实用相似理论

邱绪光 著

北京航空學院出版社

实用相似理论

邱緒光 著

北京航空學院出版社

内 容 简 介

本书把正确阐明以三定理为基础的相似理论的结论及其在工程技术中的正确运用作为中心任务，详尽介绍了相似理论的若干新发展，例如，方向性量纲分析及方向性方程分析，直接以单值条件量作为服从傅里叶规则的单位系统来获得无量纲方程的概念及方法等。

本书可作为大学本科生、硕士研究生选修教课书，可供有关专业教师及工程技术人员参考。

实 用 相 似 理 论

SHIYONG XIANGSI LILUN

邱 緒 光 著

責任編輯 陶金福

北京航空学院出版社出版
新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售
北京航空航天大学印刷厂印装

787×1092 1/32 印张：6.125 字数：142千字
1988年7月第一版 1988年7月第一次印刷
ISBN 7-81012-058-1/TB·011
定价：1.05元 印数：2500册

前　　言

本书取名《实用相似理论》，以阐明理论和正确应用相似理论为目标，定理的证明则一般从略。因为这些繁琐的证明对科技人员应用相似理论解决实际问题来说，没有很大的重要性。所谓阐明理论，主要指阐明理论已达到的结论，使能正确地理解这些结论。这种正确理解是正确应用相似理论的前提条件。本书所举一切实例的主要作用仍在于增进读者对相似理论的正确理解，帮助读者学会正确应用。

编著本书时，作者特别注意力戒偏见，不管中国、外国，不论东方、西方，凡精萃则取，糟粕则弃。但不做批判，作者深知批判已不入时。

作为基本理论的相似理论，难得有较大发展。但自五十年代以来，还是小有发展。例如，方向性量纲分析和方向性方程分析等；而有关基本量纲和基本单位的个数和内容的辨析等，则属于基本理论本身的完善化。对这些新内容，本书自当有所阐述。其中有些新内容是作者新发展的，当然，发展离不开继承。

相似理论最重要的应用方面是各种模化实验的布局。在我国，模化实验的潜力很大。如果相似理论的方法眞能大规模渗入实验，则将达到少花錢多办事，加快新产品研制周期。

要达到正确理解和正确运用相似理论，还是颇有一点难度的。初看容易，或者说，懂得越少越觉容易。本书作者三

十年前觉得容易，现在则看得较难，似可作为一证。大概凡事认眞则难，但要办成事则认眞又不可免。以此谏初学者，学习本课程时认眞些为妥。

本书主要用作大学生和硕士研究生教材，作为教材，本书为第三次修正稿。

作者 1987.12.

目　　录

导　论

从哲学的角度看，相似理论是研究自然现象中个性与共性或特殊与一般的关系以及内部矛盾与外部条件之间的关系的理论。无疑，马列主义及毛泽东思想哲学中的有关论述，对学习和把握相似理论具有很高的指导意义。

由于相似理论是从描述自然现象所应服从的客观规律的数理方程及其定解条件出发，即从现象发生和发展的内部规律性和外部条件出发，从这些数理方程所固有的在量纲上的齐次性以及数理方程的正确性不受测量单位制的选择的影响等大前提出发，通过线性变换等数学演绎的手段而达到自己的结论。因此，相似理论以极其广泛的自然现象作为研究对象，而它又有广泛的应用学科范围。因为它仅仅是一个数理逻辑体系。相似理论本身的内容并不多，似乎至今，甚至不被当作一个单独的学科。但是它的应用范围却很宽广。可以说，相似理论的特点是高度的抽象性与宽广的应用性相结合，正是在这一点上，在某种程度上与热力学相似。

从方法的角度看，相似理论有两大分支：方程分析法及量纲分析法。苏联学者 М.В.Кирпичев，П.К.Конаков及 А.А.Гухман 等人主要发展了方程分析法，而西欧等国学者主要发展了量纲分析法。П.К.Конаков[1] 对这两种方法的性质的论断是："量纲分析，当正确地运用它时，就导致方程分析 π 定理。根据它也就有提出相似正定理和相似逆定理的可能性。这些情况表明，方程分析和量纲分析的原理是相

同的。这是可以预期的，因为作为两种分析的基础的方程在本质上是相同的，区别只在方程分析以具体的方程组为基础，而量纲分析则以普遍的方程组为基础”。由此可见，如果所论课题有具体的方程可用时，一般宁愿取方程分析法，因为方程具体，不仅分析方法容易，而且结果确切——能保正确无误。量纲分析法，一般地说，是在所论课题列不出具体方程的情况下才采用。这时，结论的正确与否首先取决于这种无具体数学结构的方程是否正确，即所取变量是否能正确表达题意，然后还取决于基本量纲或基本单位有无正确的选择。由于无具体方程可用，分析的难度提高了。正因为这样，我们把量纲分析法置于本书后半部分。

相似理论属基本理论，无论方程分析或量纲分析，从50年代基本定型之后，难得有所发展。60年代日本甲滕好郎教授提出方向性量纲分析法，一个长度量纲分成了三个，至少打破了基本量纲取用数目一成不变的传统思想。本书作者在方向性量纲分析法的启示下，使用M.B.Кирпчев[2]的准则性测量单位的概念，提出了方向性方程分析法。后者比前者更易于掌握，而且结论更加明确和肯定。

M.B.Кирпичев 及 M.A.Михеев[3] 都说到，相似理论是实验的理论，用以指导实验的根本布局问题。确实，相似理论主要是用来指导实验布局的。对于比较简单的情况，指导系列性实验，实即实验解微分方程法；对于比较复杂的情况，尤其是对某些复杂的技术设计，相似理论为模拟实验提供指导，尺度的缩小或放大，参数的提高或降低，更改工质等等，都必须遵从相似理论，目的在于以最低的成本和在最短的运转周期内摸清设计的性能。从现在的科技发展形势看，相似理论的最主要价值正在指导模拟实验上。

相似理论也能指导分析解，方向性量纲分析或方向性方程分析正是为此目标而发展起来的。把相似理论用来指导分析求解可能对今后的科技发展无直接效益，但是，对于提高科技人员尤其是学生的理论素质来说，有很大的好处。

此外，虽然相似理论的应用有较广泛的学科范围，但是，本书所涉仅限于流体力学及传热学的范畴内，或限于连续介质力学中的某些分支内。这主要是因为相似理论的应用在这些学科内特别活跃，另一方面则限于本书作者自己的知识范围。例如，虽然相似理论在燃烧学及弹性力学中也有一些应用，但不去涉及，这是因为，相似理论在科技研究中只能是一种辅助工具，要应用它必须对有关学科有相当深厚的知识。

尽管相似理论本身是一个比较严密的数理逻辑体系，但是，一旦进入实际的应用课题，在很多情况下，不可能是很精确的，因为相似理论所处理的课题本身通常极其复杂。有时，为了使相似理论在处理问题时能行得通，必须对方程组本身或单值性条件进一步简化。例如，錢学森[4]指出：相似理论"能使气体动力学问题得到大大地简化，可以节省许多时间和精力"，但是，"这样的收获自然不可能不付出一点代价，那就是得牺牲一些普遍性。必须对流体的属性加上某些限制，否则这样有力的相似律是得不出来的"。这种限制指的是把气体当作完全气体。再例如，在层流附面层的 Blasius 解中，为使相似解能成立，必须附加壁顺流向无限延伸的假设。这是问题的一方面。另一方面，在模拟实验中，如果所应遵循的定型准则过多，要同时使这些准则在模型中的和在原型中的相同是很困难的，有时必须严守某一定型准则，而对另一些则必须放宽限制。这种立论严密而在实际运用中又

不得不放宽限制以揭示过程主要矛盾的做法，在科技研究中是一种一般化的现象。

正确地运用相似理论就可以更科学地进行实验布局，减少实验和计算次数；以各种级别的简单模拟实验揭示复杂科技现象中的现象机理，降低研制成本，缩短研制周期，从而为科学技术的发展，做出较大的贡献。

第一章　概念和定义

本章的主要目的在于从简入繁地向人们揭示，所谓现象相似是指的什么内容：数学上如何定义，物理上如何理解。

对方程所含变量做相似变换是相似理论方程分析法的出发点，同时又是初步了解现象相似所必需的，所以有必要首先置入“相似变换”一节；“几何相似”是人们所熟悉的，置入本节的目的不仅在于使读者对相似变换有比较具体的了解，初步建立相似的概念，而且还因为，一切物理现象相似是在几何相似的域中发生的。

“物理量相似”还只是定义一些单个物理量相似的问题，但是已经需要在“几何相似”有了概念之后才能对它们进行定义。

至于现象相似，由于物理现象本身是有机的，现象中所涉各种物理量的变化既受各种客观规律的主宰，又受制于环境的时空约束，前者的表征即数理方程，而后者的表征主要指定解条件。因此，对物理现象相似的定义就必须依赖于数理方程及定解条件。因此，不得不把相似变换和方程联系起来（定解条件通常也表现为数学方程），因此，导致相对型方程的出现。在定义相似现象时必须依赖那些相对型方程。

正是根据上述考究，把相对型方程一节也列入本章。

第一节　相似变换

本节给出相似变换的两种定义法。

所谓相似变换，就是指简单的线性变换。第一种定义法，取 n 个变量：x_{11}，x_{21}，…，x_{n1}，由它们定出一组最简单的线性函数，即：

$$\left.\begin{array}{l} x_{1\beta}=c_{1\beta}x_{11} \\ x_{2\beta}=c_{2\beta}x_{21} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n\beta}=c_{n\beta}x_{n1} \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}1)$$

在该方程组（1-1）中，系数 $c_{1\beta}$，$c_{2\beta}$，…，$c_{n\beta}$ 都是参数，称之为变量 x_{11}，x_{21}，…，x_{n1} 的变换乘数，它们是无单位或无量纲的纯数。若使角码 β 具有数值1，2，…，N，就得到 N 个变量集或 N 个函数集，它们都是由变量 x_{11}，x_{21}，…，x_{n1} 作线性变换或称相似变换而来。

变量 x_{11}，x_{21}，…，x_{n1} 一般是有单位的量，可称名数。

式（1-1）被称为相似变换的第一表示式，也即相似变换的第一种定义法。

另，取 n 个性质与变量 x_{11}，x_{21}，…，x_{n1} 相同的参量 x_{110}，x_{210}，…，x_{n10}，可写出相似变换：

$$\left.\begin{array}{l} x_{1\beta0}=c_{1\beta}x_{110} \\ x_{2\beta0}=c_{2\beta}x_{210} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n\beta0}=c_{n\beta}x_{n10} \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}2)$$

结合式（1-1）及（1-2）——即由式（1-2）去除式

(1-1)，可得：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x_{1\beta}}{x_{1\beta0}}=\dfrac{x_{11}}{x_{110}}\\[2ex]\dfrac{x_{2\beta}}{x_{2\beta0}}=\dfrac{x_{21}}{x_{210}}\\[2ex]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\[2ex]\dfrac{x_{n\beta}}{x_{n\beta0}}=\dfrac{x_{n1}}{x_{n10}}\end{array}\right\}\qquad(1\text{-}3)$$

式（1-3）被称为相似变换的第二种表示式，第二种定义法。式（1-3）表明，用测量单位 x_{110}，x_{210}，…，x_{n10}去测量变量集 x_{11}，x_{21}，…，x_{n1} 所得到的各个数，分别等于用测量单位 $x_{1\beta0}$，$x_{2\beta0}$，…，$x_{n\beta0}$ 去测量变量 $x_{1\beta}$，$x_{2\beta}$，…，$x_{n\beta}$ 所得到的数，这些数即指$c_{1\beta}$，$c_{2\beta}$，…，$c_{n\beta}$。

式（1-1）及（1-3）所表达的两种相似变换是等效的。

此外注意：

1. 式（1-1）的变换应包括恒等变换，即包括以下式：

$$c_{1\beta}=c_{2\beta}=\cdots=c_{n\beta}=1$$

表示的变换在内。

2. 式（1-1）的变换具有单值可逆性，即当β一定时，变量x_{11}，x_{21}，…，x_{n1}可决定变量 $x_{1\beta}$，$x_{2\beta}$，…，$x_{n\beta}$，或者相反地，量集 $x_{1\beta}$，$x_{2\beta}$，…，$x_{n\beta}$ 也可决定量集 x_{11}，x_{21}，…，x_{n1}。

第二节　几何相似

之所以要先讨论几何相似至少有两个原因：

第一，几何相似是人们最熟悉、最形象，从而最易为人

们接受的相似概念，以此作为出发点，为人们接受复杂的物理现象相似概念充当过渡。

第二，复杂的物理现象之间的相似是以存在几何相似为前提条件的。

这里讨论的几何相似和初等几何学中的几何图形相似概念的不同之处，是把几何图形置于某种坐标系中来考察。

考虑N个分别由封闭表面S_1，S_2，…，S_N所围成的空间区域。把封闭表面S_1称为起始表面。如果用起始表面S_1上空间坐标为x_{11}，x_{21}及x_{31}的任意点A_1，可以示出表面集S_β（$\beta=1$，2，…，N）中每一表面上空间坐标为$x_{1\beta}$，$x_{2\beta}$及$x_{3\beta}$的一点A_β，而且这N个点集可用下式联系起来：

$$\left.\begin{aligned} x_{1\beta}&=c_{1\beta}x_{11}\\ x_{2\beta}&=c_{2\beta}x_{21}\\ x_{3\beta}&=c_{3\beta}x_{31} \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

式中$c_{1\beta}$，$c_{2\beta}$和$c_{3\beta}$称为几何变换乘数或几何相似倍数，对于S_β中每一个表面，这些乘数都有确定的值，则表面集S_β称为线性表面相似群或仿射相似群。

注意：式（1-4）表明，起始表面S_1上取任一点（x_{11}，x_{21}，x_{31}），第β表面上都存在一个点能以式（1-5）和它联结起来，这里是以后还会提到的空间对应点的概念，这种对应点有无穷多个。另外，$c_{1\beta}$，$c_{2\beta}$和$c_{3\beta}$的值只随表面序号β而变，但不随对应点的不同而异，故又被称为相似常数或相似倍数。

几何相似的第二种定义法：

在表面集S_1，S_2，…，S_N中的每一个表面上分别取坐标为x_{110}，x_{210}，x_{310}；x_{120}，x_{220}，x_{320}；…；x_{1N0}，x_{2N0}，x_{3N0}的参变点A_{10}，A_{20}，…，A_{N0}，设这些点的坐标可用下

列关系式联结起来：

$$\left.\begin{aligned} x_{1\beta 0}&=c_{1\beta}x_{110} \\ x_{2\beta 0}&=c_{2\beta}x_{210} \\ x_{3\beta 0}&=c_{3\beta}x_{310} \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

如果说式（1-4）是指的任何对应点，则现在式（1-5）是在无穷个对应点中取出其中一个点作为约定的参考点。该式表明，各表面上这一参考点的坐标值 $x_{1\beta 0}$，$x_{2\beta 0}$，$x_{3\beta 0}$和起始表面（$\beta=1$者）上该参考点的坐标 x_{110}，x_{210}，x_{310} 具有比例关系，其比值为$c_{1\beta}$，$c_{2\beta}$和$c_{3\beta}$。

现以关系式（1-4）的两边分别除式（1-5）的两边，可得：

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_{1\beta}}{x_{1\beta 0}}&=\frac{x_{11}}{x_{110}} \\ \frac{x_{2\beta}}{x_{2\beta 0}}&=\frac{x_{21}}{x_{210}} \\ \frac{x_{3\beta}}{x_{3\beta 0}}&=\frac{x_{31}}{x_{310}} \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

上式同样地表达一个线性相似几何群。它就是几何相似的第二表达式。

现在式(1-6)的特定含义在于，一旦这个参考点选定了，则$x_{1\beta}/x_{1\beta 0}$，$x_{2\beta}/x_{2\beta 0}$，$x_{3\beta}/x_{3\beta 0}$等量的值不随表面序数β而变，但随表面上点的变动而改变。$x_{1\beta}$，$x_{2\beta}$，$x_{3\beta}$ 和 x_{11}，x_{21}，x_{31} 都是表示表面上变点的坐标，但式(1-6)则表示，不管所取变点为哪一点，变点坐标值和参考点坐标的比值总和起始表面上变点和参考点坐标之比值相等。

在相似理论中，$x_{1\beta}/x_{1\beta 0}$，$x_{2\beta}/x_{2\beta 0}$，$x_{3\beta}/x_{3\beta 0}$ 这种性质的量叫相似不变量。应该注意很好地区分相似常数和相似

不变量的概念。

由线性相似的封闭表面S_β所围成的空间区域V_β，称为线性相似的空间区域。表面S_1上或区域V_1中坐标为x_{11}，x_{21}和x_{31}的点A_1，与表面S_β上或区域V_β中的坐标为$x_{1\beta}$，$x_{2\beta}$和$x_{3\beta}$的点A_β，其坐标满足关系式（1-4）或（1-6），这种点称为空间对应点，或简称对应点。

把表面集S_β中任何一个表面上的或区域集V_β中任何一个区域内的两个对应点联结起来的直线段，称为对应直线段或简称为对应线段。

如果$c_{1\beta}=c_{2\beta}=c_{3\beta}$或$x_{1\beta0}/x_{110}=x_{2\beta0}/x_{210}=x_{3\beta0}/x_{310}$，则表面$S_\beta$和区域$V_\beta$被称为相似表面和相似区域。

如果撇开坐标而只就形状而言，例如，所有的直角平行六面体都属于一个线性几何相似群，火柴盒、书、一块具有任何有限长、宽、厚的木板同属一个线性几何相似群；具有各种不同轴长的椭球，包括圆球，同属一个线性几何相似群。但是，只有长、宽、厚与火柴盒相比按同一比例放大或缩小的几何体才和火柴盒同属一个相似群。线性相似几何群和几何相似群相比，后者较前者外延更大而内涵更小，就是说，几何相似群比线性几何相似群的条件约束更严或者说约束更多。

在较多的情况下，相似理论研究几何相似域的物理现象相似问题，但是，也有讨论线性几何相似域中的物理现象相似的时候。例如，高亚音速气流绕流机翼的问题，通过小扰动法及仿射变换，转成一个不可压流问题。所谓仿射变换，就是x坐标和y坐标使用不同大小的度量单位，使得在高亚音流中绕流较薄机翼的问题变成在不可压流中绕流较厚机翼的问题。方向性方程分析也最终导致仿射变换。但是，在所列的上述这类仿射变换中，x标和y标的不同的度量尺度的决定是物