高等学校试用教材

高　等　数　学

上　册

同济大学数学教研室主编

人民教育出版社

本书分上、下两册．上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数等．书末附有积分表和习题答案．

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书．

高　等　数　学

上　册

同济大学数学教研室主编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

1978年3月第1版　1978年7月第1次印刷

书号 13012·0140　　定价 1.05元

编 者 的 话

本书分上、下两册．上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数，下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论．各章配有习题，书末附有习题答案．

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书．

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驺，上海交通大学王嘉善，上海纺织工学院巫锡禾，上海科技大学蔡天亮，上海机械学院王敦珊、周继高，上海铁道学院李鸿祥等同志．

本书由上海海运学院陆子芬教授主审．参加审稿的还有大连工学院刘锡琛，合肥工业大学万迪生，成都电讯工程学院冯潮清，西北工业大学王德如，浙江大学盛骤，太原工学院徐永源、张宝玉，上海海运学院朱幼文等同志．

审稿同志都认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此我们表示衷心感谢．

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而教材中一定存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正．

编　者

一九七八年三月

目　　录

第一章　函数与极限

"科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。"①初等数学研究的对象，基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学．对变量与变量之间的关系，以及变量的变化趋势的研究，就构成本章中函数与极限两部分的内容．

第一节　变量与函数

一、常量与变量

客观世界的一切事物由于内部存在着矛盾，所以都处在不断运动的过程中．在这过程中，总伴随着数量的变化．因此，在日常生活和生产实践中，我们常会遇到各种各样变化着的量．譬如，一昼夜的温度，物体在运动过程中经历的时间和路程，等等．这种在某一过程中可以取不同数值的量叫做变量．

与此相反，还有一些量，在某一过程中保持不变的数值，如等速直线运动的速度等，这种量叫做常量．

一个量是常量还是变量，并不是绝对的．同一个量在某种条件下可能是常量，而在另一种条件下，就可能是变量．譬如，一根钢轨的长度，在气温变化不大的情况下，由于热胀冷缩而引起的钢轨长度的变化是微小的，通常可以忽略不计，这时我们把它看作常量．但在铺设钢轨时，必须考虑到一年四季气温变化对钢轨长度有较大的影响，此时钢轨长度的变化就不能忽略不计，应把它看作

---

① 《毛泽东选集》第一卷第 284 页．

变量．因而在铺钢轨时，各根钢轨之间需要留出一段适当的距离．由此可见，一个量是常量还是变量，要根据具体情况进行具体分析．

以后，我们常用 a、b、c 等字母表示常量，用 x、y、t 等字母表示变量．

任何一个变量，总有一定的变化范围．例如，某天的最高温度是 14°C、最低温度是 4°C，那末，这一天的气温 T 的变化范围就是 4°C 到 14°C，即变量 T 的变化范围是 4 至 14．

在本课程中，我们常用"区间"来表示变量的变化范围．

所谓区间，是指介于某两个实数之间的全体实数，而那两个实数叫做区间的端点．设 a 与 b 是两个实数，且 $a<b$．那末，满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的一切实数 x 的全体叫做闭区间，记为 $[a,\ b]$；满足不等式

$$a<x<b$$

的一切实数 x 的全体叫做开区间，记为 $(a,\ b)$；满足不等式

$$a<x\leqslant b \quad 或 \quad a\leqslant x<b$$

的一切实数 x 的全体叫做半开区间，分别用记号 $(a,\ b]$ 或 $[a,\ b)$ 表示．

在数轴上来说，区间是指介于某两个点之间的线段上点的全

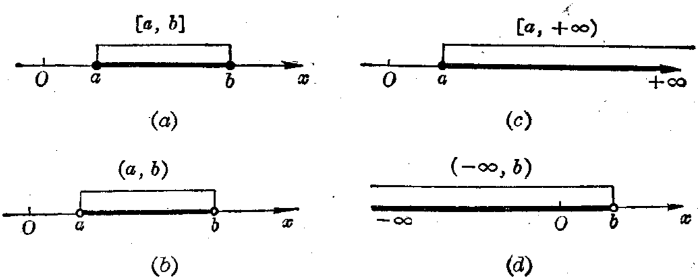

图 1-1

体．这两点就是区间的端点．闭区间$[a, b]$与开区间(a, b)在数轴上表示出来，分别如图 1-1(a)与(b)所示．

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点的场合，我们就简单地叫做“区间”，且也使用“圆括弧”来表示．

除了上述那些有限区间外，还有一类区间叫做无穷区间：

$[a, +\infty)$表示不小于a的实数的全体(图 1-1(c))，有时也写作$a \leqslant x < +\infty$；

$(-\infty, b)$表示小于b的实数的全体(图 1-1(d))，有时也写作$-\infty < x < b$；

$(-\infty, +\infty)$表示全体实数，有时也写作$-\infty < x < +\infty$($+\infty$和$-\infty$分别读作“正无穷”与“负无穷”，它们不是数，仅仅是记号)．

以后，我们还要用到与区间有关的邻域概念．

设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$．我们把满足不等式

$$|x-a| < \delta$$

的所有实数x的全体叫做点a的δ邻域，点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径．上述不等式与不等式

$$-\delta < x-a < \delta$$

等价，即与不等式

$$a-\delta < x < a+\delta$$

等价．从而，满足不等式$|x-a| < \delta$的所有实数x的全体就是开区间$(a-\delta, a+\delta)$．所以说，点a的δ邻域也就是以点a为中心，而长度为2δ的开区间(图 1-2)．

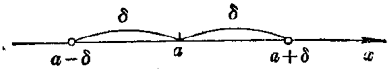

图 1-2

二、函数概念

客观事物的运动和变化都是相互联系、相互制约的. 这反映在数量上，就是变量与变量之间的依赖关系. 最常见的一类依赖关系是变量之间的函数关系.

例 1 自由落体运动是一种典型的等加速直线运动. 譬如在冶金工业中有一种碎铁机，它利用一个从高处自由下落的落锤把铁块砸碎. 落锤的运动就是属于自由落体运动. 物体在自由下落过程中，路程 s 与时间 t 都是变量. 这两个变量的变化并不是各自孤立的，而是相互依赖的. 由物理学知道，下落的路程 s (米) 随着下落的时间 t (秒)的变化而变化，联系着它们的变化的规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g=9.8$ 米/秒^2 是重力加速度.

根据这个规律，对于下落过程中每一个时刻 t，就能确定出相应的路程 s.

如当 $t=0.5$ 秒时，

$$s=\frac{1}{2}g(0.5)^2=\frac{1}{2}\times 9.8\times 0.25=1.225(\text{米});$$

当 $t=1$ 秒时，

$$s=\frac{1}{2}g(1)^2=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1=4.9(\text{米}).$$

例 2 曲柄连杆机构是机械中常用到的一种机构(图 1-3). 当主动轮转动时，连杆 AB(长度为 l)带动滑块 B，使 B 作往复直线运动. 这时，曲柄 OA(长度为 r, $r<l$)的转角 φ 与滑块 B 在 x 轴上的位置 x 都是变量. 滑块的位置 x 随着曲柄的转角 φ 而变化. 它们的变化规律可按下面的方法求得.

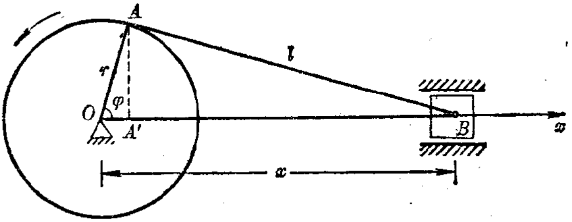

图 1-3

如图1-3，过点 A 作 AA' 垂直于 OB，且与 OB 交于点 A'. 于是

$$x = OA' + A'B.$$

而

$$OA' = r\cos\varphi,$$

$$A'B = \sqrt{l^2 - AA'^2} = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi},$$

因此

$$x = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}.$$

根据这个规律，对于运动过程中每一个转角 φ，就能确定出滑块的相应位置 x.

例如，当 $\varphi=0$ 时，　$x=l+r$;

当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，　$x=\sqrt{l^2-r^2}$;

当 $\varphi=\pi$ 时，　$x=l-r$.

我们还可以举出其他变量之间相互依赖关系的具体例子，它们所包含的具体意义虽然各不相同，但都具有共同的本质，这就是：在某一变化过程中有两个变量，它们是相互联系的，而且当其中一个变量在某一范围中取定了某个确定的值时，另一个变量按照一定的规律总有确定的值和它对应．概括这些共同的本质，我们就得出如下的函数定义：

定义　设 x 与 y 是两个变量．如果当变量 x 在实数的某一范

围中任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律，总有确定的数值和它对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中变量 x 叫做自变量，而变量 y 也叫做因变量.

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数具有确定的对应值，那末就称函数在 x_0 处有定义. 使函数有定义的一切实数的全体，叫做函数的定义域.

在研究函数时必须注意它的定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据所考察的问题的实际意义来确定的. 如例 1 中，假定物体开始下落时刻为 0，着地时刻为 T，则路程 s 只有当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时才有确定的对应值，所以 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是闭区间 $[0, T]$.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地来研究用算式表达的函数. 这时，我们约定：函数的定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值. 也就是说，是这样的一些实数的全体，当用这种数代替算式中的自变量时，能够求出确定的因变量的实数值. 例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$.

自变量取得某一值时，函数的对应值叫做函数当自变量取该值的函数值. 如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都只有一个确定值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 如例 1、例 2 中的函数都是单值函数. 下面，我们给出一个多值函数的例子.

例 3 半径为 r、圆心在原点的圆的方程是

$$x^2+y^2=r^2,$$

或写成

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2} \quad (-r\leqslant x\leqslant r),$$

它表示圆上的点的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的关系. 当 $x^2\leqslant r^2$

时，y 就有一个或两个数值和它对应，所以 y 是 x 的多值函数.

以后凡是没有特别说明时，所称的函数都是指单值函数.

在函数定义中，并没有要求自变量变化时，函数一定要变，重要的一点是：当自变量 x 在定义域中任取一数值时，函数有确定的值和它对应. 因此，我们可以把常量当作函数来看待，即常量是这样一个函数，它对于自变量的一切值来说，函数值都是相等的.

三、函数的表示法

表达函数的方法，通常有以下三种：

1. 公式法

例 1 中用 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 表示路程 s 是时间 t 的函数，例 2 中用 $x=r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}$ 表示滑块位置 x 是转角 φ 的函数. 象这种用数学式子表示自变量和因变量对应关系的方法叫做公式法. 公式法的优点是简明准确，便于理论分析和计算，但不够直观. 有些实际问题中遇到的函数关系，很难甚至不能用公式法表示.

2. 表格法

在实际应用中，常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，如平方表、对数表、三角函数表、三角函数对数表等等. 如此表示函数的方法叫做表格法. 表格法的优点是给定了自变量的值后，可以直接查到对应的函数值，但表中所列数据往往不完全，同时也不便于进行理论分析.

3. 图示法

对于函数 $y=f(x)$，在其定义域内取一个 x 值时，就可得到确定的对应值 y. 以这一对 x, y 值为坐标，在平面直角坐标系 xOy 中定出一个点 $M(x, y)$. 当 x 变化时，M 点就在平面上运动并描

成一条曲线(图 1-4). 这条曲线就叫做函数 $y=f(x)$ 的图形. 一般说来, 函数的图形是平面上的曲线.

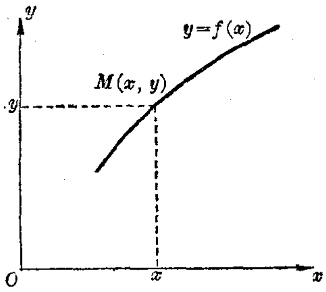

图 1-4

反过来说, 坐标平面上的任何一条曲线表示一个函数, 当自变量值等于曲线上点的横坐标时, 对应的函数值即等于该点的纵坐标. 因此函数也可由坐标平面上的曲线来表示, 这样表示函数的方法叫做函数的图示法. 用温度自动记录仪描下来的温度变化曲线(图 1-5), 它表示了温度 T 与时间 t 的函数关系, 这就是用图示法表示函数的例子. 图示法的优点是鲜明直观, 但不便作理论分析.

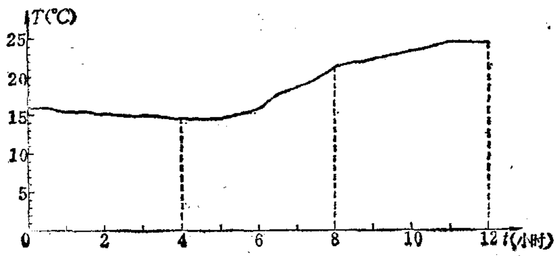

图 1-5

四、函数记号

在函数定义中我们已经指出: 自变量 x 的函数 y 通常用记号

$$y=f(x)$$

来表示. 应该注意, 这里记号"f"表示变量 y 与变量 x 之间的对应规律, 而不是 f 乘以 x. 正象在代数中用字母 a、b、c 可以代表任何数一样, 在函数研究中 $f(x)$ 可以代表 x 的任何函数, 如代表 x^2,

$\frac{1}{1+x^2}$, $\sin x$ 等.

当我们把一个具体函数，如

$$y=2x^2+5x+1$$

用记号 $y=f(x)$ 来表示时，就有

$$f(x)=2x^2+5x+1.$$

这时，记号"f"表示这样的对应规律：对应的 y 值，是由括号内的 x 值经过运算

$$2(\quad)^2+5(\quad)+1$$

得到的.

当自变量 x 取某一个定值 x_0 时，对应的函数值用记号

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0}$$

表示.

例如，对于函数 $f(x)=2x^2+5x+1$ 来说，

当 $x=0$ 时，　$f(0)=2(0)^2+5(0)+1=1$;

当 $x=1$ 时，　$f(1)=2(1)^2+5(1)+1=8$;

当 $x=-2$ 时，　$f(-2)=2(-2)^2+5(-2)+1=-1$;

当 $x=x_0$ 时，　$f(x_0)=2x_0^2+5x_0+1$.

由此可见，只要将 x_0 代替 $f(x)$ 中的 x，就得函数 $y=f(x)$ 在一点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$.

例 4 求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的函数值.

解 把 $x=\frac{\pi}{2}$ 代入 $\sin x+\cos x$ 中进行计算，得函数值

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1+0=1.$$

例 5 求函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}$ 在 $x=0$, $x=-1$, $x=x_0$ 各点处的函数值.