中国企业运筹学

China Journal of Enterprise Operations Research

[2009(1)]

中国运筹学会
企业运筹学分会 主编

电子科技大学出版社

中国企业运筹学

2009（1）

中国运筹学会
企业运筹学分会 主编

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

中国企业运筹学 / 中国运筹学会企业运筹学分会编.
—成都：电子科技大学出版社，2009. 6
ISBN 978-7-5647-0157-4

Ⅰ. 中… Ⅱ. 中… Ⅲ. 运筹学—应用—企业管理—中国—文集 Ⅳ. F279.23-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 098191 号

中国企业运筹学

中国运筹学会
企业运筹学分会 主编

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：谢应成
责任编辑：谢应成
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：成都市火炬印务有限公司
成品尺寸：185mm×260mm　　印张　29.75　　字数　912　千字
版　　次：2009 年 6 月第一版
印　　次：2009 年 6 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-0157-4
定　　价：80.00 元

◆ 本社发行部电话：028-83202463；本社邮购电话：028-83208003。
◆ 本书如有缺页、破损、装订错误，请寄回印刷厂调换。

目　录

管理科学

投融资理论

供应链管理

企业管理

绩效评估

基于离差二次函数的不确定型多属性灰色关联决策法

周文坤
（上海大学管理学院　上海　200444）

摘　要：针对不确定型条件下的多属性决策问题，对区间数进行规范化，消除了属性值之间量纲的差异，建立了基于离差二次函数的属性权重优化模型，利用灰色关联度决策模型对加权矩阵进行处理，实现对决策方案的排序，为不确定型的多属性决策提供了一种简单实用的可靠方法。最后通过一个算例说明了该方法的实用性和有效性。

关键词：不确定型；区间数；多属性决策；权重；二次函数；关联度

0　引言

多属性决策是指在多个属性指标的情况下，选择最优备选方案或进行方案排序的决策问题[1-27]。不确定型多属性决策则是指决策者面对各属性时使用没有明确偏好信息的不确定语言（比如区间数、模糊语言、梯形数、三角数等），最终涉及对这些数信息处理的关键问题。目前，多属性决策在管理科学、决策理论、系统工程、运筹学等学科研究中占据十分重要的地位，广泛应用于投资决策、项目评价、方案优选、工厂选址、经济效益综合评价等诸多领域，具有广泛的理论价值和应用前景。对不确定型有限多个方案进行评价或选择最优方案时，涉及三个主要问题：其一，各种数据类型的规范化；其二，各方案对应的多个属性权重大小的确定；其三，数据类型为区间数，其结构关系为偏序，可能存在无法比较大小的区间数之间的关系。对于权重的确定，目前已产生了许多行之有效的客观方法[2-22, 23-27]，例如熵信息法、主成分分析法等。同时，也有很多主观决策方法来确定属性权重，比如德尔菲法、专家集体决策法等，而主观权重法往往简单可行，操作方便，但易受决策者知识、能力、经验等方面限制的影响，随意性很大，很大程度上体现了各决策者的个性、经验和偏好，不同的决策者给出的结果千差万别，直接影响到决策的科学性与合理性。 然而，一般的客观权重法又往往忽略了决策者的偏好差异程度和个性特征，缺乏对决策环境全面、详尽的概括。

针对属性权重信息完全未知，且属性值以区间数形式给出的不确定型多属性决策问题的研究，目前还很有许多工作需要进一步深入研究。其中，有的文献集中在区间数规范化的方法[7]；大多数文献研究基于可能度的区间数大小比较[8-28]，实用性较强，但是容易丢失信息。本文对区间数型的决策数据进行规范化，建立离差最大化的二次非线性组合优化模型，通过定量的方法计算各属性的最优权重，再利用权重计算各方案的规范化属性值得到加权属性矩阵，计算加权属性矩阵的灰色关联度[29]，形成一种新的客观权重确定方法，既体现了区间数形式的决策信息对决策者偏好和经验的概括，又体现了决策者信息处理的定量化和客观性特征，同时克服利用可能度比较造成区间数丢失的情形。

1　预备知识

假设不确定多属性决策模型由属性和决策方案两个要素组成，其中由 m 个方案组成决策方案集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，由 n 个评价方案的属性组成属性集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$。对于方案 $x_i\in X$，按第 j 个属性 u_j 进行测度，得到 x_i 关于 u_j 的属性值为 $\tilde{a}_{ij}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），并且属性值 $\tilde{a}_{ij}$ 是以区间数形式给出的。

设映射 F：$(x_i,u_j)\mapsto \mathrm{I}(\mathrm{R})$，$\tilde{a}_{ij}=F\ (x_i,u_j)\in \mathrm{I}(\mathrm{R})$，表示在属性 u_j 下决策者对方案 x_i 的评价属性值为 $\tilde{a}_{ij}$

（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），I（R）={ $a\left|a=[a^-,a^+],a^-<a^+\right.$ }，R 为实数域，a^-、$a^+\in$ R，则矩阵 $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$ 称为决策者对方案集 X 关于属性集 U 的不确定型决策矩阵。

在属性集 U 中有效益型与成本型两种类型属性。为了消除各属性的不同物理量纲对决策结果的影响，对不确定型决策矩阵 $\tilde{A}$ 中各元素进行规范化处理。设 I_j（$j=1,2$）分别表示效益型与成本型属性的下标集，用下列规范决策矩阵的计算公式，将不确定型决策矩阵 $\tilde{A}$ 转化为规范化矩阵 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$，其中 $\tilde{r}_{ij}=[r_{ij}^-,r_{ij}^+]$，并且有：

根据区间数的运算法则，把（1）式具体写为：

$$r_{ij}^-=\begin{cases} a_{ij}^-/\sum\limits_{i=1}^{m}(a_{ij}^-+a_{ij}^+) & j\in I_1,i\in M \\ (a_{ij}^+)^{-1}/\sum\limits_{i=1}^{m}[(a_{ij}^-)^{-1}+(a_{ij}^+)^{-1}] & j\in I_2,i\in M \end{cases} \tag{1}$$

$$r_{ij}^+=\begin{cases} a_{ij}^+/\sum\limits_{i=1}^{m}(a_{ij}^-+a_{ij}^+) & j\in I_1,i\in M \\ (a_{ij}^-)^{-1}/\sum\limits_{i=1}^{m}[(a_{ij}^-)^{-1}+(a_{ij}^+)^{-1}] & j\in I_2,i\in M \end{cases} \tag{2}$$

则得到规范化后的矩阵为 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$。

定义 1[29] 设 R 是一个集合，R 上的二元关系 $\leqslant$ 称为一个偏序关系，如果满足：(1) 自反性：$a\leqslant a$，$\forall a\in R$；(2) 反对称性：$a\leqslant b$，$b\leqslant a$，有 $a=b$，$\forall a$，$b\in R$；(3) 传递性：$a\leqslant b$，$b\leqslant c$，有 $a\leqslant c$，$\forall a$，b，$c\in R$。

定理 1[29] 对任意的区间数集合Ω，则Ω中的元素在关系“$\leqslant$”下形成偏序关系。

定义 2[9, 12, 15, 21] 设区间数 $\tilde{a}=[a^-,a^+]$ 和 $\tilde{b}=[b^-,b^+]$，令 $\|\tilde{a}-\tilde{b}\|=d(\tilde{a},\tilde{b})=\sqrt{(b^+-a^+)^2+(b^--a^-)^2}$，称 $d(\tilde{a},\tilde{b})$ 为区间数 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 的距离。

2 属性权重优化模型

若所有决策方案在属性 u_j 下的属性值差异越小，则说明该属性对方案优劣比较的作用越小；反之，如果属性值能使所有决策方案的属性值有较大的偏差，则说明该属性对方案优劣比较将起重要作用。因此，从决策角度看，无论方案属性值本身重要性程度如何，偏差越大就应该赋予越大的权重 w_j，偏差越小就应该赋予越小的权重 w_j。若所有决策方案在属性 u_j 下的属性值无差异，则属性 u_j 对方案比较将不起作用，可令其权重为零。

在规范化矩阵 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$ 中，对于属性 u_j，若决策方案 x_i 与其他所有决策方案的偏差定义为：

$$D_{ij}(w)=\sum_{k=1}^{m}[\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|w_j]^2$$

因此，对属性 u_j 而言，各决策方案属性值的偏差为：

$$D_j(w)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}w_j-\tilde{r}_{kj}w_j\|^2 \tag{3}$$

另外，考虑到方案的综合值越大，其对应的方案就越优，因而权重向量 w 的选择应该使所有决策方案的综合评价值之和尽可能大。因此，构造目标函数

$$\max D(w)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|w_j^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E(\tilde{r}_{ij})w_j$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n}w_j=1,\ w_j\geqslant 0 \tag{4}$$

构造 Lagrange 函数

$$F(w_1,w_2,\cdots,w_n,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|w_j^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E(\tilde{r}_{ij})w_j-2\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}w_j-1\right)$$

式中 λ 是 Lagrange 因子。令 $\dfrac{\partial F}{\partial w_j}=0$（$j=1,2,\cdots,n$）和 $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=0$ 并化简得到

$$2\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|w_j+\sum_{i=1}^{m}E(\tilde{r}_{ij})-2\lambda=0 \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n}w_j-1=0 \tag{6}$$

由（5）式得

$$w_j=\frac{\lambda-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}E(\tilde{r}_{ij})}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|} \tag{7}$$

代入（6）式得

$$\lambda=\frac{1+\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\sum_{i=1}^{m}E(\tilde{r}_{ij})}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|}}{\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|}} \tag{8}$$

将（8）式代入（7）式中得到

$$w_j=\frac{1+\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\sum_{i=1}^{m}E(\tilde{r}_{ij})}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|}-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}E(\tilde{r}_{ij})\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\|}} \tag{9}$$

在求出指标的最优权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 后，再结合规范化矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times n}$，可以得到加权矩阵 $\overline{R}=(w_jr_{ij})_{m\times n}=(s_{ij})_{m\times n}$。

在加权矩阵 $\overline{R}=(w_jr_{ij})_{m\times n}$ 中，方案 x_i 对应的向量为 $\bar{z}_i=(s_{i1},s_{i2},\cdots,s_{in})$，$i\in M$，定义方案 x_i 关于指标 u_j 的关联系数为

$$\xi_{ij}=\frac{\min_i\min_j\{L_{ij}\}+\rho\max_i\max_j\{L_{ij}\}}{L_{ij}+\rho\max_i\max_j\{L_{ij}\}}\quad(i=1,2,\cdots,m,\ \ j=1,2,\cdots,n) \tag{10}$$

其中，$L_{ij}=\|s_{ij}-s_j\|$ 为 s_{ij} 与 s_j 的距离，$s_j=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{s_{ij}\}$，$\rho$ 为分辨系数，$\rho\in[0,1]$，一般取值为 0.5，方案 x_i 与理想最优方案 x_0 的关联系数向量为 $\xi_i=(\xi_{i1},\ \xi_{i2},\ \cdots,\ \xi_{in})^{\mathrm{T}}$。由此，各方案与理想方案的关联系数矩阵为

$$\xi=\begin{bmatrix}\xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n}\\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_{m1} & \xi_{m2} & \cdots & \xi_{mn}\end{bmatrix} \tag{11}$$

因此，方案 x_i 与 x_0 的综合关联度为

$$\zeta_i=\sum_{j=1}^{n}w_j^*\xi_{ij}\ ,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{12}$$

显然，ζ_i 越大，表示被评价方案 x_i 与理想方案 x_0 越接近，因而决策方案 x_i 越好。各方案按综合关联度 ζ_i 大小对方案进行排序，即可得到决策方案集合中的最优方案。

因此，可以获得对应于不确定型多属性决策问题的理想关联度算法：

（1）对于某一不确定型多属性决策问题，设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 为方案集，$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为属性集。给出方案 x_i 在属性 u_j 下的属性值 $\tilde{a}_{ij}$（$\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^-,a_{ij}^+]$），从而构成决策矩阵的 $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$；

（2）将决策矩阵 $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$ 按式（1）和（2）转化为规范化矩阵 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$；

（3）将式（9）求得的最优权重向量 w 代入加权规范化矩阵，得到加权矩阵 $\overline{R}=(s_{ij})_{m\times n}$；

（4）利用式（10）计算理想关联度系数和矩阵；

（5）根据式（12）计算综合关联度；

（6）根据综合关联度大小得到各方案的优劣。

3 应用举例

某投资银行计划对四家企业 x_1，x_2，x_3 和 x_4 中选取一家具有较大投资价值的企业进行投资，选取四个指标 u_1，u_2，u_3 和 u_4 作为评估标准，已知区间数决策矩阵如表 1 所示。其中，u_1 为投资利税率，u_2 为投资净产值率，u_3 为内部收益率，均为效益型属性，而 u_4 为环境污染程度，属于成本型属性。

表 1 各方案的不确定型值

x_i	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[1.8，2.2]	[1.2，1.8]	[1.8，2.2]	[5.4，5.6]
x_2	[2.3，2.7]	[2.4，3.0]	[1.6，2.0]	[6.4，6.6]
x_3	[1.6，2.0]	[1.7，2.3]	[1.9，2.3]	[4.4，4.6]
x_4	[2.0，2.4]	[1.5，2.1]	[1.8，2.2]	[4.9，5.1]

（1）先根据表 1 中的数据建立决策矩阵：

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}[1.8,2.2] & [1.2,1.8] & [1.8,2.2] & [5.4,5.6]\\ [2.3,2.7] & [2.4,3.0] & [1.6,2.0] & [6.4,6.6]\\ [1.6,2.0] & [1.7,2.3] & [1.9,2.3] & [4.4,4.6]\\ [2.0,2.4] & [1.5,2.1] & [1.8,2.2] & [4.9,5.1]\end{bmatrix}$$

（2）由式（2）和（3）将 $\tilde{A}$ 转化为规范化决策矩阵：

$$\tilde{R}=\begin{bmatrix}[0.1059,0.1294] & [0.0750,0.1125] & [0.1139,0.1392] & [0.1178,0.1221]\\ [0.1353,0.1588] & [0.1500,0.1875] & [0.1013,0.1266] & [0.0999,0.1030]\\ [0.0941,0.1176] & [0.1063,0.1438] & [0.1203,0.1456] & [0.1434,0.1499]\\ [0.1176,0.1412] & [0.0938,0.1313] & [0.1139,0.1392] & [0.1293,0.1346]\end{bmatrix}$$

（3）根据 $\tilde{R}$ 计算得到期望值矩阵为

$$E_{\tilde{R}}=\begin{bmatrix}0.1176 & 0.0938 & 0.1266 & 0.1199\\ 0.1471 & 0.1688 & 0.1139 & 0.1015\\ 0.1059 & 0.1250 & 0.1329 & 0.1466\\ 0.1294 & 0.1125 & 0.1266 & 0.1319\end{bmatrix}$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{m} E(\bar{r}_{ij}) = 0.5 \ (\ j = 1,2,3,4\ );$$

记

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \|\bar{r}_{i1} - \bar{r}_{k1}\| = 0.3827;\quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \|\bar{r}_{i2} - \bar{r}_{k2}\| = 0.6718;$$

$$\sigma_3 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \|\bar{r}_{i3} - \bar{r}_{k3}\| = 0.1611;\quad \sigma_4 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \|\bar{r}_{i4} - \bar{r}_{k4}\| = 0.4173$$

根据公式（9）计算得权重分别为

$$w_1^* = 0.205682;\quad w_2^* = 0.117169;\quad w_3^* = 0.488528;\quad w_4^* = 0.188621$$

同时，将③中所得权重与规范化矩阵相乘，得到加权矩阵为

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} [0.0218, 0.0266] & [0.0088, 0.0132] & [0.0557, 0.0680] & [0.0222, 0.0230] \\ [0.0278, 0.0327] & [0.0176, 0.0220] & [0.0495, 0.0618] & [0.0188, 0.0194] \\ [0.0194, 0.0242] & [0.0124, 0.0168] & [0.0587, 0.0711] & [0.0270, 0.0282] \\ [0.0242, 0.0290] & [0.0110, 0.0154] & [0.0557, 0.0680] & [0.0244, 0.0254] \end{bmatrix}$$

（4）取 ρ=0.5，根据公式（11）计算得到关联系数矩阵为

$$\xi = \begin{bmatrix} 0.4340 & 0.3455 & 0.6000 & 0.4794 \\ 1.0000 & 1.0000 & 0.3333 & 0.3525 \\ 0.3538 & 0.4750 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.5610 & 0.4130 & 0.6000 & 0.6260 \end{bmatrix}$$

（5）根据式（12）$\zeta_i = \sum_{j=1}^{n} w_j^* \xi_{ij}$（$i = 1,2,\cdots,m$）计算各方案综合关联度，得到

$$\zeta_1 = 0.5133;\quad \zeta_2 = 0.5522;\quad \zeta_3 = 0.8056;\quad \zeta_4 = 0.5750$$

（6）根据各方案综合关联度大小，得到 $\zeta_3 > \zeta_4 > \zeta_2 > \zeta_1$，有各方案的优劣关系为 $x_3 > x_4 > x_2 > x_1$，最优企业为 x_3。

4 结束语

对属性权重完全未知的以区间数形式表达的不确定型多属性决策，建立离差最大化的二次函数的权重优化模型，根据与理想、负理想方案的距离建立灰色关联度，根据灰色关联度大小对区间数型方案进行排序的一种决策方法。该方法依据原始数据定量处理求得客观权重，以及进一步根据加权数据得到与理想解、负理想解的综合关联度排序，体现决策的科学性与公正性，防止主观决策的失误。同时，该方法对风险投资、虚拟企业的合作伙伴选择等领域都有重要应用价值。

（感谢上海大学文科跨越项目：社会科学与自然科学之方法异同研究资助）

参考文献

[1] Hwang C L, Yoon K. Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1981

[2] Saaty T L. A scaling method for priorities in hierarchical structures[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1977, 15: 234～281

[3] Chu A TW, Kalaba R E, Spingarn K. A comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy sets[J]. Journal of Optimization Theory and Application, 1979, 27: 531～538

[4] Hwang C L, Lin M J. Group decision making under multiple criteria: methods and applications[M]. New

的整数规划问题提出了相应的蚁群优化算法：高尚等[11]提出了一种新的蚁群算法来求解无约束的整数规划问题，蚂蚁在整数空间内运动，同时在路径上留下信息素，以此引导搜索方向。

从文献看，以往的研究仅对制造和再制造的生产和库存成本进行混合集成，尚未考虑过制造能力受限的情况。本文研究带再制造的离散受限批量问题，属于混合整数规划。由于该问题是 NP 难问题，本文以蚁群算法思想为基础，设计了一种启发式蚁群算法。

1 问题模型

已知在未来 T 周期规划时段上的需求 D_t，t=1，…，T，企业可通过新品的制造、回收品的再制造和来自前面周期的库存来满足这些需求，但不允许延期交货。每周期的新品制造能力受限，在规划时段的开始和结束的新品库存假定为 0，规划期开始的回收品库存也为零。问题是确定每周期的制造和再制造量，以最小总体成本满足规划时段的需求。在周期 t，令 d_t 为回收品数量，z_t 和 x_t 分别表示制造和再制造的数量，s_t 和 r_t 分别为制造和再制造活动发生时均需要的启动成本，w_t 和 v_t 表示制造和再制造的单位成本，I_t 和 i_t 分别表示新品和回收品的周期末的库存，H_t 和 h_t 分别为新品和回收品的单位库存费用，M_t 是新品的制造能力。变量 $signz_t$ 和 $signx_t$ 分别指示 t 周期是否启动了制造和再制造，为 1 时表示启动，为 0 时表示不启动。因此，考虑再制造的离散受限批量模型可用如下公式描述：

$$\min\sum_{t=1}^{T}(v_tx_t+r_tsignx_t+w_tz_t+s_tsignz_t+h_ti_t+H_tI_t) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad i_t=i_{t-1}-x_t+d_t,\qquad t=1,\ 2,\ \cdots T \tag{2}$$

$$I_t=I_{t-1}+x_t+z_t-D_t,\qquad t=1,\ 2,\ \cdots T \tag{3}$$

$$z_t\leqslant{}_t signz_t,\qquad t=1,\ 2,\ \cdots T \tag{4}$$

$$x_t\leqslant E\ signx_t,\qquad t=1,\ 2,\ \cdots T \tag{5}$$

$$I_t,\quad i_t,\quad x_t,\ z_t\ \geqslant 0,\qquad t=1,\ 2,\ \cdots T \tag{6}$$

$$i_0=I_0=I_T=0 \tag{7}$$

其中 E 是一任意大数，式（1）为目标函数，最小化规划期内的总体制造、再制造和库存成本。约束（2）和（3）分别表示回收品和新品的库存平衡。约束（4）和（5）分别为制造和再制造能力限制。不等式（6）为非负性约束。式（7）表示规划期开始的新品和回收品的库存量为 0，规划期结束新品库存为零。

2 蚁群优化求解算法

上述问题可被看成是典型的 TSP 问题，可用蚁群算法求解。一只蚂蚁从起点开始需经过 T 个蚁巢，向每个蚁巢运输食物，将每周期的生产需求看成是每个蚁巢必须满足的食物需求。可以将每两个周期间的每一对（制造和再制造量）取值看做是一段路径，每只蚂蚁所走的路径都可看做是一个可行解，而路径的长度就是满足周期需求所耗费的总成本值。

2.1 基本原理

蚁群算法由 M.Dorigo[12]等人于 1991 年提出，是一种模拟蚁群觅食过程寻求最短路径的群体智能算法。蚂蚁在觅食过程中会在其走过的路径上留下信息素，当一些路径上通过的蚂蚁越来越多时，信息素也会越来越多，它可以被其他蚂蚁察觉到并使它们选择信息素浓度较高的路径觅食，从中寻找最优路径。

为了描述方便，令 $d_{1j}=\sum_{t=1}^{j}d_t$，$D_{1j}=\sum_{t=1}^{j}D_t$

我们设 $A_t=d_{1t}-D_{1t}$，则由上述模型中的等式推出：

$$i_t+I_t=A_t+\sum_{i=1}^{t}z_i \qquad t=1,\ 2,\ \cdots T \tag{8}$$

那么目标函数（1）式就可以表示为：

$$\sum_{t=1}^{T}(v_tx_t+r_t signx_t+w_tz_t+s_t signz_t+h_t\sum_{i=1}^{t}z_i+H'_tI_t)+C$$

$$=\sum_{t=1}^{T}(v_tx_t+r_t signx_t+w_tz_t+s_t signz_t+h_{tT}z_t+H'_tI_t)+C$$

其中 $H'_t=H_t-h_t$； $C=\sum_{t=1}^{T}h_tA_t$； $h_{tT}=\sum_{j=t}^{T}h_j$。

观察上面变形后的目标函数很明显可以看出只要 $z_t>0$，就将增加回收产品的库存成本。

2.1.1 对变量 z_t，x_t 的初始化

对变量 z_t，x_t 的初始化可以分成以下两种情况考虑：

（1）在需求量不小于回收产品量（$D_t\geqslant i_t$）的情况下：

当 $s_t+D_t(w_t-v_t+h_{tT})\geqslant r_t$ 时，我们将再制造作为主要生产方式，把第 t 周期的回收产品全部进行再制造，使得回收产品库存为 0；然后将不能满足的那部分需求用制造的新制品来补足，并且保证新制品的零库存。两个生产量的具体计算公式如下：

$$x_t=i_t \tag{9}$$

$$z_t=random(\max\{0,-A_t-\sum_{i=1}^{t-1}z_i,D_t-i_t\},M_t) \tag{10}$$

当 $s_t+D_{tT}(w_t-v_t+h_{tT})\leqslant r_t$ 时，则可以将制造活动作为主要生产方式，按第 t 周期需要的产品数量进行制造活动，如果超过了制造能力，那么不能满足的那部分需求用再制造的产品来补足，并且保证新产品的零库存。

（2）在需求量小于回收产品量（$D_t<i_t$）的情况下：

当 $s_t+D_{tT}(w_t-v_t+h_{tT})\geqslant r_t$ 时，我们将再制造作为主要生产方式，把第 t 周期的回收产品全部进行再制造，使得回收产品库存为 0；即只需使 $x_t=D_t$，不进行制造活动。

当 $s_t+D_t(w_t-v_t+h_{tT})\leqslant r_t$ 时，我们将制造作为主要生产方式，按第 t 周期需要的产品数量进行制造活动，如果超过了制造能力，那么不能满足的那部分需求用再制造的产品来补足，并且保证新产品的零库存。

而由于 z_t 的大小是有限制的，所以可能会出现 $M_t<D_t-i_t$ 的情况，这时我们就需要对第 t-1 个周期的制造和再制造量进行以下调整：

$$z_{t-1}=z_{t-1}+\ (D_{t-1}-i_{t-1}-M_{t-1}) \tag{11}$$

确定 z_t 和 x_t 后即可推出 $signz_t$，$signx_t$，I_t，i_t，这样根据公式（1）可以计算出满足每个蚁巢需求的所需的成本：$sum(t)=v_tx_t+r_t signx_t+w_tz_t+s_t signz_t+h_ti_t+H_tI_t$

2.1.2 对信息素变量的初始化

m 只蚂蚁走过每个蚁巢都会留下信息素 τ_{k0}（t）：

$$\tau_{k0}(t)=Q/\sum_{t=1}^{T}sum_{k0}(t) \tag{12}$$

其中 τ_{k0}（t）表示初始化时第 k 个蚂蚁在第 t 周期路径上的信息量， Q 为常数。

每只蚂蚁走完所有蚁巢都会得到一个完整的路径，从而可以求出 m 个路径中的最短路径。在每个周期中也会产生一个分段的路径（体现在每个周期对 z_t 和 x_t 变量的选择上），我们把每个周期的 z_t 和 x_t 变量所产生的信息素都放到 τ_{k0}（t）中存放，使其作为下次选择这两个变量的依据。

因为 z_t 和 x_t 的每种不同取值都代表了一条不同的路径，但由于这些不同的取值很多，无法给每种取值都事

先设置信息素存储空间，所以我们不记录所有的路径的信息素，而只是保存一部分路径的信息素作为以后的选择依据。我们设只保留 N 个路径的信息素，而这 N 个路径的信息素的值应该比其他路径的信息素都大，即这些留下的路径是按照它们对应的信息素值的降序排列，进而筛选出信息素最大的前 N 个路径，但这样做需要排序，比较麻烦，则我们采用比较简单的方法筛选，具体筛选方法见下面的信息素的更新原则。（设 N 大于蚂蚁的数量 m）

我们用 τ_i（t）来存储 N 个路径的信息素，它们的原始值均为 0。当我们计算出初始化下 m 只蚂蚁的初始值时，我们就将这些蚂蚁在不同周期时的制造量和再制造量取值进行总结：取值相同的蚂蚁的信息素进行合并叠加，简单的相加即可，并将此取值作为一个路径选择，将叠加后的信息素值存入 τ_i（t）；取值不同的蚂蚁直接将信息素存入 τ_i（t）中，直到将所有 m 个蚂蚁的信息素都存入其中。由于 N 值不等于 m，N 个 τ_i（t）在初始化时不一定都会用到，所以我们按照 i 的升序排列将相应信息素值依次存入 τ_i（t）。

2.1.3 对信息素值的更新原则

迭代过程中要对全局信息素进行更新，由于我们所保存的路径有限，所以对保留下来的路径要通过所对应的信息素值进行筛选，在第 j 次迭代过程中信息素的更新方法如下：

（1）如果蚂蚁 k 在第 t 周期的取值与 τ_i（t）中任意一个相同，则使用如下公式叠加：

$$\tau_i(t) = \tau_i(t) \times \rho + \Delta\tau_{kj}^*(t) \tag{13}$$

$$\Delta\tau_{kj}*(t) = \begin{cases} Q / \sum_{t=1}^{T} sum_{kj}(t) & \text{如果蚂蚁k在第}t\text{周期的路径与}\tau_i(t)\text{所对应的路径相同} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\rho\in[0,1]$表示信息素残留系数；$\Delta\tau_{kj}^*$（t）表示蚂蚁引起的路径上的信息素量的增加；$\sum_{t=1}^{T} sum_{kj}(t)$ 是由蚂蚁 k 第 j 次迭代中找出的路径长度。

（2）如果蚂蚁 k 在第 t 周期的取值与 τ_i（t）中任意一个都不相同，则先按照如下公式给其赋初值：

$$\tau_{kj}(t) = Q / \sum_{t=1}^{T} sum_{kj}(t) \tag{15}$$

然后将其与 N 个 τ_i（t）依次作比较，如果 τ_{kj}（t）大，就用 τ_{kj}（t）替换当前的 τ_i（t），如果 τ_{kj}（t）小，就继续依次比下去，直到 i=N。如果 τ_{kj}（t）比任何一个 τ_i（t）都小，那么就舍弃这个路径，不做信息素记录。

（3）没有叠加也没有被替换的路径所对应的信息素值按照（13）和（14）公式进行全局更新。

2.2 路径选择和启发式的运用

由于蚂蚁对路径的选择和前面周期的路径选择有一定的关系，比如上个周期如果有存货那么这个周期的产量就可以适当减少，我们所保留的 N 个路径并不是所有的都符合被选择的要求，因此我们在对第 t 周期的路径选择时需要考虑第 t-1 周期的各变量情况，有些不符合要求的路径我们将不予选择。要想成为蚂蚁 k 的备选路径必须满足下列两个条件：

（1）这个路径的选择必须使蚂蚁 k 能满足第 t 周期的产品需求，即满足下式：

$$I_{t-1} + x_t + z_t \geq D_t \tag{16}$$

（2）这个路径的选择必须保证再制造的数量不超过回收产品的当前数量，即满足下式：

$$x_t \leq i_{t-1} + d_t \tag{17}$$

由信息正反馈原理[13]和启发式算法，蚂蚁 k 按照以下转移概率公式对第 t 周期的路径进行选择：

$$P_{ik}(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\tau_i(t)+\beta\eta_i(t)}{\sum_{i=1}^{N}\alpha\tau_i(t)+\beta\eta_i(t)} & \tau_i(t)\text{所对应的路径是蚂蚁k的备选路径} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \tag{18}$$

式中 $\tau_i(t)$ 表示在第 t 周期保留的第 i 个路径上的信息素量；$\eta_i(t)$ 是前一轮迭代后保留的第 i 个路径中分段路径长度的倒数，表示蚂蚁保持前一轮所保留的路径的期望程度。参数 α（$0\leqslant\alpha\leqslant1$）表示信息素对路径选择的重要性。为加快搜索进程，通常采用局部贪婪搜索策略，即每次均从当前可选择策略中选取使目标函数值增长最小的策略。β（$0\leqslant\beta\leqslant1$）就是作为启发因子来调节局部搜索相对于信息素的重要程度。

由于所有路径我们不能都进行信息素的记录，N 个路径选择的有限性很容易让算法陷入局部搜索的困境，所以我们在对路径选择方面，除了使蚂蚁选择以 $P_{ik}(t)$ 概率选择对应的 $\tau_i(t)$ 所代表的路径之外，还以 $1-\sum_{i=1}^{N}P_{ij}(t)$ 的概率按照以下策略对 z_t 和 x_t 的值进行调整以期找到更优的路径。（根据公式（18）推出 $1-\sum_{i=1}^{N}P_{ij}(t)$ 一定不小于 0）

这时要想进一步降低总成本，就需要考虑如何降低生产成本。首先我们考虑通过降低启动成本来实现总成本的最小化，因为不管生产多少产品，只要启动一次制造或再制造活动就一定要付出相应的启动成本，所以如何降低制造和再制造活动的次数就成为我们要研究的重点。因为再制造活动可以降低回收产品的库存，从降低成本方面我们优先考虑再制造，所以要想使每个周期不进行再制造活动的可能性较小，因此我们应该更多地考虑减少制造活动的次数。

所以在由式（18）确定的路径选择概率对路径重新选择时，我们要对原来的最优路径所对应的一些变量取值进行如下调整：

如果 $s_{t+1}/(H_t+w_t-w_{t+1}) \geqslant D_{t+1}-d_{t+1}-I_{t-1}$，则表明 t 周期可以多制造新产品使在 t+1 周期不用启动制造活动也可以满足 t+1 周期的需求，这样就可以免去 t+1 周期的启动成本。即：

$$z_t=D_{t+1}-d_{t+1}-I_{t-1}+D_t-d_t-I_{t-1} \tag{19}$$

但这无疑使得 t 周期的产品库存增加，而新品的单位库存成本一般都较之回收产品的单位库存成本高，所以这时就要考虑将再制造产品的数量降低尽量使得产品库存为 0，则

$$x_t=\text{random}\,(d_t+I_{t-1}-D_{t+1}+d_{t+1},\quad d_t+I_{t-1}) \tag{20}$$

其中 random（x， y）是指随机抽取（x，y）范围内的一个正整数。针对以上的调整公式（19）和（20），必须要满足它们各自的前提条件才能进行，否则不调整。

2.3 具体算法流程

Step1. 初始化：

（1）定义参量和变量，给相关参变量赋初值。

（2）初始化 m 个蚂蚁的数据，按照“基本原理”中得出第 t 周期解 z_t 和 x_t；根据 m 个总成本值求最小总成本，并根据式（15）初始化信息素的值。

Step2. 循环变量 n 初值为 1，根据式（13）和（14）式更新信息素的值；

Step3. 根据“路径选择和启发式的运用”中的策略求出可行解；

Step4. 根据 m 个总成本值求最小总成本，更新当前最优解并输出；

Step5. 当 n 不满足循环结束条件时（循环的停止条件为相邻两次循环搜索中最优解的差别小于 0.001），令 n：$=n+1$，转到 Step2，否则执行 Step6；

Step6. 输出 Step5 中得到的最优解。

3 数值算例

为测试算法的效率和有效性，采用 Java 对编程以上提出的算法，在 Eclipse SDK 3.2.0 环境下编译，运行在 Pentium IV CPU 2.80GHz，512MB 内存的台式电脑上。

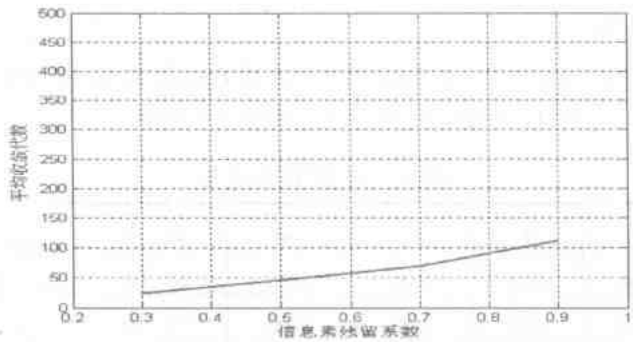

图 1 信息素残留系数 ρ 与平均收敛代数的关系

3.3 实验结果分析

从图 1 中可以看出，随着迭代次数增多，所求的总成本一直处于下降的趋势，等迭代到一定代数时就收敛了。

因为在蚁群算法中，蚂蚁是具有记忆功能的，随着时间的推移，以前留下的信息素会逐渐消逝。算法中用 ρ 表示信息素残留系数，而 1-ρ 表示信息素挥发程度。由于蚁群算法有收敛速度慢、易于导致局部最优的缺点。信息素残留系数的取值会影响到整个算法的全局搜索能力和收敛的速度。当信息素残留系数取值过小时，以前搜索过的路径（出现过的可行解）被再次选中的可能性过大，会影响算法的随机性能和全局搜索能力；而如果增大信息素残留系数，虽然可以提高算法的随机性和全局搜索能力，但是会使收敛的速度降低。

后来通过对信息素残留系数 ρ 取值的改变的仿真实验，可以看出它对算法的收敛速度影响比较大，算法的平均收敛代数随着残留系数的增大有变大的趋势。因此折中考虑收敛速度和全局搜索能力两方面因素，我们选择信息素残留系数 ρ 为 0.5 较好。

4 结束语

本文利用信息素对转移概率的影响，保证了算法的优化效果，并通过模型中各个成本的线性关系对关键变量的取值进行了有效的调整。在算例中，我们可以看到一些参数（如 ρ）的选择有一定的随意性，所以通过调整它们的大小可能会使算法更快地收敛。而且在本文中只是讨论了所有需求都可以得到满足的场景，即并未考虑缺货或外包等情况，下一步可以就这些情况进行更具体、全面的研究。

参考文献

[1] 徐滨士，刘世参，王海斗. 大力发展再制造产业[J]. 求是，2005（12）

[2] Schrady, D.A. A deterministic inventory model for repairable items[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1967（14）: 391～398

[3] K.Richter, Mirko Somvrutzki. Remanufacturing planning for the reverse Wagner/Whitin models[J]. European Journal Operational Research, 2000, 121: 304～315

[4] K.Richter, Jens Weber. The reverse Wagner/Whitin model with variable manufacturing and remanufacturing cost[J]. International Journal of Production Economics, 2001, 71: 447～456

[5] H.W. Wagner, T.H. Whitin. Dynamic version of the economic lot size model[J]. Management Science 1958（5）: 88～96

[6] I. Konstantaras, S. Papachristos. Optimal policy and holding cost stability regions in a periodic review inventory system with manufacturing and remanufacturing options[J]. European Journal Operational

Research

[7] Wilco van den Heuvel. On the complexity of the lot-sizing problem with remanufacturing options[J]. Econometric Institute Report EI 2004, 46

[8] Golany, J.Yang, G.Yu. Economic lot-sizing with remanufacturing options[J]. IIE Transactions, 2001,33: 995～1003

[9] 林锦，朱文兴. 凸整数规划问题的混合蚁群算法[J]. 福州大学学报，1999，27（6）：5～9

[10] 黄樟灿，吴方才，胡晓林. 基于信息素的整数规划的演化求解[J]. 计算机应用研究，2001，18（7）：27～29

[11] 高尚，杨静宇，非线性整数规划的蚁群算法[J]. 南京理工大学学报（自然科学版），2007，28：126～130

[12] Dorigo M, GambardellaL M. Ant colony system: Acooperative learning approach to the travelling salesman problem[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 1997,1（1）: 53～66

[13] Dorigo M, Maniezzo V, Colorni A. Ant system：optimization by a colony of cooperating agent [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1996, 26（1）: 29～41

HEURISTIC ANT COLONIES ALGORITHM OF CAPACITATED LOT-SIZING PROBLEM WITH REMANUFACTURING

MA Yan[1] ZHONG Jin-hong[1] HUANG Ling[2] HUANG Shu-hui[1]

(1. School of Management, Hefei University of Technology Hefei 230009;
2. Electronic Engineering Institute Hefei 230037)

Abstract: In this paper the dynamic lot-sizing problem with remanufacturing and capacitated manufacturing capacity is studied. The manufacturing, remanufacturing and holding costs are all time-varying linear functions in the model, and the manufacturing and remanufacturing cost includes variable cost. A heuristic ant colonies optimization algorithm is designed. According to the ranges of feasible solutions of manufacturing and remanufacturing quantity in every peroid, the solutions of the problem are initialized by the zero-inventory-priority principle. Through the iteration, the pheromone of feasible solutions is adjusted by the selective routes of the last round, and the saving routes are chosen by the transfer-probability, or the relevant local heuristic process to adjust the saving solution for a better result is started. Finally, a numerical example is used to illustrate the validity and practicability of the method, and it is discussed that how to choose the value of some parameters.

Keywords: Dynamic lot-sizing problem, Ant colonies algorithm, Remanufacturing