

有 限 单 元 法 在 燃气涡轮发动机零件强度计算中的应用

李 明 达 主 编

国 防 工 业 出 版 社

有限单元法在燃气涡轮发动机零件 强度计算中的应用

李 明 达 主编
许 荣 陈士煊 高德平 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书系统地论述有限元法的基本概念,以及用来计算燃气涡轮发动机零件强度的基本知识。主要内容包括:有限元法的基础知识;盘轴类零件的应力场、温度场及热应力问题;弯曲板壳单元、参数单元及过渡单元等。书内有榫头和榫槽、盘、轴、叶片及机匣等应力分析或振动计算实例;介绍了典型程序的编写方法;书末附有四个专用程序。全书内容浅显易懂,适合初学者学习。本书可供高等院校有关动力专业的学生使用,同时也可供发动机工程技术人员自学和参考。

有限单元法在燃气涡轮发动机零件 强度计算中的应用

李 明 达 主 编

许 荣 陈士煊 高德平 编

责任编辑 林国方

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

河北省涿州中学印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张26¹/₄ 611千字

1987年10月第一版 1987年10月第一次印刷 印数: 00,001—1,030 册

ISBN7-118-00115-5/V9 定价: 5.35元

前 言

随着我国四个现代化的蓬勃发展,使用电子计算机用有限元法解决燃气涡轮发动机的生产实际问题日益增多。我们在为工厂计算了盘、片、轴的强度和振动问题的基础上,为发动机设计专业的高年级生编写了讲义,以后又在原稿基础上做了多次修改和增订,作为历届教材及科普培训讲义,最后整理成本书。

本书针对燃气涡轮发动机强度计算手册中的专用程序及 SAP5 静、动态结构分析程序的部分内容作系统地理论阐述,注重物理概念及应用。前二章的弹性理论基本方程和能量原理为有限元法建立必要的理论基础;第三至第六章通过简单的平面应力问题建立有限元法的基本概念及编程技巧;第七、八章讨论盘轴类零件受轴对称载荷或非轴对称载荷的应力分析或温度场及热应力的计算方法;第九、十章研究叶片及机匣的应力分析或振动响应;最后两章介绍参数单元及过渡单元。目的是使读者便于理解和正确使用一些程序,或者能针对具体的结构问题对程序作一些修改和补充。书中附有一些典型零件的强度和振动计算实例,供读者参考。

全书分十二章,其中第七、八两章由许棠编写;第十一章由陈士煊编写;第十二章由高德平编写;其余各章由李明达编写。黄文虎教授为本书提供了许多薄叶片资料;乔新教授对全书作了认真的审阅,提出了许多宝贵的意见,特此向他们致谢。由于我们理论水平低,实践经验少,书中定有不少错误和缺点,恳请读者批评指正。

编 者

序 言

有限元法从五十年代中期开始发展起来,首先应用于航空结构的应力分析中,随着电子计算机的迅速发展,它得到愈来愈广泛的应用,目前已成为结构分析的一种强有力的方法。

过去对力学问题的解法一般有三种途径:一种将结构视为连续弹性体,选取其中典型的无限小微元体,用弹性理论对微元体进行力学特性分析,建立力与位移的微分方程式,结合边界条件,求得精确的解析解。但只限于几何形状、边界条件和载荷情况均很简单的情形。另一种是能量法,如通过变分原理建立方程式,选择合适的位移函数,得出近似的数值解法,但对于复杂的结构选择合适的位移函数是比较困难的,因而所得结果的精度也不一定高。还有一种是有限差分法,它将连续弹性体离散化分成许多个有限大小的区域,同时也将微分方程离散化,只对结构上有限个点求出近似的数值解。后两种方法可适用于结构形状、边界条件和载荷分布比较复杂的情形。

有限元法也是这样一种对连续弹性体进行离散化的近似数值解法,它将连续弹性体划分成许多个有限大小的单元,形成许多节点,真实结构可以物理地看成这些单元在它们的节点处相互连接而构成的组合体。通过对单元的力学特性分析,并将各单元的力学特性组合起来,就得到整个结构在这些节点上的外力和位移的关系,从而求得解答。

有限元法比起以上三种方法来,有以下特点:

(1) 有限元法是将连续弹性体离散化分成有限个单元的一种近似数值解法,这与有限差分法是类似的;所不同的,它不是将微分方程离散化,而是对单元进行力学特性分析而得到解答,这又和微分方程法是类似的。

(2) 有限元法的适应性好。它适合于几何形状复杂的结构,如复杂外形的平板、旋转圆盘、轴对称结构、薄壳、厚壳、叶片、叶根、机匣等的强度和振动计算。在网格划分方面远较有限差分法来得灵活、方便。有限元法对复杂的边界条件不会有什么困难,比有限差分法方便。有限元法将外载折算到各个节点上,因此可以方便地适应各种不同的外载情况,也可以方便地处理热应力问题。

(3) 有限元法对单元进行力学特性分析,是以能量原理为理论基础的,这点与能量法是共同的。一种是以位移作为未知量的分析法,称位移法,采用最小位能原理;另一种是以应力作为未知量的分析法,称力法,采用最小余能原理;还有其他的,如以某些位移和某些应力作为未知量的分析法,称混合法,采用修正的能量原理,使解题的精度提高,应用更广泛。

(4) 有限元法的计算工作量很大。但有限元法的运算方法是矩阵分析法,它具有简洁的、公式化的表达式,便于电子计算机进行数值计算,给工程技术人员很大的方便。因此有限元法的发展和应用是以快速电子计算机的发展为前提的。

目前有限元法的应用已深入到非线性问题,如结构的稳定性、弹塑性、蠕变、疲劳分析等,都是发动机零件损坏需要进一步探讨的问题。不仅如此,而且推广到了非结构

方面，如温度场、流体力学、电磁场等领域。总之，应用范围是很广泛的。

初学读者对于简单问题，由于所需数学工具比较简单，容易理解，但对有限元法的程序编写技巧较难掌握。对于复杂的问题，又感到弹性理论的基础知识不足，难以深入。一旦遇到发动机零件应力分析的具体例子，如何简化成计算模型，以及修改典型程序并灵活应用，又比较难于下手。本书在上述三个方面作较详细的解说，便于读者掌握要领，所以这里只局限于介绍有限元法的一般方法和进一步研究所必需的基本理论，一些专门问题可阅读有关书籍或文献。

目 录

常用符号表	1
第一章 弹性理论的基本方程	3
§ 1-1 古典弹性理论的基本假设	3
§ 1-2 平面问题的基本方程	3
§ 1-3 空间问题的基本方程综述	11
第二章 能量原理基础	18
§ 2-1 虚位移原理	18
§ 2-2 最小位能原理	22
§ 2-3 最小余能原理	24
§ 2-4 应用能量原理的简例	27
第三章 有限元法的基本概念	31
§ 3-1 结构的离散化	31
§ 3-2 刚度矩阵的概念	35
第四章 平面应力问题的有限元法	38
§ 4-1 三角板单元的采用	38
§ 4-2 位移模式	38
§ 4-3 非节点外载向节点的移置	43
§ 4-4 单元刚度矩阵	45
§ 4-5 结构刚度矩阵与刚度方程	49
§ 4-6 应力的计算	52
§ 4-7 平面应力问题中的热应力	52
§ 4-8 例题	54
第五章 解平面应力问题的高斯消去法源程序的编写	59
§ 5-1 原始数据的输入	59
§ 5-2 减缩结构刚度矩阵元素存储量的方法	61
§ 5-3 结构刚度矩阵的形成	64
§ 5-4 节点外载列阵的形成	68
§ 5-5 引入几何边界条件	69
§ 5-6 高斯消去法解线性代数方程组	71
§ 5-7 节点位移和节点应力的计算	77
§ 5-8 平面应力问题源程序的总体编排	78
§ 5-9 倾斜支座问题	79
§ 5-10 叶片榫头与轮缘榫槽的应力分析	85
第六章 常用的平面应力问题源程序介绍	93
§ 6-1 对称三角解法的原理	93
§ 6-2 对称三角解法的程序编写	97
§ 6-3 对称三角分块解法的原理	100

§ 6-4 对称三角分块解法的程序编写	102
§ 6-5 波前法解对称正定线性方程组的原理及源程序框图	111
第七章 轴对称零件的应力分析	121
§ 7-1 轴对称问题的应力分析	121
§ 7-2 轴类零件的应力分析	128
§ 7-3 等效节点载荷的计算	153
§ 7-4 二维数值积分	162
§ 7-5 轴应力分析算例	164
第八章 稳定温度场的计算	167
§ 8-1 平面稳定温度场计算	167
§ 8-2 轴对称稳定温度场的计算	177
§ 8-3 计算实例	181
§ 8-4 涡轮盘温度场和应力场计算的源程序框图	186
第九章 薄板弯曲问题	187
§ 9-1 薄板弯曲的基本理论	187
§ 9-2 三角形弯曲板的单元刚度矩阵	194
§ 9-3 三角形弯曲板单元刚度子阵的程序编写	201
第十章 薄壳和壳梁组合的结构问题	207
§ 10-1 叶片、机匣的物理模型选取	207
§ 10-2 薄壳离散为三角板的单元刚度矩阵	208
§ 10-3 坐标变换	210
§ 10-4 非旋转叶片的自由振动方程式	218
§ 10-5 求特征值问题	221
§ 10-6 叶片动频的计算	232
§ 10-7 薄叶片的应力分析	238
§ 10-8 薄叶片振动与强度计算源程序的框图	244
§ 10-9 薄叶片振动与强度算例	245
§ 10-10 直梁单元	247
§ 10-11 任意四边形板壳单元的刚度矩阵	255
§ 10-12 机匣的应力分析	264
第十一章 参数单元	272
§ 11-1 位移形函数的选定原则	272
§ 11-2 线性单元的位移形函数	273
§ 11-3 等参数单元	280
§ 11-4 超参数单元	291
§ 11-5 8~21可变节点的等(次)参数单元	303
§ 11-6 参数单元的退化	309
§ 11-7 非协调单元	312
§ 11-8 高斯积分	315
§ 11-9 参数单元在正交异性材料方面的应用	318
§ 11-10 超参厚壳元计算叶片强度	323
第十二章 过渡单元和环形单元	332

§ 12-1 过渡单元	332
§ 12-2 环形单元	345

附录

§ 1 平面应力问题的高斯消去法源程序	358
§ 2 平面应力问题的对称三角分块解法源程序	365
§ 3 平面应力问题的波前法源程序	378
§ 4 轴类零件应力分析源程序	389

参考文献	412
------------	-----

常用符号表

$\{\sigma\}$	应力列阵	$\gamma_{Txy}, \gamma_{Tyx}, \gamma_{Tzx}$	变温时的剪应变分量
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	正应力在 x, y, z 方向的分量	$\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z$	弹性正应变分量
$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$	剪应力分量	$\gamma'_{xy}, \gamma'_{yx}, \gamma'_{zx}$	弹性剪应变分量
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	主应力分量	W	功
$\{f\}$	位移列阵	δW	虚功
u, v, w	位移在 x, y, z 方向的分量	$\{R\}$	外载列阵
$\{\varepsilon\}$	应变列阵	U	应变能
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	正应变在 x, y, z 方向的分量	δU	虚应变能
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	剪应变分量	$\bar{U}$	单位体积的应变能
E	材料弹性模量	Π	弹性体总位能
G	材料剪切模量	$\{\delta f\}$	虚位移列阵
μ	泊桑比	$\delta u, \delta v, \delta w$	虚位移在 x, y, z 方向的分量
γ	重量密度	$\{\delta \varepsilon\}$	虚应变列阵
$[D]$	弹性矩阵	$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	虚正应变在 x, y, z 方向的分量
$[S]$	弹性矩阵的逆矩阵	$\delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{zx}$	虚剪应变在 x, y, z 方向的分量
l, m, n	在直角坐标系中外法线的方向余弦	δW_e	余虚功
X_N, Y_N, Z_N	斜面上全应力在坐标轴 x, y, z 上的投影	W_e	余功
σ_N, τ_N	斜面上的正应力、剪应力分量	U_e	余应变能
X, Y, Z	单位体积的体力在 x, y, z 方向分量	$\bar{U}_e$	单位体积余应变能
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	单位面积的面力在 x, y, z 方向分量	$\{\delta \sigma\}$	虚应力列阵
$\{X\}$	单位体积的体力列阵	$\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \delta \sigma_z$	虚正应力分量
$\{\bar{X}\}$	单位面积的面力列阵	ε_0	初应变
α	线膨胀系数、放热系数或角度	ε_T	热应变
T	变温	$\bar{U}_d$	总变形的单位体积应变能
$\varepsilon_{Tx}, \varepsilon_{Ty}, \varepsilon_{Tz}$	变温时的正应变分量	$\delta \bar{U}_d$	总变形的单位体积虚应变能
		$\bar{U}_{de}$	总变形的单位体积余应变能
		$\delta \bar{U}_{de}$	总变形的单位体积余虚应变能

Π	总余能	y_i, y_j, y_m	单元节点 i, j, m 的 y 坐标值
$\{\delta\}^e$	单元位移列阵		
$\{\delta\}, \{\delta_j\}, \{\delta_m\}$	节点 i, j, m 的位移列阵	Δ	单元三角形的面积
u_i, u_j, u_m	节点 i, j, m 的 x 方向位移分量	t	薄板厚度
v_i, v_j, v_m	节点 i, j, m 的 y 方向位移分量	r, θ, z	圆柱坐标
$\{N\}$	形函数	$\{R_i\}^e$	单元节点上的变温等效载荷列阵
$\{P\}$	一点的集中力列阵	$\{T\}$	结构节点温度列阵
$\{R\}^e$	单元节点外力列阵	$\{x\}$	薄板形变列阵
$\{R\}$	结构节点外力列阵	$\{M\}$	薄板内力列阵
$\{F\}^e$	单元节点内力列阵	$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	转角矢量沿 x, y, z 轴的分量
$\{\delta^*\}$	单元节点虚位移列阵	$M_{\theta x}, M_{\theta y}, M_{\theta z}$	力矩矢量沿 x, y, z 轴的分量
$[B]$	几何矩阵	L_i, L_j, L_m	节点 i, j, m 的面积坐积
$[K]^e$	单元刚度矩阵		
$[K_{rr}]$	单刚子矩阵	$[M]$	结构的质量矩阵
$[K]$	结构刚度矩阵	ξ, η, ζ	局部坐标系
$\{\delta\}$	结构节点位移列阵	$[J]$	雅可比矩阵
x_i, x_j, x_m	单元节点 i, j, m 的 x 坐标值	$\{N_G\}$	几何形函数列阵
		$\{N_D\}$	位移形函数列阵

第一章 弹性理论的基本方程

用有限元法对弹性体进行应力分析，须对弹性理论的基本概念和基本方程有所了解，本章只介绍与有限元法有关的部分作为学习的导引。

§ 1-1 古典弹性理论的基本假设

弹性理论中关于弹性体构造的连续性假设是研究问题的出发点，它将弹性体理想化为由无限多个质点组成的连续体。但为了便于描述弹性体内一点的变形状态，在这一点附近从弹性体内割取一个无限小的正六面体，其六个面垂直于坐标轴，其长、宽、高分别为 dx, dy 和 dz ，这正六面体简称为微元体，当取极限时，这微元体趋近于体内的这一点，显然微元体也有无限多个，相邻的微元体紧密相连。其次，还假定弹性体的材料是均匀的、完全弹性的和各向同性的，变形是微小的。应用上述假定条件，建立的微分方程是线性的，属于线弹性理论。

弹性理论的研究方法是在上述假定的基础上，从弹性体内割取微元体进行力学特性分析。它的基本内容有下列三个方面：

(1) 静力平衡方面。整个结构是平衡的，因而每个微元体也是平衡的。

(2) 变形相容方面。根据连续性假设，弹性体在变形前是连续的，变形后仍是连续的。

(3) 物理性能方面。材料是线弹性的，即应力分量与应变分量成线性比例关系。

由以上这三方面的分析，提供了弹性理论的基本方程。在有限元法中对单元进行特性分析时，要应用弹性理论的基本方程和能量原理。

为了简单起见，仅推导平面问题的弹性理论基本方程。空间问题的弹性理论基本方程由此推论和综述。

§ 1-2 平面问题的基本方程

研究以三个尺度表示的弹性体，且外载为空间力系的问题称为空间问题。为了建立其基本方程，要把弹性体内的应变和应力均作为 x, y, z 坐标的函数，这样得出的微分方程是复杂的，在数学上求解也是很困难的。但是有很多工程实际问题，沿某一个方向的应力和应变很少变化，如果作近似处理时，其中某一个坐标可以弃之不用，只考虑应力、应变发生在 xoy 平面内的部分，这样就把原来的空间问题简化为平面问题，一般来说也能满足工程上所要求的精度。

一、平衡方程

在外载作用下，弹性体发生变形的同时，其内部将产生应力。为了描述弹性体内一点的应力状态，从其内割取一个微元体进行分析，在平面问题中，任何公式都不包括厚度这一尺度，所以约定微元体厚度为 1，在图上不必将厚度表示出来。见图 1-1。

在微元体侧面上所受到的作用，用应力分量来表示，这些应力分量可视为该微元体

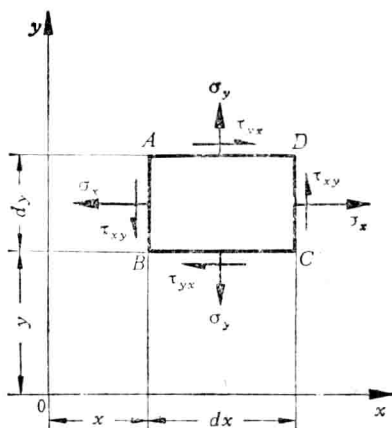


图1-1 平面内B点的应力分量

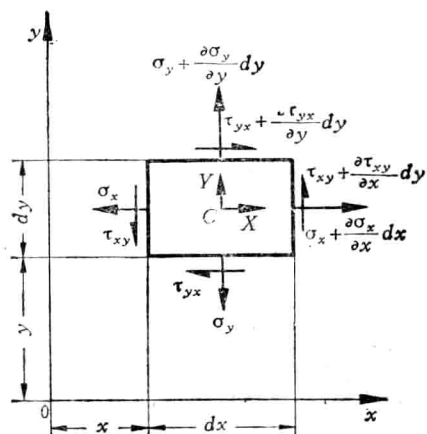


图1-2 微元体的静力平衡

所受到的外力。在物体内各点的应力，一般来说是各不相同的，为该点坐标的函数，且认为在微元体的作用面上，应力是均匀分布的。当只研究一点的应力状态时，可认为微元体内应力不变化，作为特殊的均匀、应力状态。

现在弹性体中面内B点附近割取无限小的矩形，其四个面分别垂直于二个坐标轴，每一个面上的应力可以分解为一个正应力 σ 和一个剪应力 τ 。图1-1中的四个面规定如下：如平面上的外法线与坐标轴方向一致的，该平面称正面；反之称负面。正面上的应力分量指向与坐标轴方向一致的或负面上的应力分量指向与坐标轴方向相反的均规定为正。图1-1上画的应力分量均为正号。正应力分量 σ_x 的下角标 x 表示其作用面与 x 轴垂直；剪应力分量 τ_{xy} 有两个下标，左面的下角标表示其作用面垂直于 x 轴，右面的下标表示剪应力指向 y 轴，余类推。由剪应力互等定律可知，作用在两个互相垂直面上的剪应力大小相等、正负号相同。即

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (1-1)$$

在平面问题中，只有三个应力分量是独立的，它可以完全确定该点的应力状态，以矢量 $\{\sigma\}$ 的形式表示，称应力列阵。

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (1-2)$$

弹性体在外载作用下保持静止或等速直线运动时，称它处于平衡状态。一般来说，作用在弹性体上的外载均为已知，它可分成二类：体积力和表面力。分布在弹性体内的力，如重力、离心力等称为体积力，用 X 、 Y 表示单位体积上的力在 x 、 y 轴方向上的分量；分布在弹性体表面上的力，如气体力、摩擦力等称表面力，用 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 表示单位面积上的力在 x 、 y 轴方向上的分量。这些力都是以沿坐标轴正方向为正，反之为负。为了研究静力平衡方面，现从弹性体中割取微元体，它的体积为 $dV = 1 \times dx dy$ 。其各面上的应力分量，见图1-2。

微元体在体力的作用下，从力的平衡来看，其相对的面上，内力不可能相同，所以在正面上应力有一个增量，如 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ 等。微元体应满足静力平衡条件，现先对微

元体重心 C 点取矩得

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx \frac{dy}{2} = 0$$

上式略去高阶微量，整理后得 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ，它证明了剪应力互等定律。

力对 x 轴的投影给出

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{yx} dx + X dx dy = 0$$

整理后得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (1-3a)$$

同理对 y 轴的投影给出

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (1-3b)$$

(1-3) 式是微元体上的应力分量和体力关系的二个平衡微分方程式，常称以应力表示的平衡方程。体力一般是已知的，三个应力分量是待求的，因此属于静不定问题，尚需根据变形连续条件列出方程式。

二、几何方程和变形相容方程式

在外载作用下，弹性体将发生变形，其体内每一点将产生位移。它分别用 x 、 y 轴方向的两个位移分量来描述。即

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

一般来说，弹性体内各点的位移分量是不相同的，由连续性假定，它们是位置坐标 x 和 y 的连续函数，以朝坐标轴的正向为正，反之为负，可用矢量 $\{f\}$ 表示，称为位移列阵。

$$\{f\} = [u \ v]^T \quad (1-5)$$

弹性体的变形状态还需用应变分量来描述，为推导应变-位移的关系，从弹性体中面 B 点切割出微小矩形 $ABCD$ ，见图1-3。

在外载作用下，原矩形 $ABCD$ 在变形后移至 $A_1B_1C_1D_1$ ，它发生了长度的改变和角度的变形。对小变形情况， $\overline{BC}$ 长度的改变为 $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ ，在 x 方向的正应变用 ε_x 表示，由定义它是长度的改变和原长之比，得

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1-6a)$$

同理，在 y 方向的正应变为

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1-6b)$$

约定正应变以伸长为正，反之为负。

剪应变是矩形的直角改变量，用 γ_{xy} 表示，可用图1-3中所示的角度 γ_1 、 γ_2 之和求出。在小变形情况下得

$$\gamma_1 = \tan \gamma_1 = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同理 $\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$, 于是得

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1-6c)$$

约定剪应变以直角减小为正, 与剪应力的正号相对应, 反之为负。

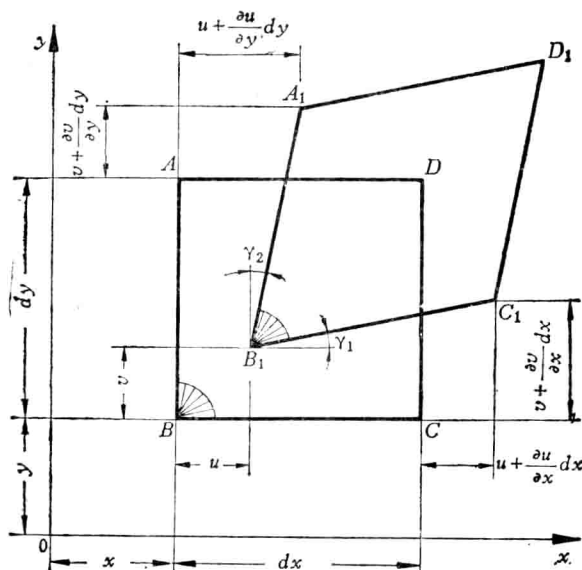


图1-3 平面内位移与应变的关系

弹性体内一点的变形状态, 在平面问题中, 完全可由上述三个应变分量确定, 以矢量 $\{\epsilon\}$ 表示, 称应变列阵。

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (1-7)$$

公式 (1-6) 给出了应变分量与位移分量的关系式, 称为几何方程。当已知弹性体的位移函数, 就可以唯一地确定它的应变函数。反之, 当已知弹性体的应变函数, 却不能唯一地确定位移函数, 这是因为对应变积分时, 有不定值的积分常数, 它随不同的刚体运动而有不同的积分常数。

应变函数也不能任意的给定, 因为 (1-6) 式的三个应变分量中只有二个是独立的, 还有一个应变分量可以从应变位移关系中消去位移分量后得出, 其应变分量之间的关系为

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1-8)$$

式 (1-8) 称为以应变表示的相容方程, 它是因为三个应变分量由二个位移分量确定而得出的。其物理意义是: 若任意给定三个应变分量, 将使相邻的微元体在变形后不一定都能紧密地连接在一起, 可能其间会发生间隙, 破坏弹性体连续性的假定, 当应变

分量满足(1-8)式,就保证了弹性体在变形后仍然是连续的,也即变形是相容的。

(1-6)式的三个应变分量 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 和二位移分量 u 、 v 均为未知数,但只列出了三个方程式,变形相容方程(1-8)式是由(1-6)式导出来的,它不是一个独立的方程式,因此还要建立应力与应变的关系式。

三、物理方程(应力与应变的关系)

在平面问题中应该辨别两种状态,因为两种状态下的应力、应变关系是不相同的。

(一) 两种平面问题

若一块等厚度的薄平板,其厚度比板平面尺寸小得多,作用于平板的外载与板面平行,且沿厚度方向均匀分布,在前后二板面上不受外力,这种受力薄板称为平面应力状态。由于板薄,板内应力沿板厚不会有显著的变化,因此应力分布与 z 坐标轴无关,以薄板中面为 xoy 平面,整个现象似乎发生在 xoy 平面内一样。见图1-4。

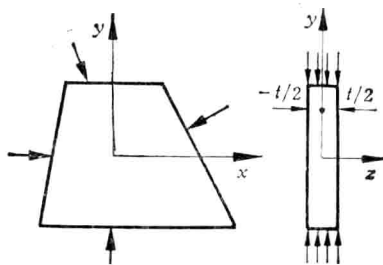


图1-4 平面应力状态

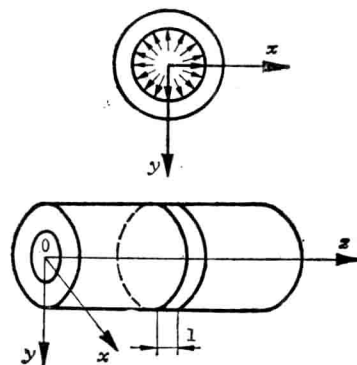


图1-5 平面应变状态

在平面应力状态下,垂直于 xoy 平面方向没有应力,但由于横向的伸缩可以自由变形,因此 $\sigma_z = 0$;而 $\varepsilon_z \neq 0$ 。

反之,若弹性体的形状为一等截面的且长度远大于截面尺寸的长柱形体,其所受外力在横截面内且沿柱长方向是均匀的,各截面的约束情况亦相同,这种称为平面应变问题。例如置于地面很长的等截面厚壁圆筒,筒内沿长度受相同的内压作用。为了便于计算,可以用垂直于 z 轴的相邻两个平面割出厚度为1的一片空心圆筒,在内压作用下,圆筒截面内将发生变形,由于泊桑比效应, z 轴方向也稍有膨胀或收缩,可是相邻各片都力图膨胀或收缩,互相挤压的结果,使各片的截面仍保持平面。因此虽圆筒很长,属于空间问题,但各片情况均相同,只要研究一片就能代表整体情况,变形现象也似乎只发生在 xoy 平面内,可以简化为平面问题。见图1-5。

平面应变状态与平面应力状态相比,在本质上是不同的。前者的薄片在 z 方向不可能有横向应变,因为同样情况的相邻薄片阻碍着它们,但这时在 z 轴方向就会发生正应力。因此在平面应变状态,垂直于截面方向没有正应变,但可能有正应力。即 $\varepsilon_z = 0$,而 $\sigma_z \neq 0$ 。

若弹性体的材料是均匀连续的、弹性的和各向同性的,当微元体上有三维正应力 σ_x ,

σ_y 、 σ_z 作用时, 则应力分量与应变分量之间的关系式由广义虎克定律给出,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

在两种平面问题中, 它们之间关系是不同的, 应加以简化。

(二) 平面应力状态

对于平面应力状态, 由于 $\sigma_z = 0$, 因而形变分量是

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

式中 E 是材料的弹性模量; μ 是材料的泊桑比; G 是材料的剪切模量, 它们之间有
下列关系:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

当材料给定后, 这些值均可由材料手册查得。

式(1-10)可以改写成如下的形式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{1 - \mu}{2} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

式(1-11)可写成矩阵的形式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1-12)$$

或简写为

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (1-13)$$

式中

$$[D] = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

$[D]$ 称为平面应力状态的弹性矩阵, 是一个对称矩阵, 它完全由材料的物理性质决定。

式(1-10)和(1-11)称为平面应力状态的物理方程。