



齿轮设计  
丛书

CHILUN SHEJI  
CONGSHU

# 齿轮啮合原理

吴序堂编著

机械工业出版社

齿轮设计丛书

---

# 齿轮啮合原理

吴序堂 编著



机械工业出版社

本书系统而扼要地论述了齿轮啮合的基本原理，并且适当介绍了国内外在这个领域的新成果。主要内容为平面啮合、螺旋面及其加工和空间啮合的基本原理，空间啮合的相对滑动及诱导法曲率，空间啮合的二次接触及其应用，准双曲面齿轮传动的基本原理等。

本书初稿是作为高等学校机械工艺及其设备专业的选修课及齿轮课题的研究生教材而编写的。在组织《齿轮设计丛书》时，将本书列入了丛书，并对内容重新进行了充实。因此，本书可供从事齿轮设计、制造的工程技术人员参考，也可作高等院校教学用书。

## 齿 轮 啮 合 原 理

吴序堂 编著

\*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业登记证出字第117号）

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经销

\*

开本  $787 \times 1092 \frac{1}{32}$  · 印张  $13 \frac{1}{4}$  · 字数 290 千字  
1982年1月北京第一版·1982年1月北京第一次印刷  
印数 00,001—8,200 · 定价 1.40 元

\*

统一书号：15033·5229

# 齿轮设计丛书

## 出版说明

齿轮是应用非常广泛的重要传动元件。随着科学技术的飞跃发展，对齿轮传动提出了越来越高的要求。为适应形势的需要，总结、介绍国内外先进经验与技术，特决定组织出版这套《齿轮设计丛书》，以利提高我国齿轮设计、生产水平。

本丛书内容包括：齿轮啮合原理、齿轮传动的精度理论、各类齿轮传动（包括特殊齿轮）和各类蜗杆传动的设计、齿轮的试验技术与设备等等。内容着重于介绍设计的理论基础、设计方法、设计参数以及数据的分析选择等，力图满足齿轮传动设计者的需要。因此，本丛书主要供从事齿轮设计、制造工作的工程技术人员参考。丛书将分若干分册陆续出版。

由于水平有限，书中难免有错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

## 前 言

齿轮是机器和仪器中应用最为广泛的一种机械传动元件，它可以传递两平行轴、相交轴和交错轴之间的回转运动，因此形式很多，如直齿圆柱齿轮、非圆齿轮、斜齿轮及螺旋齿轮传动，蜗轮蜗杆、锥齿轮及准双曲面齿轮等。不仅如此，随着现代化工业的飞速发展，对齿轮传动的性能和质量不断提出新的要求，也不断出现新的齿形。例如，近几年来出现的双圆弧齿轮、平面二次包络弧面蜗轮副等，已在一些机械行业中逐步推广应用，并获得了良好的效果。

机器的高速和大负荷，要求提高齿轮的制造精度和承载能力，而生产批量的扩大，则要求相应地提高齿轮加工的生产率，因此，新的齿轮制造技术也不断出现。

不论是研究新的齿轮传动形式还是研究新的齿轮加工技术，都需要掌握齿轮啮合的基本原理，而目前一些有关齿轮传动的文献中用得较多的方法，是根据一种传动形式或齿形的特殊性质来研究这种齿轮。例如，就渐开线的特殊性质来研究渐开线齿轮等，因而得到的一些结论对于其他齿轮就不一定适用。在当前已经出现的形式繁多的齿轮传动和加工方法面前，这种研究方法已经不能完全适应生产的需要。实践的发展使得既有必要也有可能去研究齿轮啮合的普遍理论。由于这种理论的高度的概括和科学的抽象，可以更正确、更完善地反映齿轮啮合的本质，发现不少在研究个别齿轮传动时难以得到的规律，从而可以更深入和更有效地推动各种具体齿轮传动的研究工作。

近几年来，由于国内广大科学技术工作者的努力，齿轮

啮合原理的研究得到了迅速的发展,取得了不少重大的成果。

本书的目的是系统而扼要地论述内轮啮合的基本原理,并且适当介绍一些国内外在这个领域的新成果。本书内容主要是平面啮合、螺旋面及其加工和空间啮合的基本原理,空间啮合的相对滑动及诱导法曲率,空间啮合的二次接触及其应用等。由于我们的目的是论述齿轮啮合的普遍理论,所以一些重要的齿轮传动只是作为普遍理论的实例而进行分析的,对于这些齿轮传动的更详细的分析可以参看有关的专著。只有最后一章——准双曲面齿轮传动的基本原理是例外,一则因为它是空间啮合的最普遍的形式,通过对它的分析可以加深对前面几章的理解,二则因为目前国内专门论述这种齿轮传动原理的著作不多,所以单独辟为一章。

本书的初稿是作为高等学校机器制造工艺及其设备专业的选修课和齿轮课题的研究生用的教材而编写的,书中广泛地吸收了西安交通大学机制教研室刀具教学小组和齿轮研究组多年来的研究成果及教学经验。现在修订出版,仍保留着教科书的由浅入深、循序渐进的特点,以便读者学习。

本书初稿承浙江大学叶显樵同志和郑州机械科学研究所张希康同志仔细审阅并提出了许多宝贵的修改意见;此外,西安交大机制教研室刀具小组的同志也审阅了本书的初稿,特别是乐兑谦老师,对不少章节提出了具体的修改意见,这些都对本书质量的提高起了很大的作用,特在此表示衷心的感谢。

本书牵涉的面较广而编者水平有限,书中一定有不少错误疏漏之处,热忱地希望广大读者批评指正。

编者

一九七九年十月于西安交通大学

# 目 录

## 前言

第一章 平面啮合的基本原理 .....	1
一、瞬心线 .....	1
二、齿形啮合基本定理 .....	16
三、共轭齿形的形成及其求法的基本概念 .....	17
四、轮转曲线与卡姆士定理 .....	19
五、平面坐标的变换 .....	21
六、共轭齿形的求法——齿形法线法 .....	31
七、根据已知的啮合线求共轭齿形 .....	43
八、平面啮合共轭齿形的曲率及其关系 .....	55
九、博比利厄法则及其应用 .....	64
十、平面啮合的滑动系数 .....	72
十一、过渡曲线 .....	81
十二、平面啮合的两类界限点 .....	86
第二章 螺旋面及其加工原理 .....	93
一、等升距圆柱螺旋面 .....	93
二、刀具回转面与工件螺旋面的接触条件 .....	114
三、已知工件螺旋面求刀具回转面截形 .....	118
四、已知刀具回转面求它加工的工件螺旋面 .....	122
五、盘形刀具加工螺旋面时的过渡表面及其消除办法 .....	132
六、干涉现象及其校验 .....	138
第三章 空间啮合的基本原理 .....	145
一、采用的坐标系及其变换 .....	145
二、相对运动速度 .....	152
三、相对螺旋运动及瞬轴面 .....	155
四、啮合方程式 .....	163

五、空间啮合运动的自由度 .....	167
六、单自由度啮合计算及实例 .....	168
七、双自由度啮合计算及实例 .....	187
八、三自由度啮合计算及实例 .....	204
九、点接触螺旋齿轮副的齿面计算 .....	212
十、点接触滚刀齿面的计算 .....	223
<b>第四章 空间啮合的相对滑动及诱导法曲率 .....</b>	<b>231</b>
一、法曲率的基本知识 .....	231
二、相切曲面的诱导法曲率及诱导短程挠率 .....	247
三、关于空间相对运动的基本知识 .....	254
四、轴线固定的齿轮副共轭齿面的相对滑动 .....	265
五、两类界限点的基本概念 .....	276
六、线接触共轭齿面的诱导法曲率及诱导短程挠率 .....	278
七、界限点处的法曲率及其性质 .....	292
八、给定齿面 $\Sigma^I$ 的参数时诱导法曲率的计算 .....	297
九、诱导法曲率的另一种计算方法 (巴克斯特方法) .....	301
<b>第五章 空间啮合的二次接触及其应用 .....</b>	<b>313</b>
一、空间啮合的二次接触及啮合界限 .....	313
二、啮合界限点的另一表示法 .....	317
三、啮合界限点处共轭齿面的相互关系 .....	321
四、平面啮合的啮合界限点和二次包络 .....	327
五、平面二次包络蜗轮副 .....	330
<b>第六章 准双曲面齿轮传动的基本原理 .....</b>	<b>342</b>
一、准双曲面齿轮副的瞬轴面及产形轮 .....	342
二、准双曲面齿轮副分度圆锥参数的计算 .....	350
三、螺旋角及压力角 .....	357
四、极限压力角及极限齿线曲率 .....	363
五、瞬时轴与分度平面的相对位置 .....	368



六、	啮合面与分度平面的交线在 $P$ 点的切线与齿线 $t$ 的 夹角 .....	370
七、	齿面上瞬时接触线方向与 $v^1 I$ 的夹角 .....	376
八、	在法向截面内, 啮合面在 $P$ 点的切线与分度平面 的夹角 .....	380
九、	法向诱导法曲率 .....	382
十、	其他方向的诱导法曲率及诱导短程挠率 .....	384
附录	.....	386
一、	矢量运算 .....	386
二、	矩阵浅说 .....	404
参考文献	.....	411

# 第一章 平面啮合的基本原理

随着机器工业的迅速发展，各种新型齿轮和齿轮加工新工艺的应用也日益增加。单就齿廓形状来说，目前，除了渐开线之外，其它齿形也是用得越来越广泛了。为了适应这种发展趋势，有必要研究齿轮啮合的一般理论，探讨它们的共同规律，作为研究各种具体的齿轮传动特性和加工方法的基础。本章介绍的就是平面啮合的基本原理。

所谓平面啮合，是指轴线平行的直齿齿轮副啮合，由于这种齿轮副在垂直于它们轴线的任一截面中的啮合情况是完全一样的，所以只需研究其中一个截面的情况，即平面上的啮合情况即可。

## 一、瞬心线

### 1. 相对运动及瞬心线方程式

设有两个直齿齿轮，它们的轴线平行，在垂直于轴线的任一截面内，齿轮的中心为 $o_1$ 及 $o_2$ （图1-1），齿轮的瞬时角速度为 $\omega_1$ 及 $\omega_2$ ，从起始位置起的转角为 $\varphi_1$ 及 $\varphi_2$ ，则

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$$

瞬时传动比 $i_{12}$ 为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\varphi_1}{dt} \bigg/ \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \quad (1-1)$$

如果齿轮副不是以等传动比传动，则 $i_{12}$ 是个变数，它可

以表示为齿轮 1 的转角  $\varphi_1$  的函数, 即

$$i_{12} = f(\varphi_1) \quad (1-2)$$

当传动比是常值时,

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

设平面 I 随同齿轮 1 绕  $o_1$  旋转, 瞬时角速度用矢量表示为  $\omega^I \ominus$ ; 平面 II 随同齿轮 2 绕  $o_2$  旋转, 瞬时角速度矢量为  $\omega^I$ ,  $\omega^I$  及  $\omega^I$  的模就是上述的  $\omega_1$  及  $\omega_2$ 。在任意一点  $M$  处, 齿轮 1 对于齿轮 2 的相对运动速度矢量  $v^{II}$  的求法如下:

$M$  点随 I 转动时的线速度矢量  $v^I$  为

$$v^I = \omega^I \times r^I$$

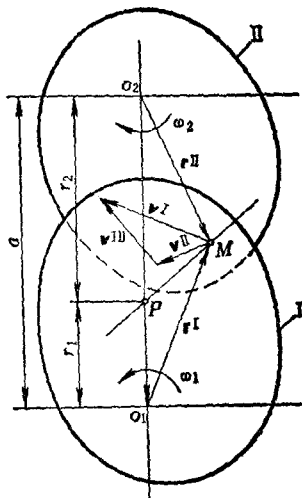


图1-1 两齿轮的相对运动

$M$  点随 II 转动时的线速度矢量  $v^I$  为

$$v^I = \omega^I \times r^I$$

上面二式中,  $r^I = o_1M$ ,  $r^I = o_2M$ 。

相对运动速度  $v^{II}$  即为

$$v^{II} = v^I - v^I = \omega^I \times r^I - \omega^I \times r^I \quad (1-3)$$

如果从  $o_2$  向  $o_1$  引一个矢量  $a$ , 它的模就是中心距  $\sigma$ , 则

$$r^I = r^I + a$$

所以  $\omega^{II}$  又可写成

$\ominus$  角速度矢量的方向用右手法则确定, 即如果以右手四指指向转动方向, 则大拇指就是角速度矢量的方向。

$$\mathbf{v}^{1I} = (\boldsymbol{\omega}^I - \boldsymbol{\omega}^I) \times \mathbf{r}^I - \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}^{1I} \times \mathbf{r}^I - \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{a} \quad (1-4)$$

式中的  $\boldsymbol{\omega}^{1I}$  称为相对角速度，而且

$$\boldsymbol{\omega}^{1I} = \boldsymbol{\omega}^I - \boldsymbol{\omega}^I \quad (1-5)$$

$M$  点的位置不同，该点处的相对运动速度  $\mathbf{v}^{1I}$  也不同。对于  $\mathbf{v}^I = \mathbf{v}^I$  的点， $\mathbf{v}^{1I} = 0$ 。由于这点的  $\mathbf{v}^I$  与  $\mathbf{v}^I$  方向相同，模也相等，它必定在中心联线  $o_1o_2$  上（否则  $\mathbf{v}^I$  和  $\mathbf{v}^I$  的方向就不可能相同），设它为图 1-1 中的  $P$  点，而  $o_1P = r_1$ ， $o_2P = r_2$ ，则从  $\mathbf{v}^I$  和  $\mathbf{v}^I$  的模相等的条件可知， $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ 。

所以瞬时传动比成为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1-6)$$

注意不要把矢量  $\boldsymbol{\omega}^I$ ， $\boldsymbol{\omega}^I$  与标量  $\omega_1$ ， $\omega_2$ （即  $\boldsymbol{\omega}^I$ ， $\boldsymbol{\omega}^I$  的模）相混，也不要 把  $\mathbf{r}^I = o_1M$ ， $\mathbf{r}^I = o_2M$  与  $r_1 = o_1P$ ， $r_2 = o_2P$  相混。

$P$  点处的相对运动速度  $\mathbf{v}^{1I}$  既为零，则它也就是两平面（齿轮）的瞬时相对运动中心（瞬心），而且

$$\mathbf{v}^{1I} = \boldsymbol{\omega}^{1I} \times \mathbf{PM} \quad (1-7)$$

这可以证明如下：由图 1-1，

$$\mathbf{r}^I = o_1P + \mathbf{PM}$$

$$\mathbf{r}^I = o_2P + \mathbf{PM}$$

代入式 (1-3)，

$$\mathbf{v}^{1I} = \boldsymbol{\omega}^I \times o_1P + \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{PM} - \boldsymbol{\omega}^I \times o_2P - \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{PM}$$

而  $\boldsymbol{\omega}^I \times o_1P = \boldsymbol{\omega}^I \times o_2P$ ，所以得到

$$\mathbf{v}^{1I} = \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{PM} - \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{PM} = \boldsymbol{\omega}^{1I} \times \mathbf{PM}，即式 (1-7)。$$

由此可知，任意点  $M$  处的相对运动速度  $\mathbf{v}^{1I}$ ，就等于这

一点以角速度  $\omega^{\text{II}}$  绕  $P$  转动时的线速度。由此又可知， $v^{\text{II}}$  是与  $MP$  垂直的。

由于  $P$  点在联心线  $o_1o_2$  上，而且  $\frac{o_2P}{o_1P} = \frac{r_2}{r_1} = i_{12}$ ，当传动比  $i_{12}$  是变数时，在齿轮传动过程中， $P$  点的位置也是在  $o_1o_2$  上变动的。 $P$  点在平面 I 及 II 上的轨迹就称为齿轮 1 及 2 的瞬心线（图 1-2）。

由于两瞬心线在任意瞬时都只接触在一点（瞬心），而在接触点处它们的相对运动速度又等于零，所以它们作相对的纯滚动。如果把两个瞬心线做成摩擦轮并且让它们作纯滚动，那么它们的运动规律和两个齿轮的运动规律是一样的。

下面来求瞬心线的方程式。首先，因

$$r_1 = a - r_2 = a - i_{12} r_1$$

所以 
$$r_1 = \frac{a}{1 + i_{12}} = \frac{a}{1 + f(\varphi_1)} \quad (1-8)$$

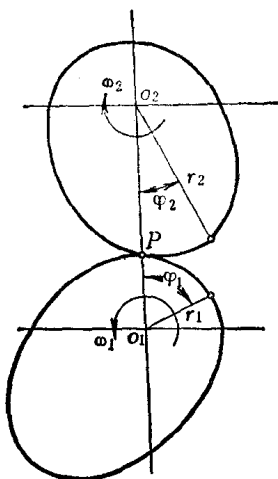


图1-2 瞬心线

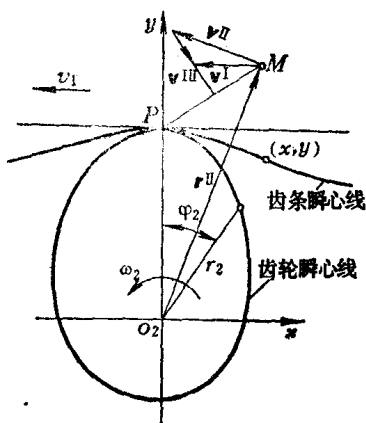


图1-3 齿条与齿轮啮合

由于中心距  $a$  是常值，所以上式就表示齿轮 1 的瞬心线方程式  $(r_1, \varphi_1)$ 。

齿轮 2 的瞬心线方程式  $(r_2, \varphi_2)$  可由式 (1-1) 及 (1-8) 知道为

$$\left. \begin{aligned} r_2 = a - r_1 &= a \frac{i_{12}}{1 + i_{12}} = a \frac{f(\varphi_1)}{1 + f(\varphi_1)} \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{f(\varphi_1)} d\varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式 (1-8) 及 (1-9) 是两瞬心线的极坐标方程式，它们的极角大小分别等于两齿轮的转角值  $\varphi_1$  及  $\varphi_2$ ，而在作出瞬心线的形状时则要注意，根据图 1-1 规定的转动方向，齿轮 1 的  $\omega_1$  是逆时针方向转动的，所以它的极角应该是从起始位置  $o_1P$  起顺时针方向量取  $\varphi_1$  角；同样，因齿轮 2 的  $\omega_2$  是顺时针方向转动的，所以它的极角应该是从起始位置  $o_2P$  起逆时针方向量取  $\varphi_2$  角，如图 1-2 所示。

齿条与齿轮啮合时的情况也可以用类似的方法分析（图 1-3）。设齿条平移的瞬时速度矢量为  $\boldsymbol{v}^I$ ，它的模为  $v_1$ ；齿轮转动的瞬时角速度矢量为  $\boldsymbol{\omega}^I$ ，它的模为  $\omega_2$ ，则齿条与齿轮的瞬时传动比  $i_{12}$  为

$$i_{12} = \frac{v_1}{\omega_2} = \psi(\varphi_2)$$

上式表示当传动比  $i_{12}$  是变数时，把它表示为齿轮转角  $\varphi_2$  的函数。

齿条与齿轮在任意点  $M$  处的相对运动速度  $\boldsymbol{v}^{II}$  为

$$\boldsymbol{v}^{II} = \boldsymbol{v}^I - \boldsymbol{v}^I = \boldsymbol{v}^I - \boldsymbol{\omega}^I \times \boldsymbol{r}^I \quad (1-10)$$

和齿轮副啮合时相似，此时，相对运动速度  $\boldsymbol{v}^{II} = 0$  的瞬心一定位于通过  $o_2$  并且与  $\boldsymbol{v}^I$  垂直的直线上，设这一点是

$P$ ，而  $o_2P = r_2$ ，则

$$\omega_2 r_2 = v_1$$

所以 
$$r_2 = \frac{v_1}{\omega_2} = \psi(\varphi_2) = i_{12} \quad (1-11)$$

同样可以证明，在任意一点  $M$  处的相对运动速度，就等于这一点以角速度  $-\omega^I$  绕  $P$  点转动时的线速度。

当传动比  $i_{12}$  是变数时，从上式可知  $r_2$  是变化的，即在传动过程中  $P$  点的位置是变动的，而它在齿条和齿轮平面上的轨迹分别是它们的瞬心线。同样，两瞬心线是作相对的纯滚动的。

现在来求齿条和齿轮的瞬心线方程式。从式 (1-11) 可以看到，当把传动比  $i_{12}$  表示为齿轮转角  $\varphi_2$  的函数  $\psi(\varphi_2)$  时，该式也就是齿轮 2 的瞬心线方程式 ( $r_2, \varphi_2$ )。

以  $o_2$  为原点作在空间固定的坐标系 ( $o_2 - x, y$ )，则因  $r_2\omega_2 = v_1$ ，可以写成

$$r_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

所以齿条的瞬心线在此坐标系中的方程式为

$$\left. \begin{aligned} y = r_2 = \psi(\varphi_2) \\ x = \int_0^{\varphi_2} r_2 d\varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

显然，上式的  $x$  也就相当于齿轮 2 从起始位置转过  $\varphi_2$  角时，齿条移动的距离。

当传动比  $i_{12}$  是常值时，齿轮副传动的瞬心线方程式 (1-8) 和 (1-9) 成为

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{a}{1+i_{12}} = \text{常值} \\ r_2 &= a \frac{i_{12}}{1+i_{12}} = \text{常值} \\ \varphi_2 &= \varphi_1 / i_{12} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

由于  $r_1$  和  $r_2$  都是常值，所以瞬心线是两个圆，通常称为节圆； $P$  点的位置不动，称为节点。

当传动比  $i_{12}$  是常值时，齿条与齿轮传动的瞬心线方程式 (1-11) 及 (1-12) 成为

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= i_{12} = \text{常值} \\ y &= r_2 \\ x &= r_2 \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

此时， $r_2$  和  $y$  都是常值，齿轮的瞬心线是个圆（节圆），齿条的瞬心线是平行于  $x$  轴并与它相距  $r_2$  的直线（节线），瞬心点  $P$  的位置固定不动（节点）。

在具体计算齿轮副的瞬心线时，一般是先根据它们的结构尺寸及运动要求，给定中心距  $a$ 、传动比函数  $i_{12} = f(\varphi_1)$  以及齿轮 1 的转角范围  $\varphi_{1\min} \sim \varphi_{1\max}$ ，然后由式 (1-8) 求得在此范围内齿轮 1 的瞬心线方程式，再由式 (1-9) 求得齿轮 2 的瞬心线方程式以及相应的转角范围  $\varphi_{2\min} \sim \varphi_{2\max}$ ，这一对瞬心线就确定了。

**例1-1** 传动比随转角均匀变化的非圆齿轮副瞬心线

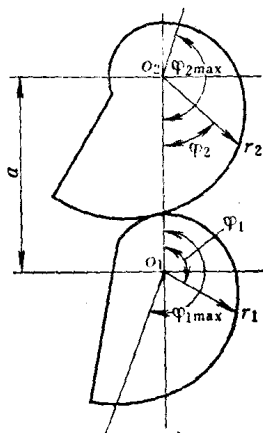


图1-4  $i_{12}$ 随 $\varphi_1$ 均匀变化的一对瞬心线



设给定中心距  $a$  及主动齿轮 1 的转角范围  $\varphi_1 = 0 \sim \varphi_{1\max}$ , 要求的传动比: 当  $\varphi_1 = 0$  时为  $i_0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_{1\max}$  时为  $i_m$ ,  $i_m < i_0$ , 而  $i_{12}$  在此范围内随转角  $\varphi_1$  均匀变化, 所以它与  $\varphi_1$  的函数关系为

$$i_{12} = i_0 - K\varphi_1$$

式中的  $K$  由下式确定, 它是个常数,

$$K = \frac{i_0 - i_m}{\varphi_{1\max}}$$

由式 (1-8), 齿轮 1 的瞬心线方程式为

$$r_1 = \frac{a}{1 + i_{12}} = \frac{a}{1 + i_0 - K\varphi_1}$$

由式 (1-9), 齿轮 2 的瞬心线方程式为

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= a \frac{i_{12}}{1 + i_{12}} = a \frac{i_0 - K\varphi_1}{1 + i_0 - K\varphi_1} \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{i_0 - K\varphi_1} d\varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

令  $i_0 - K\varphi_1 = u$

则  $d\varphi_1 = -\frac{1}{K} du$

注意  $u = i_{12}$  总是正值, 所以  $\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{i_0 - u}{K} - \frac{1}{Ku} du = -\frac{1}{K}$

$$\left| \ln u \right|_0^{\varphi_1} \frac{i_0 - u}{K} = -\frac{1}{K} \left| \ln(i_0 - K\varphi_1) \right|_0^{\varphi_1}$$

最后得到

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{1}{K} \ln \left( 1 - \frac{K\varphi_1}{i_0} \right) \\ r_2 &= a \frac{i_0 - K\varphi_1}{1 + i_0 - K\varphi_1} \end{aligned} \right\}$$