字數：489,000

(通) 開精：1—821

開本：787×1092 1/18

報平：1—1,645

印張：25 2/9 插頁：2

定價：(10) 報紙精裝本 4.50 元
報紙平裝本 3.90 元

中譯本前言

柯朗-希伯爾特所著“數學物理方法”一書，德文第二版發行於1930年，1953年出版了英文本。在內容上，英文本有些增加，因此譯文大體以英文本為基礎。可是無論在措辭或字句的含義上，英文本都出了不少錯誤，因此在翻譯過程中，譯者不得不經常參照德文本，加以改正。第一章翻譯時，英文本尚未出版，所以翻譯以德文本為根據，後來又參照英文本修改過。

譯 者

英文版原序摘譯

本書第一卷德文第一版於1924年在柏林出版，第二版於1930年出版，第二卷於1938年出版。這本英文版是依據德文本寫成的，但有大部分增加和修改。

本書對於數學家和物理學家有同樣的用處。本書目的還是如同第一次德文版序言中所寫的：“從十七世紀以來，物理的直觀，對於數學問題和方法是富有生命力的根源。然而近年來的趨向和時尚，已將數學與物理學間的聯系減弱了；數學家離開了數學的直觀根源，而集中在推理精緻和着重於數學的公設方面，甚至有時忽視數學與物理學以及其他科學領域的整體性。在許多情況下，物理學家也不再體會數學家的觀點。這種分裂，無疑地對於整個科學是一個嚴重的威脅；科學發展的宏流，可能逐漸分裂成為細小而又細小的溪渠，以至乾涸。因此，有必要引導我們的努力轉向於將許多有特點的和各式各樣的科學事實的共同點及其相互關聯加以闡明，以重新統一這種分離的趨向。只有這樣，才可以使學者們掌握這些材料，從而為研究工作更進一步的有機發展準備下基礎。

“本書就是針對這個目的為供學習數學物理而作的。本書發展了起源於物理問題的數學方法，並試圖使這些結果納入統一的數學理論。作者並未企圖做得完備，只是希望本書可以便利於讀者接近一個豐富而重要的領域。

“本書的責任由我個人擔負。可是，本書加上我的老師、同事和朋友 D. 希伯爾特的名字，這是正當的，蓋因從希伯爾特的一些論文和講義中採取了許多材料，並且希望本書表現一些希伯爾特的精神，這種精神在數學研究和教學上具有決定性的影響。”

R. 柯 朗

1953年6月於紐約

目 錄

中譯本前言	iii
英文版原序摘譯	iv

第一章 綫性代數和二次型

§1. 綫性方程和綫性變換	1
1. 矢量	1
2. 正交矢量組, 完備性	3
3. 綫性變換, 矩陣	4
4. 雙綫型、二次型和赫米特型	9
5. 正交變換和複正交變換	11
§2. 含綫性參數的綫性變換	13
§3. 二次型和赫米特型的主軸變換	18
1. 根據極大值原理作主軸變換	18
2. 本徵值	20
3. 推廣於赫米特型	22
4. 二次型的惰性定理	22
5. 二次型的預解式的表示	22
6. 與二次型相聯屬的綫性方程組的解	23
§4. 本徵值的極小-極大性	25
1. 用一極小-極大問題表徵本徵值	25
2. 應用, 約束	26
§5. 補充材料及問題	27
1. 綫性獨立性及格萊姆行列式	27
2. 行列式的哈達馬不等式	28
3. 正則變換的廣義處理	29
4. 無窮多個變數的雙綫型和二次型	32
5. 無窮小綫性變換	32
6. 微擾	34

7. 約束	35
8. 矩陣或雙綫型的初等除數	35
9. 複正交矩陣的譜	36
參考文獻	37

第二章 任意函數的級數展開

§1. 正交函數組	38
1. 定義	38
2. 一組函數的正交化	39
3. 貝塞不等式。完備性關係。平均逼近	40
4. 無窮多個變數的正交變換和複正交變換	43
5. 在多個自變數及更一般的假定下上述結果的正確性	44
6. 多變數完備函數組的造成	44
§2. 函數的聚點定理	45
1. 函數空間的收斂性	45
§3. 獨立性測度和維數	48
1. 獨立性測度	48
2. 一函數敘列的漸近維數	49
§4. 維爾司察斯逼近定理。冪函數和三角函數的完備性	51
1. 維爾司察斯逼近定理	51
2. 推廣到多元函數的情形	52
3. 函數及其微商同時用多項式逼近	53
4. 三角函數的完備性	53
§5. 富理葉級數	54
1. 基本定理的證明	54
2. 重富理葉級數	57
3. 富理葉係數的數量級	58
4. 基本區間長度的更改	58
5. 例	58
§6. 富理葉積分	60
1. 基本定理	60

2. 把上節結果推廣到多元函數的情形	62
3. 互逆公式	62
§7. 富理葉積分的例子	63
§8. 勒上特多項式	64
1. 從冪函數 $1, x, x^2, \dots$ 的正交化作出勒上特多項式	64
2. 母函數	66
3. 勒上特多項式的其它性質	67
(a) 遞推公式	67
(b) 微分方程	67
(c) 最小性	68
§9. 其它正交組的例子	68
1. 導至勒上特多項式的問題的推廣	68
2. 切比雪夫多項式	69
3. 雅可比多項式	71
4. 赫米特多項式	72
5. 拉蓋爾多項式	73
6. 拉蓋爾和赫米特函數的完備性	75
§10. 補充材料和問題	76
1. 等週問題的胡維茨解	76
2. 互逆公式	78
3. 富理葉積分和平均收斂性	78
4. 由富理葉級數和積分所得的譜分解	79
5. 稠密函數組	79
6. 赫·明茲關於冪函數完備性的一個定理	80
7. 費葉求和定理	80
8. 梅林反演公式	81
9. 吉普斯現象	83
10. 關於格萊姆行列式的一個定理	85
11. 勒貝格積分的應用	85
參考文獻	87

第三章 綫性積分方程

§1. 引論	89
1. 符號和基本概念	89
2. 以積分表示的函數	90
3. 退化核	90
§2. 退化核的佛萊特蒙定理	91
§3. 對任意核的佛萊特蒙定理	94
§4. 對稱核及其本徵值	96
1. 對稱核的本徵值的存在性	97
2. 本徵函數和本徵值的全體	99
3. 本徵值的極大-極小性質	104
§5. 展開定理及其應用	105
1. 展開定理	105
2. 非齊次綫性積分方程的解	107
3. 累次核的雙綫公式	108
4. 美塞定理	109
§6. 諾依曼級數和預解核	110
§7. 綽萊特蒙公式	112
§8. 積分方程理論的另一推導	116
1. 一個引理	116
2. 對稱核的本徵函數	117
3. 非對稱核	118
4. 本徵值和本徵函數對核的連續依賴性	118
§9. 本理論的推廣	119
§10. 第三章的補充材料和問題	120
1. 問題	120
2. 奇異積分方程	121
3. 依·斯米特關於綽萊特蒙定理的推導	121
4. 解對稱積分方程的恩斯可克法	122
5. 決定本徵函數的開洛格法	123

6. 核的形式函數及其本徵值	123
7. 沒有本徵函數的一個非對稱核例子	123
8. 伏泰拉積分方程	124
9. 亞貝爾積分方程	124
10. 屬於一非對稱核的共軛正交組	124
11. 第一類積分方程	125
12. 無窮多變數法	126
13. 本徵函數的極小性	126
14. 極性積分方程	126
15. 可對稱化的核	126
16. 由函數方程決定預解核	127
17. 正(負)定核的連續性	127
18. 漢姆斯坦定理	127
參考文獻	127

第四章 變分法

§1. 變分法的問題	129
1. 函數的極大和極小	129
2. 汎函	131
3. 變分法的典型問題	132
4. 變分法特有的困難	135
§2. 直接解	136
1. 等週問題	136
2. 雷萊-里茨方法, 極小化敘列	136
3. 其它直接方法, 有限差法, 無窮多個變數法	138
4. 關於變分直接方法的一般討論	142
§3. 歐勒方程	143
1. 變分法中“最簡單的問題”	143
2. 多個未知函數的問題	145
3. 高階微商的出現	147
4. 多個自變數的情形	148

5. 歐勒微分式之恆等於零	150
6. 齊次形的歐勒方程	152
7. 條件的放寬。布阿-雷蒙和哈爾定理	154
8. 變分問題和函數方程	158
§4. 歐勒微分方程的積分	159
§5. 邊界條件	160
1. 自由邊界的自然邊界條件	161
2. 幾何問題。橫交條件	163
§6. 二級變分及勒上特條件	165
§7. 帶附加條件的變分問題	167
1. 等週問題	167
2. 有限附加條件	169
3. 微分方程作為附加條件	170
§8. 歐勒方程的不變性	171
1. 歐勒式作為函數空間的梯度。歐勒式的不變性	171
2. Δu 的變換。球坐標	173
3. 橢球坐標	174
§9. 變分問題之變換為正則形和回轉形	178
1. 帶附加條件的一般極小問題的變換	179
2. 最簡單的一些變分問題的回轉變換	180
3. 變分問題向正則形的變換	184
4. 推廣	185
§10. 變分法和數學物理微分方程	187
1. 一般的討論	187
2. 振動的絃和振動的桿	189
3. 膜與板	190
§11. 互逆二次變分問題	194
§12. 補充材料和練習	198
1. 一給定微分方程的變分問題	198
2. 等週問題的可逆性	199
3. 圓形光綫	199

4. 弟多問題	199
5. 空間問題的例	199
6. 示性曲線及其應用	199
7. 變動的區域	200
8. 納特爾關於不變變分問題的定理，質點力學問題中的積分	202
9. 重積分的橫交條件	205
10. 曲面上的歐勒微分式	206
11. 靜電學中的湯姆生原理	206
12. 彈性體的平衡問題，卡斯鐵格里阿諾原理	207
13. 翹曲的變分問題	210
參考文獻	211

第五章 振動和本徵值問題

§1. 綫性微分方程述引	213
1. 疊加原理	213
2. 齊次和非齊次問題，邊界條件	214
3. 形式關係，伴隨微分式，格林公式	214
4. 綫性函數方程——綫性方程組的類似和極限情形	217
§2. 有限自由度的系統	217
1. 簡正形振動，簡正坐標，運動的普遍理論	218
2. 振動系統的一般性質	221
§3. 絃的振動	221
1. 均勻絃的自由運動	222
2. 受迫振動	224
3. 一般的不均勻的絃和斯特姆-利歐維本徵值問題	225
§4. 桿的振動	228
§5. 膜的振動	230
1. 關於均勻膜的一般本徵值問題	230
2. 受迫運動	231
3. 節綫	232
4. 矩形膜	232

5. 圓形膜。貝塞函數	233
6. 不均勻的膜	236
§6. 板的振動	236
1. 概述	236
2. 圓形邊界	237
§7. 關於本徵函數法的一般性問題	238
1. 振動及平衡問題	238
2. 熱傳導及本徵值問題	240
§8. 三維連續體的振動。分離變數法	241
§9. 本徵函數和勢論中的邊值問題	242
1. 圓, 球, 球殼	243
2. 柱形區域	245
3. 拉美問題	245
§10. 斯特姆-利歐維型問題。奇異邊界點	249
1. 貝塞函數	249
2. 任意階的勒上特函數	250
3. 雅可比及切比雪夫多項式	251
4. 赫米特及拉蓋爾多項式	252
§11. 斯特姆-利歐維方程的解的漸近行爲	254
1. 當自變數趨向無窮時解的有界性	254
2. 更確切一點的結果。(貝塞函數)	255
3. 當參數增大時的有界性	256
4. 解的漸近表示	257
5. 斯特姆-利歐維本徵函數的漸近表示	258
§12. 具有連續譜的本徵值問題	261
1. 三角函數	261
2. 貝塞函數	261
3. 無窮平面的膜振動方程的本徵值問題	261
4. 薛汀格本徵值問題	262
§13. 微擾理論	264
1. 單重本徵值	264

2. 重本徵值	265
3. 微擾理論的一例	268
§14. 格林函數(影響函數)及化微分方程為積分方程	269
1. 格林函數及常微分方程的邊值問題	269
2. 格林函數的造出;廣義格林函數	272
3. 微分方程和積分方程的等價	274
4. 高階常微分方程	277
5. 偏微分方程	278
§15. 格林函數的例	284
1. 常微分方程	284
2. 對圓和球 Δu 的格林函數	288
3. 格林函數和保角映像	289
4. 在球面上的勢方程的格林函數	289
5. 在一直角平行六面體中 $\Delta u = 0$ 的格林函數	290
6. 在一矩形內 Δu 的格林函數	294
7. 圓形環的格林函數	296
§16. 第五章的補充材料	298
1. 絃振動的例	298
2. 自由懸掛的繩的振動;貝塞函數	299
3. 振動方程明顯解的例子。馬久函數	300
4. 含有參數的邊界條件	301
5. 微分方程組的格林張量	302
6. 方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 的解的解析延拓	302
7. 關於 $\Delta u + \lambda u = 0$ 的解的節綫的定理	303
8. 無窮重數的本徵值的例	303
9. 展開定理的有效範圍	303
參考文獻	303

第六章 變分法在本徵值問題上的應用

§1. 本徵值的極值性質	305
1. 經典的極值性質	305

2. 推廣.....	308
3. 當區域具有分隔組成部分時的本徵值問題.....	310
4. 本徵值的極大-極小性質	311
§2. 由本徵值的極值性質所得的一般結論.....	312
1. 一般定理.....	312
2. 本徵值的無限增大.....	316
3. 斯特姆-利歐維問題中本徵值的漸近性質	317
4. 奇異微分方程.....	318
5. 關於本徵值增大的進一步討論。負本徵值的出現.....	319
6. 本徵值的連續性.....	321
§3. 完備性和展開定理.....	325
1. 本徵函數的完備性.....	325
2. 展開定理.....	327
3. 展開定理的推廣.....	328
§4. 本徵值的漸近分佈.....	329
1. 在矩形上的方程 $\Delta u + \lambda u = 0$	329
2. 在有限多個方形或立方體所作成的區域上的方程 $\Delta u + \lambda u = 0$	331
3. 把結果推廣於一般的微分方程 $L[u] + \lambda \rho u = 0$	333
4. 對一任意區域本徵值的漸近分佈.....	335
5. 對微分方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 而言本徵值的漸近分佈規律較精確的形式 ...	340
§5. 薛汀格型的本徵值問題.....	341
§6. 本徵函數的節.....	346
§7. 補充材料和問題.....	349
1. 本徵值的極小性質。由完備性所作的推導.....	349
2. 用沒有節這個性質來刻劃第一個本徵函數.....	351
3. 本徵值的另外一些極小性質.....	352
4. 本徵值的漸近分佈.....	352
5. 雙參數本徵值問題.....	353
6. 包含參數的邊界條件.....	353
7. 閉曲面的本徵值問題.....	353
8. 當有奇點出現時本徵值的估計.....	354

9. 板和膜的極小定理.....	354
10. 變質量分佈的極小問題.....	355
11. 斯特姆-利歐維問題的節點。極大-極小原理.....	355
參考文獻.....	356

第七章 本徵值問題所定義的特殊函數

§1. 綫性二階微分方程的初步討論.....	357
§2. 貝塞函數.....	358
1. 積分變換的應用.....	358
2. 漢克函數.....	359
3. 貝塞函數和諾曼函數.....	361
4. 貝塞函數的積分表示式.....	362
5. 漢克函數和貝塞函數的另一積分表示式.....	364
6. 貝塞函數的幕級數展開.....	370
7. 各貝塞函數間的關係.....	372
8. 貝塞函數的零點.....	378
9. 諾曼函數.....	381
§3. 勒上特函數.....	385
1. 許肋弗里積分.....	385
2. 拉普拉斯的積分表示式.....	386
3. 第二類勒上特函數.....	387
4. 聯屬勒上特函數。(高階勒上特函數).....	388
§4. 應用積分變換方法於勒上特、切比雪夫、赫米特及拉蓋爾方程.....	388
1. 勒上特函數.....	388
2. 切比雪夫函數.....	390
3. 赫米特函數.....	390
4. 拉蓋爾函數.....	391
§5. 拉普拉斯球面調和函數.....	392
1. $2n + 1$ 個 n -階球面調和函數的確定.....	392
2. 函數組的完備性.....	393
3. 展開定理.....	394

4. 泊松積分.....	394
5. 馬克斯威-西爾法斯特的球面調和函數表示式	395
§6. 漸近展開.....	400
1. 斯特林公式.....	401
2. 當變量值大時漢克和貝塞函數的漸近計算.....	402
3. 馬鞍點法.....	404
4. 應用馬鞍點法計算大參量和大變量的漢克函數和貝塞函數.....	405
5. 馬鞍點法的一般討論.....	409
6. 達布方法.....	409
7. 應用達布方法於勒上特多項式的漸近展開.....	410
§7. 第七章附錄. 球面調和函數的變換.....	411
1. 導言及符號.....	411
2. 正交變換.....	412
3. 球面調和函數的一個母函數.....	414
4. 變換公式.....	416
5. 直角坐標下的表示式.....	418
附加參考文獻.....	420
索引.....	423