

高等学校试用教材

高等数学

上册

同济大学数学教研室主编

人民教育出版社

本书分上、下两册。上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数等。书末附有积分表和习题答案。

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书。

高 等 数 学

上 册

同济大学数学教研室主编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

1978年3月第1版 1978年7月第1次印刷

书号 13012·0140 定价 1.05元

编者的话

本书分上、下两册。上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数，下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论。各章配有习题，书末附有习题答案。

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书。

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驹，上海交通大学王嘉善，上海纺织工学院巫锡禾，上海科技大学蔡天亮，上海机械学院王敦珊、周继高，上海铁道学院李鸿祥等同志。

本书由上海海运学院陆子芬教授主审。参加审稿的还有大连工学院刘锡琛，合肥工业大学万迪生，成都电讯工程学院冯潮清，西北工业大学王德如，浙江大学盛骤，太原工学院徐永源、张宝玉，上海海运学院朱幼文等同志。

审稿同志都认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此我们表示衷心感谢。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而教材中一定存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正。

编者

一九七八年三月

目 录

编者的话

第一章 函数与极限	1
第一节 变量与函数	1
一、常量与变量(1) 二、函数概念(4)	
三、函数的表示法(7) 四、函数记号(8)	
五、反函数(11) 习题 1-1(13)	
第二节 初等函数	15
一、幂函数(15) 二、三角函数(17) 三、反三角函数(21)	
四、指数函数(24) 五、对数函数(26) 六、复合函数(28)	
习题 1-2(30)	
第三节 建立函数关系式举例	32
习题 1-3(38)	
第四节 极限概念	40
一、数列的极限(40) 二、函数的极限(44) 习题 1-4(48)	
第五节 极限运算法则	49
习题 1-5(53)	
第六节 无穷小和无穷大	54
一、无穷小量(54) 二、高阶无穷小(56)	
三、无穷大量(58) 习题 1-6(60)	
第七节 两个重要的极限	60
一、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (61) 二、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (63)	
习题 1-7(65)	
第八节 函数的连续性	65
一、函数连续性的概念(65) 二、函数的间断点(69)	
三、闭区间上连续函数的性质(71) 习题 1-8(74)	
第九节 关于极限的补充	75

一、数列极限的分析定义(75) 二、数列极限的性质及运算法则(79) 三、函数极限的分析定义(85) 四、函数极限的性质(89) 习题 1-9(90)

第二章 导数与微分.....92

第一节 导数概念.....92

一、变化率问题举例(92) 二、导数的定义(95) 三、求导数举例(97) 四、导数的几何意义(102) 五、函数的可导性与连续性之间的关系(104) 习题 2-1(106)

第二节 函数的和、差、积、商的求导法则.....107

一、函数和、差的求导法则(107) 二、常数与函数的积的求导法则(109) 三、函数积的求导法则(112) 四、函数商的求导法则(114) 习题 2-2(117)

第三节 复合函数的求导法则.....119

习题 2-3(127)

第四节 基本初等函数的导数 初等函数的求导问题.....128

一、反函数的导数(128) 二、指数函数的导数(129)

习题 2-4(1)(131) 三、反三角函数的导数(132)

习题 2-4(2)(134) 四、初等函数的求导问题(134)

习题 2-4(3)(136)

第五节 高阶导数.....136

习题 2-5(141)

第六节 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数.....143

一、隐函数的导数(143) 二、由参数方程所确定的函数的导数(147) 习题 2-6(152)

第七节 函数的微分.....153

一、引例(154) 二、微分的定义(155) 三、微分的几何意义(157) 四、基本初等函数的微分公式与微分运算法则(158) 习题 2-7(161)

第八节 微分的应用.....163

一、微分在近似计算中的应用(163) 习题 2-8(1)(167)

二、微分在误差估计中的应用(169) 习题 2-8(2)(173)

第三章 中值定理与导数的应用.....175

第一节 中值定理.....175

一、罗尔定理(175) 二、拉格朗日中值定理(177)

三、柯西中值定理(180)	习题 3-1 (182)	
第二节 罗必塔法则		182
习题 3-2 (186)		
第三节 函数单调性的判定法		187
习题 3-3 (191)		
第四节 函数的极值及其求法		191
习题 3-4 (198)		
第五节 最大值、最小值问题		198
习题 3-5 (205)		
第六节 曲线的凹向与拐点		207
一、曲线的凹向(208)	二、曲线的拐点(210)	习题 3-6 (212)
第七节 函数图形的描绘		213
习题 3-7 (219)		
第八节 弧微分 曲率		219
一、弧微分(219)	二、曲率及其计算公式(220)	
三、曲率圆与曲率半径(225)	习题 3-8 (227)	
第九节 方程的近似解		228
一、图解法(228)	二、弦位法(231)	三、切线法(233)
三、综合法(236)	习题 3-9 (238)	
第四章 不定积分		239
第一节 不定积分的概念与性质		239
一、原函数与不定积分的概念(239)	二、基本积分表(243)	
三、不定积分的性质(245)	习题 4-1 (249)	
第二节 换元积分法		250
一、第一类换元法(250)	二、第二类换元法(258)	习题 4-2 (263)
第三节 分部积分法		264
习题 4-3 (269)		
第四节 杂例		270
一、有理函数的积分举例(270)	二、三角函数的有理式的积	
分举例(276)	三、简单无理函数的积分举例(277)	习题 4-4 (278)
第五节 积分表的使用		279
习题 4-5 (284)		
第五章 定积分		285

第一节 定积分概念	285
一、定积分问题举例(285) 二、定积分定义(289)	
习题 5-1(294)	
第二节 定积分的性质 中值定理	295
习题 5-2(300)	
第三节 微积分基本公式	300
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系(301)	
二、积分上限的函数及其导数(302) 三、牛顿-莱布尼兹公	
式(304) 习题 5-3(307)	
第四节 定积分的换元法	308
习题 5-4(311)	
第五节 定积分的分部积分法	312
习题 5-5(315)	
第六节 定积分的近似计算	316
一、矩形法(317) 二、梯形法(317) 三、抛物线法(320)	
习题 5-6(325)	
第七节 广义积分	325
一、积分区间为无穷区间(325) 二、被积函数有无穷间断	
点(329) 习题 5-7(331)	
第六章 定积分的应用	333
第一节 定积分的元素法	333
第二节 平面图形的面积	33
一、直角坐标情形(336) 二、极坐标情形(339) 习题 6-2(341)	
第三节 体积	343
一、旋转体的体积(343) 二、平行截面面积为已知的立体的	
体积(346) 习题 6-3(347)	
第四节 平面曲线的弧长	350
一、直角坐标情形(350) 二、参数方程情形(352)	
习题 6-4(353)	
第五节 功 水压力	354
一、变力沿直线所作的功(354) 二、水压力(357)	
习题 6-5(358)	
第六节 平均值	354

一、函数的平均值(360) 二、均方根(362) 习题 6-6(364)

第七章 空间解析几何与向量代数365

第一节 空间直角坐标系365

一、空间点的直角坐标(365) 二、空间两点间的距离(367)

习题 7-1(369)

第二节 向量及其加减法 向量与数量的乘法369

一、向量概念(369) 二、向量的加减法(370)

三、向量与数量的乘法(372) 习题 7-2(374)

第三节 向量的坐标375

一、向量在轴上的投影与投影定理(375) 二、向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标(378) 三、向量的模与方向余弦的坐标表示式(381) 习题 7-3(383)

第四节 数量积 向量积 混合积384

一、两向量的数量积(384) 二、两向量的向量积(388)

三、向量的混合积(393) 习题 7-4(395)

第五节 平面及其方程396

一、平面的点法式方程(396) 二、平面的一般方程(398)

三、两平面的夹角(400) 习题 7-5(403)

第六节 空间的直线及其方程404

一、空间直线的一般方程(404) 二、空间直线的点向式方程与参数方程(404) 三、两直线的夹角(407) 习题 7-6(409)

第七节 曲面及其方程409

一、曲面方程的概念(409) 二、旋转曲面(412)

三、柱面(414) 习题 7-7(416)

第八节 空间曲线及其方程416

一、空间曲线的一般方程(416) 二、空间曲线的参数方程(418)

三、空间曲线在坐标面上的投影(420) 习题 7-8(421)

第九节 二次曲面421

一、椭球面(422) 二、椭圆抛物面(424) 三、双曲面(425)

习题 7-9(427)

附表 积分表429

习题答案440

第一章 函数与极限

“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。”^①初等数学研究的对象，基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学。对变量与变量之间的关系，以及变量的变化趋势的研究，就构成本章中函数与极限两部分的内容。

第一节 变量与函数

一、常量与变量

客观世界的一切事物由于内部存在着矛盾，所以都处在不断运动的过程中。在这过程中，总伴随着数量的变化。因此，在日常生活和生产实践中，我们常会遇到各种各样变化着的量。譬如，一昼夜的温度，物体在运动过程中经历的时间和路程，等等。这种在某一过程中可以取不同数值的量叫做变量。

与此相反，还有一些量，在某一过程中保持不变的数值，如等速直线运动的速度等，这种量叫做常量。

一个量是常量还是变量，并不是绝对的。同一个量在某种条件下可能是常量，而在另一种条件下，就可能是变量。譬如，一根钢轨的长度，在气温变化不大的情况下，由于热胀冷缩而引起的钢轨长度的变化是微小的，通常可以忽略不计，这时我们把它看作常量。但在铺设钢轨时，必须考虑到一年四季气温变化对钢轨长度有较大的影响，此时钢轨长度的变化就不能忽略不计，应把它看作

^① 《毛泽东选集》第一卷第284页。

变量. 因而在铺钢轨时, 各根钢轨之间需要留出一段适当的距离. 由此可见, 一个量是常量还是变量, 要根据具体情况进行具体分析.

以后, 我们常用 a, b, c 等字母表示常量, 用 x, y, t 等字母表示变量.

任何一个变量, 总有一定的变化范围. 例如, 某天的最高温度是 14°C 、最低温度是 4°C , 那末, 这一天的气温 T 的变化范围就是 4°C 到 14°C , 即变量 T 的变化范围是 4 至 14.

在本课程中, 我们常用“区间”来表示变量的变化范围.

所谓区间, 是指介于某两个实数之间的全体实数, 而那两个实数叫做区间的端点. 设 a 与 b 是两个实数, 且 $a < b$. 那末, 满足不等式

$$a \leq x \leq b$$

的一切实数 x 的全体叫做闭区间, 记为 $[a, b]$; 满足不等式

$$a < x < b$$

的一切实数 x 的全体叫做开区间, 记为 (a, b) ; 满足不等式

$$a < x \leq b \text{ 或 } a \leq x < b$$

的一切实数 x 的全体叫做半开区间, 分别用记号 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 表示.

在数轴上来说, 区间是指介于某两个点之间的线段上点的全

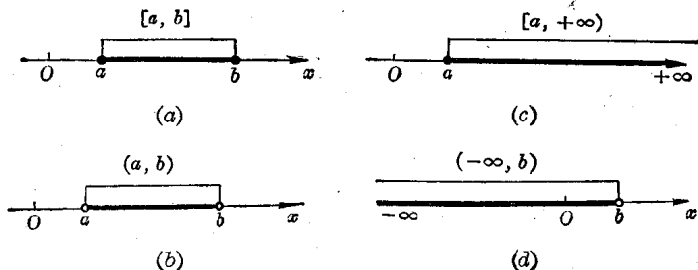


图 1-1

体. 这两点就是区间的端点. 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1-1(a) 与 (b) 所示.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点的场合, 我们就简单地叫做“区间”, 且也使用“圆括弧”来表示.

除了上述那些有限区间外, 还有一类区间叫做无穷区间:

$[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的实数的全体(图 1-1(c)), 有时也写作 $a \leq x < +\infty$;

$(-\infty, b)$ 表示小于 b 的实数的全体(图 1-1(d)), 有时也写作 $-\infty < x < b$;

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数, 有时也写作 $-\infty < x < +\infty$ ($+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷”与“负无穷”, 它们不是数, 仅仅是记号).

以后, 我们还要用到与区间有关的邻域概念.

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$. 我们把满足不等式

$$|x - a| < \delta$$

的所有实数 x 的全体叫做点 a 的 δ 邻域, 点 a 叫做这邻域的中心, δ 叫做这邻域的半径. 上述不等式与不等式

$$-\delta < x - a < \delta$$

等价, 即与不等式

$$a - \delta < x < a + \delta$$

等价. 从而, 满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的所有实数 x 的全体就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$. 所以说, 点 a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心, 而长度为 2δ 的开区间(图 1-2).

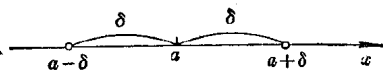


图 1-2

二、函数概念

客观事物的运动和变化都是相互联系、相互制约的。这反映在数量上，就是变量与变量之间的依赖关系。最常见的一类依赖关系是变量之间的函数关系。

例 1 自由落体运动是一种典型的等加速直线运动。譬如在冶金工业中有一种碎铁机，它利用一个从高处自由下落的落锤把铁块砸碎。落锤的运动就是属于自由落体运动。物体在自由下落过程中，路程 s 与时间 t 都是变量。这两个变量的变化并不是各自孤立的，而是相互依赖的。由物理学知道，下落的路程 s (米) 随着下落的时间 t (秒) 的变化而变化，联系着它们的变化的规律是

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g=9.8$ 米/秒² 是重力加速度。

根据这个规律，对于下落过程中每一个时刻 t ，就能确定出相应的路程 s 。

如当 $t=0.5$ 秒时，

$$s = \frac{1}{2}g(0.5)^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 0.25 = 1.225 \text{ (米)};$$

当 $t=1$ 秒时，

$$s = \frac{1}{2}g(1)^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 1 = 4.9 \text{ (米)}.$$

例 2 曲柄连杆机构是机械中常用到的一种机构(图 1-3)。当主动轮转动时，连杆 AB (长度为 l) 带动滑块 B ，使 B 作往复直线运动。这时，曲柄 OA (长度为 r ， $r < l$) 的转角 φ 与滑块 B 在 x 轴上的位置 x 都是变量。滑块的位置 x 随着曲柄的转角 φ 而变化。它们的变化规律可按下面的方法求得。

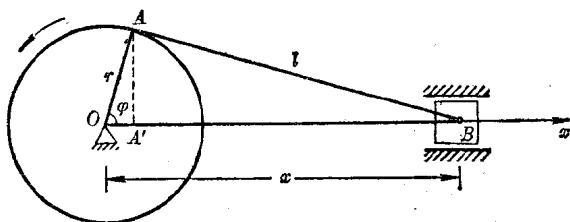


图 1-3

如图 1-3, 过点 A 作 AA' 垂直于 OB , 且与 OB 交于点 A' . 于是

$$x = OA' + A'B.$$

而

$$OA' = r \cos \varphi,$$

$$A'B = \sqrt{l^2 - AA'^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi},$$

因此

$$x = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

根据这个规律, 对于运动过程中每一个转角 φ , 就能确定出滑块的相应位置 x .

例如, 当 $\varphi = 0$ 时, $x = l + r$;

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = \sqrt{l^2 - r^2}$;

当 $\varphi = \pi$ 时, $x = l - r$.

我们还可以举出其他变量之间相互依赖关系的具体例子, 它们所包含的具体意义虽然各不相同, 但都具有共同的本质, 这就是: 在某一变化过程中有两个变量, 它们是相互联系的, 而且当其中一个变量在某一范围中取定了某个确定的值时, 另一个变量按照一定的规律总有确定的值和它对应. 概括这些共同的本质, 我们就得出如下的函数定义:

定义 设 x 与 y 是两个变量. 如果当变量 x 在实数的某一范

围中任意取定一个数值时, 变量 y 按照一定的规律, 总有确定的数值和它对应, 则变量 y 叫做变量 x 的函数, 记作

$$y=f(x),$$

其中变量 x 叫做自变量, 而变量 y 也叫做因变量.

如果自变量取某一数值 x_0 时, 函数具有确定的对应值, 那末就称函数在 x_0 处有定义. 使函数有定义的一切实数的全体, 叫做函数的定义域.

在研究函数时必须注意它的定义域. 在实际问题中, 函数的定义域是根据所考察的问题的实际意义来确定的. 如例 1 中, 假定物体开始下落时刻为 0, 着地时刻为 T , 则路程 s 只有当 $0 \leq t \leq T$ 时才有确定的对应值, 所以 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是闭区间 $[0, T]$.

在数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 而抽象地来研究用算式表达的函数. 这时, 我们约定: 函数的定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值. 也就是说, 是这样的一些实数的全体, 当用这种数代替算式中的自变量时, 能够求出确定的因变量的实数值. 例如函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$.

自变量取得某一值时, 函数的对应值叫做函数当自变量取该值的函数值. 如果自变量在定义域内任取一个确定值时, 函数都只有一个确定值和它对应, 这种函数叫做单值函数, 否则叫做多值函数. 如例 1、例 2 中的函数都是单值函数. 下面, 我们给出一个多值函数的例子.

例 3 半径为 r 、圆心在原点的圆的方程是

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

或写成

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leq x \leq r),$$

它表示圆上的点的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的关系. 当 $x^2 \leq r^2$

时, y 就有一个或两个数值和它对应, 所以 y 是 x 的多值函数.

以后凡是没有特别说明时, 所称的函数都是指单值函数.

在函数定义中, 并没有要求自变量变化时, 函数一定要变, 重要的一点是: 当自变量 x 在定义域中任取一数值时, 函数有确定的值和它对应. 因此, 我们可以把常量当作函数来看待, 即常量是这样一个函数, 它对于自变量的一切值来说, 函数值都是相等的.

三、函数的表示法

表达函数的方法, 通常有以下三种,

1. 公式法

例 1 中用 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 表示路程 s 是时间 t 的函数, 例 2 中用 $x = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$ 表示滑块位置 x 是转角 φ 的函数. 象这种用数学式子表示自变量和因变量对应关系的方法叫做公式法. 公式法的优点是简明准确, 便于理论分析和计算, 但不够直观. 有些实际问题中遇到的函数关系, 很难甚至不能用公式法表示.

2. 表格法

在实际应用中, 常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表, 如平方表、对数表、三角函数表、三角函数对数表等等. 如此表示函数的方法叫做表格法. 表格法的优点是给出了自变量的值后, 可以直接查到对应的函数值, 但表中所列数据往往不完全, 同时也不便于进行理论分析.

3. 图示法

对于函数 $y=f(x)$, 在其定义域内取一个 x 值时, 就可得到确定的对应值 y . 以这一对 x, y 值为坐标, 在平面直角坐标系 xOy 中定出一个点 $M(x, y)$. 当 x 变化时, M 点就在平面上运动并描

成一条曲线(图 1-4)。这条曲线就叫做函数 $y=f(x)$ 的图形。一

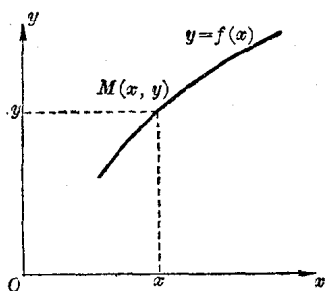


图 1-4

般说来, 函数的图形是平面上的曲线.

反过来说, 坐标平面上的任何一条曲线表示一个函数, 当自变量值等于曲线上点的横坐标时, 对应的函数值即等于该点的纵坐标. 因此函数也可由坐标平面上的曲线来表示, 这样表示函数的方法叫做函数的图示法.

用温度自动记录仪描下来的温度变化曲线(图 1-5), 它表示了温度 T 与时间 t 的函数关系, 这就是用图示法表示函数的例子. 图示法的优点是鲜明直观, 但不便作理论分析.

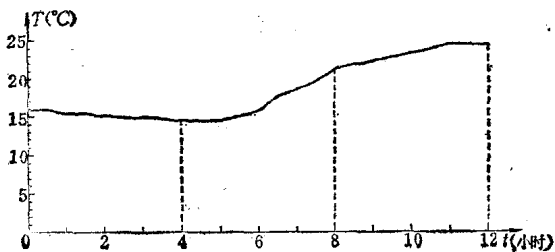


图 1-5

四、函数记号

在函数定义中我们已经指出: 自变量 x 的函数 y 通常用记号

$$y=f(x)$$

来表示. 应该注意, 这里记号“ f ”表示变量 y 与变量 x 之间的对应规律, 而不是 f 乘以 x . 正象在代数中用字母 a 、 b 、 c 可以代表任何数一样, 在函数研究中, $f(x)$ 可以代表 x 的任何函数, 如代表 x^2 ,

$\frac{1}{1+x^2}$, $\sin x$ 等.

当我们把一个具体函数, 如

$$y = 2x^2 + 5x + 1$$

用记号 $y = f(x)$ 来表示时, 就有

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1.$$

这时, 记号“ f ”表示这样的对应规律: 对应的 y 值, 是由括号内的 x 值经过运算

$$2(\quad)^2 + 5(\quad) + 1$$

得到的.

当自变量 x 取某一个定值 x_0 时, 对应的函数值用记号

$$f(x_0) \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0}$$

表示.

例如, 对于函数 $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ 来说,

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } f(0) = 2(0)^2 + 5(0) + 1 = 1;$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } f(1) = 2(1)^2 + 5(1) + 1 = 8;$$

$$\text{当 } x=-2 \text{ 时, } f(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 1 = -1;$$

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时, } f(x_0) = 2x_0^2 + 5x_0 + 1.$$

由此可见, 只要将 x_0 代替 $f(x)$ 中的 x , 就得函数 $y = f(x)$ 在一点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$.

例 4 求函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的函数值.

解 把 $x = \frac{\pi}{2}$ 代入 $\sin x + \cos x$ 中进行计算, 得函数值

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1.$$

例 5 求函数 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ 在 $x=0$, $x=-1$, $x=x_0$ 各点处

的函数值.