从微分观点看拓扑

〔美〕J. W. 米尔诺著

熊　金　城　译

海科学技术出版社

从微分观点看拓扑

〔美〕J. W. 米尔诺 著
熊金城 译

上海科学技术出版社

TOPOLGY

From the Differentiable Viewpoint

by J. W. Milnor

The University Press of Virginia Charlottesville,

U. S. A. 1965

从微分观点看拓扑

〔美〕J. W. 米尔诺　著

熊金城　译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张4　字数84,000

1983年7月第1版　1983年7月第1次印刷

印数 1—14,000

书号：13119·1098　　定价：(科五)0.48元

译 者 的 话

本书分为两部分，是根据著名数学家 J. Milnor 的两篇著作《从微分观点看拓扑》和《微分拓扑》译出的.

翻开本书第I部分——《从微分观点看拓扑》,熟悉了几个微分拓扑学中的基本概念之后，便会看到著名的代数基本定理的一个简洁的证明，而这一定理用其它任何一种方法证明都是颇费周折的；再越过一二个定理，接着出现的是大家十分熟悉的 Brouwer 不动点定理，即令是在代数拓扑学的专著中，这个定理也并非如此呼之即出；……真使人禁不住要一气读下去，饱览数学的这一领域中迭出的奇景．以如此短小的篇幅，而又如此引人入胜地向读者展示出微分拓扑学的巨大功效，不能不说是这篇著作的最大特色．这篇著作的第二个特点是直观和严谨：涉及的概念，大多可以“看”得见，而论证的逻辑却又经得起严格的推敲(个别地方，作者在作了清晰的交待之后，省略了个别技术性的细节以使主题更为突出)．这篇著作的第三个特点是浅入深出：凡学过多元微积分和少量点集拓扑的读者在开始阅读此书时都不会感到有什么困难；但最后达到的境界即使是对拓扑学有一定程度了解的读者，也并非每人都可以等闲视之.

与《从微分观点看拓扑》相比较，本书第 II 部分——《微

分拓扑»的特点则是系统地论述微分拓扑学这一领域中的几个重要专题：嵌入与浸入理论，向量空间丛的理论和协边理论．也是从头讲起，并不需要读者具有许多有关的专门知识．

这两部分内容，从逻辑上讲是互相独立的，读者完全可以根据自己的需要任意选读其中一篇．但是，它们之间却又有着丰富的内在联系．例如，«微分拓扑»从内蕴的观点出发定义微分流形，并且在第一节中处理了微分流形在欧氏空间中的嵌入问题，指出每一微分流形均可嵌入于某一维数的欧氏空间；而«从微分观点看拓扑»恰恰从嵌入在欧氏空间中的微分流形入手讨论问题．因此，将这两篇材料放在一起可能会有相得益彰之妙，故将译本合并为一本书同时介绍给读者．

根据上述，我们认为本书的第 I 部分——«从微分观点看拓扑»适合于大学数学系高年级学生、研究生以及在不同领域工作的数学工作者阅读，以作为了解微分拓扑学的导引；第 II 部分——«微分拓扑»则可作为大学数学系高年级学生或研究生开设微分拓扑学选修课程的教材或参考读物．此外，读者必须注意，本书两部分对于同一术语的定义，虽然实质上是一致的，但就形式逻辑而言，并不相同．

在翻译本书的过程中，曾得到中国科学院系统科学研究所吴文俊教授的支持、鼓励和帮助，谨于此致谢．

限于译者的水平，译文中不当之处在所难免，敬希读者批评指正。

译　者　于中国科学技术大学

1982 年 5 月

目　录

I. 从微分观点看拓扑

II. 微 分 拓 扑

I. 从微分观点看拓扑

序

在培基-巴布(Page-Barbour)讲演基金会的资助下，这些讲演于1963年12月在弗吉尼亚(Virginia)大学发表. 其中介绍了拓扑学初期的某些论题，这些论题是以1912年L. E. J. Brouwer的映射度的定义为中心的. 然而，我们用的是微分拓扑的方法而不是Brouwer的组合方法. 正则值的概念以及断定每一光滑映射都有正则值的Sard定理和Brown定理在本书中起核心作用.

为陈述简单起见，所有的流形都取为无限次可微的并且明确地嵌入在欧氏空间中的流形. 少量点集拓扑学和实变理论的知识是众所周知的，在此不予叙证.

J. W. M.

1965年3月于新泽西州

普林斯顿

§1 光滑流形和光滑映射

首先说明一些术语：R^k 表示 k 维欧氏空间，于是一个点 $x\in R^k$ 便是实数的一个 k 重组 $x=(x_1, \cdots, x_k)$.

设 $U\subset R^k$, $V\subset R^l$ 都是开集. 如果从 U 到 V 的映射 f (写作 $f: U\to V$) 的所有偏导数 $\partial^n f/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}$ 都存在且连续，则称 f 为*光滑映射*.

更为一般的情形：设 $X\subset R^k$ 以及 $Y\subset R^l$ 为欧氏空间的任意子集，$f: X\to Y$. 如果对于每一个 $x\in X$, 存在着包含 x 的开集 $U\subset R^k$ 以及光滑映射 $F: U\to R^l$, 使得 F 与 f 在 $U\cap X$ 上是一致的，则称 f 为*光滑映射*.

如果 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$ 都是光滑的，注意复合映射 $g\circ f: X-Z$ 也是光滑的. 任一集合 X 的恒同映射显然是光滑的.

定义 如果映射 $f: X\to Y$ 将 X 同胚地变到 Y 上，并且 f 与 f^{-1} 两者都是光滑的，则称 f 为*微分同胚*.

现在可以粗略地说：*微分拓扑学是研究集合* $X\subset R^k$ *在微分同胚下不变的性质的学科*.

在此，我们不想去考察那些完全任意的集合 X, 而用下述定义挑选出特别引人注目和特别有用的一类.

定义 设 $M\subset R^k$. 如果每一点 $x\in M$ 都有一个邻域

$W\cap M$ 微分同胚于欧氏空间 R^m 的某一个开子集 U，则称 M 为 m 维光滑流形.

任一特定的微分同胚 $g: U\to W\cap M$ 都称为区域 $W\cap M$ 的一个参数化(逆微分同胚 $g^{-1}: W\cap M\to U$ 称为 $W\cap M$ 上的一个坐标系).

有时，我们必须考察零维流形. 根据定义，如果每一个 $x\in M$ 有一邻域 $W\cap M$ 由 x 独点组成，则 M 是零维流形.

例 由所有满足 $x^2+y^2+z^2=1$ 的点 $(x, y, z)\in R^3$ 组成的单位球 S^2 是 2 维光滑流形. 事实上，当 $x^2+y^2<1$ 时，微分同胚

$$(x, y)\mapsto(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$

将 S^2 中 $z>0$ 的区域参数化了. 用互换 x、y、z 以及改变变量符号的办法，得到 $x>0$, $y>0$, $x<0$, $y<0$ 以及 $z<0$ 的区域类似的参数化. 由于这些区域覆盖 S^2，所以 S^2 是一个光滑流形.

更为一般的情形是：由所有满足 $\sum x_i^2=1$ 的点 $(x_1, \cdots, x_n)\in R^n$ 组成的球 S^{n-1} 是 $n-1$ 维光滑流形. 例如 $S^0\subset R^1$ 是由两个点组成的流形.

光滑流形的一个多少有点不规整的例子是所有满足条件 $x\neq0$ 和 $y=\sin(1/x)$ 的点 $(x, y)\in R^2$ 的集合.

切空间和导射

为了对光滑流形间的光滑映射 $f: M\to N$ 定义导射 df_x 的概念，首先将每一点 $x\in M\subset R^k$ 联系一个 m 维线性子空间 $TM_x\subset R^k$，并称之为 M 在点 x 处的切空间. 然后，df_x 将是一个从 TM_x 到 TN_y 的线性映射，其中 $y=f(x)$. 向量空间 TM_x 的元素称为 M 在点 x 处的切向量.

人们直观地联想到 R^k 中的在点 x 附近最好地逼近 M 的 m 维超平面，TM_x 便是既通过原点而又平行于上述超平面的超平面(参看图 1 和图 2). 类似地，人们联想到从点 x 处的切超平面到点 y 处的切超平面的、最好地逼近 f 的非齐次线性映射. 把这两个超平面都平移到原点去，便得到 df_x.

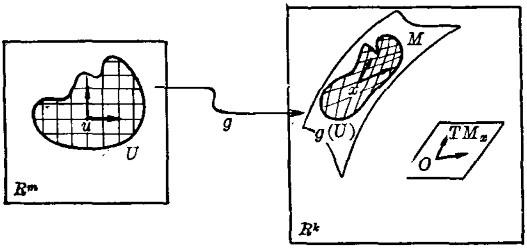

图 1　M 中区域的参数化

在给出实际定义之前，必须研究开集间的映射这一特殊情形. 对于任意开集 $U\subset R^k$，切空间 TU_x 定义为整个向量空间 R^k. 对于任一光滑映射 $f: U\to V$，导射

$$df_x: R^k\to R^l$$

用下列公式定义：当 $x\in U$，$h\in R^k$，

$$df_x(h)=\lim_{t\to 0}(f(x+th)-f(x))/t.$$

显然，$df_x(h)$ 是 h 的线性函数. [实际上，df_x 恰好是与在点 x 处取值的一阶偏导数的 $l\times k$ 阶矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j)_x$ 相应的线性映射.]

下面是导射运算的两个基本性质：

1. (链法则)　若 $f: U\to V$ 和 $g: V\to W$ 都是光滑映射，$f(x)=y$，则

$$d(g\circ f)_x=dg_y\circ df_x.$$

换言之，R^k、R^l、R^m 的开子集之间的光滑映射的每一个可交换的三角形

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & W \end{tikzcd}$$

对应着一个线性映射的可交换的三角形

$$\begin{tikzcd} & R^l \arrow[dr, "dg_y"] & \\ R^k \arrow[ur, "df_x"] \arrow[rr, "d(g\circ f)_x"'] & & R^m \end{tikzcd}$$

2．若 I 为 U 的恒同映射，则 dI_x 为 R^k 的恒同映射．更为一般的情况是：如果 $U\subset U'$ 都是开集，并且

$$i: U\to U'$$

为包含映射，则 df_x 也是 R^k 的恒同映射．

还要注意：

3．若 $L: R^k\to R^l$ 为线性映射，则 $dL_x=L$．

作为这两个性质的简单应用，有下述论断：

论断 若 f 是开集 $U\subset R^k$ 与 $V\subset R^l$ 之间的微分同胚，则 k 必定等于 l，并且线性映射

$$df_x: R^k\to R^l$$

必定是非蜕化的．

证明 复合映射 $f^{-1}\circ f$ 是 U 的恒同映射，因此 $d(f^{-1})_y\circ df_x$ 是 R^k 的恒同映射．类似地，$df_x\circ d(f^{-1})_y$ 是 R^l 的恒同映射．于是 df_x 有双边的逆，因此推得 $k=l$．

这一论断的部分逆命题为真．令 $f: U\to R^k$ 为光滑映射，其中 U 为 R^k 中的开集．

反函数定理 如果导射 $df_x: R^k\to R^k$ 是非蜕化的，则 f 将

围绕 x 的任一充分小的开集 U' 微分同胚地映到开集 $f(U')$ 上.

(见 Apostol[2, p. 144]或 Dieudonné[7, p. 268].)*)

注意：即使在每一点处，df_x 都是非退化的，在大范围内 f 却可以不是一一的.(一个有意思的例子是复平面到自身的指数映射.)

现在对任意光滑流形 $M\subset R^k$ 定义切空间 TM_x：选取 M 中 x 的邻域 $g(U)$ 的一个参数化

$$g: U\to M\subset R^k$$

$g(u)=x$. 此处 U 是 R^m 的开子集. 将 g 认作是从 U 到 R^k 的映射. 所以导射

$$dg_u: R^m\to R^k$$

已有定义. 命 TM_x 等于 dg_u 的像 $dg_u(R^m)$(参见图 1).

我们必须证明这种构作法不依赖于参数化 g 的特殊选取. 令 $h: V\to M\subset R^k$ 为 M 中的点 x 的邻域 $h(V)$ 的另外一个参数化，且令 $v=h^{-1}(x)$. 则 $h^{-1}\circ g$ 将 u 的某一邻域 U_1 微分同胚地映到 v 的一个邻域 V_1 上. 开集间的光滑映射的交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & R^k & \\
U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"'] & & V_1 \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

引出线性映射的交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & R^k & \\
R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\cong", "d(h^{-1}\circ g)_u"'] & & R^m \arrow[ul, "dh_v"']
\end{tikzcd}$$

---

*) 亦可参看本书第 II 篇 §1 的 1.5.——译注

而由此直接推得 dg_u 的像等于 dh_v 的像，即

$$\mathrm{Image}(dg_u)=\mathrm{Image}(dh_v).$$

于是，TM_x 是完全确定的.

证明 TM_x 是 m 维向量空间：因为

$$g^{-1}: g(U)\to U$$

是光滑映射，所以可以选取一个包含 x 的开集 W 以及一个光滑映射 $F: W\to R^m$，使 F 在 $W\cap g(U)$ 上与 g^{-1} 一致. 令 $U_0=g^{-1}(W\cap g(U))$，我们有交换图表

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "F"] & \\ U_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "包含"] & & R^m \end{tikzcd}$$

因此有交换图表

$$\begin{tikzcd} & R^k \arrow[dr, "dF_x"] & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "恒同"] & & R^m \end{tikzcd}$$

这一图表显然蕴含 dg_u 秩为 m，因而它的像 TM_x 为 m 维.

现在考虑两个光滑流形 $M\subset R^k$ 和 $N\subset R^l$，以及光滑映射

$$f: M\to N,$$

并设 $f(x)=y$. 导射

$$df_x: TM_x\to TN_y$$

定义如下：由于 f 是光滑的，所以存在着包含 x 的开集 W 以及在 $W\cap M$ 上与 f 一致的光滑映射

$$F: W\to R^l.$$

对于所有 $v\in TM_x$，定义 $df_x(v)$ 等于 $dF_x(v)$.

为了验证这一定义，必须证明 $dF_x(v)$ 属于 TN_y 并且不依赖于 F 的特殊选取.

对于 x 的邻域 $g(U)$ 和 y 的邻域 $h(V)$ 选取参数化

$$g: U \to M \subset R^k \quad 和 \quad h: V \to N \subset R^l.$$

如果必要的话，用一个较小的集合替换 U，可以假定 $g(U) \subset W$，以及 f 将 $g(U)$ 映到 $h(V)$ 中．从而

$$h^{-1} \circ f \circ g: U \to V$$

是完全确定的光滑映射.

考虑开集间的光滑映射的交换图表

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "F"] & R^l \\
U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1} \circ f \circ g"] & V \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

取导射，得到线性映射的交换图表

$$\begin{tikzcd}
R^k \arrow[r, "dF_x"] & R^l \\
R^m \arrow[u, "dg_u"] \arrow[r, "d(h^{-1} \circ f \circ g)_u"] & R^n \arrow[u, "dh_v"']
\end{tikzcd}$$

其中 $u = g^{-1}(x)$； $v = h^{-1}(y)$.

这立即推出 dF_x 将 $TM_x = \mathrm{Image}(dg_u)$ 变到

$$TN_y = \mathrm{Image}(dh_v)$$

中．从而得到的映射 df_x 不依赖于 F 的特殊选取，因为绕着图表的底部走能得到同一个线性变换. 此即

$$df_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}.$$

这就证明了 $\qquad df_x: TM_x \to TN_y$

是完全确定的线性映射.

象前面一样，导射运算具有两个基本性质：

1．（链法则） 若 $f: M \to N$ 以及 $g: N \to P$ 都是光滑的，$f(x) = y$，则

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

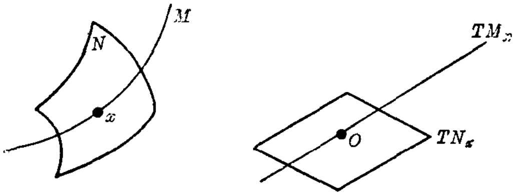

图 2　子流形的切空间

2. 若 I 是 M 的恒同映射，则 dI_x 是 TM_x 的恒同映射. 更一般些，如果 $M\subset N$，i 是包含映射，则 $TM_x\subset TN_x$，di_x 也是包含映射(参见图 2).

证明是简易的.

象前面一样，由这两个性质可导出如下论断:

论断　若 $f: M\to N$ 是微分同胚，则 $df_x: TM_x\to TN_y$ 是向量空间的同构. 特别，M 的维数必定等于 N 的维数.

正则值

设 $f: M\to N$ 为维数相同的[*]两个流形之间的光滑映射. 如果在 $x\in M$ 处导射 df_x 是非蜕化的，则称 x 是 f 的正则点. 这时，从反函数定理推出 f 将 M 中 x 的某一邻域微分同胚地映到 N 中的一个开集上. 对于 $y\in N$，如果 $f^{-1}(y)$ 只包含正则点，那么 y 称为正则值.

若 df_x 是蜕化的，则 x 称为 f 的临界点，并且像 $f(x)$ 称为临界值. 于是每一点 $y\in N$ 是临界值还是正则值按照 $f^{-1}(y)$ 包含还是不包含临界点而确定.

注意：若 M 是紧致的并且 $y\in N$ 是正则值，则 $f^{-1}(y)$ 是有限集(可能是空集). 这是因为：一方面，在任何情况下，

[*] 在 §2 中这一限制将取消. ——原注