微分几何与拓扑学教程

第一册

〔苏〕А.С.Мищенко А.Т.Фоменко 著

张爱和 译 胡和生 姜国英 校

高等教育出版社

微分几何与拓扑学教程

第一册

[苏] А. С. Мищенко
А. Т. Фоменко 著

张爱和 译

胡和生 姜国英 校

高等教育出版社

本书系按照莫斯科大学出版社1982年出版的、A. C. Мищенко, A. T. Фоменко 著《Курс Дифференциалыюй Геометрии ц Топологии》一书翻译的，原书经苏联高等与中等专业教育部批准作为大学数学—力学专业大学生的教科书.

中文译本分三册出版，第一册内容：微分几何概论，一般拓扑，光滑流形(一般理论)；第二册内容：光滑流形(例)；第三册内容：张量分析和黎曼几何，同调论，黎曼几何的简单变分问题，本书可作为我国综合大学数学专业的参考书；亦可作为研究生或数学工作者、数学教师的参考书.

微分几何与拓扑学教程

（第一册）

〔苏〕 A. C. Мищенко
A. T. Фоменко 著

张爱和 译

胡和生 姜国英 校

[illegible]出版

新华书店[illegible]发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.125 字数 120 000

1989年10月第1版 198 年10月第1次印刷

印数 00,001—1 ,500

ISBN7-04-002540-X/0·846

定价 [illegible]元

序　言

微分几何与拓扑学是数学的重要分支. 二十世纪理论物理和力学的蓬勃发展，使得在这些学科中几何概念是基础性质的得到了解. 例如，在相对论、连续介质力学、电动力学等学科中，几何的方法是主要的数学工具就足以说明这一点.

本教程是讲授微分几何与拓扑学的基础. 这个领域中现在的状况是由于许多辈的数学家努力的结果. 叙述几何发展历史的困难在于，现在许多几何问题和思想的表达方式上和以前大不相同了. 数学中几乎所有的几何的(不仅几何的)方法都按新的观点去理解. 从现代的观点来看，本教科书中所叙述的几何与拓扑学的基础是建立在某些基本的思想之上的，这些思想可简略地叙述如下.

点集拓扑，或一般拓扑——这是几何学的一个分支，它吸收了研究收敛性和连续性问题一般的形式方法. 几何中的重要思想——利用曲线坐标系的思想，终于导致张量分析和不变量的理论. 如果数学分析和微分方程的理论主要是研究函数"小范围"(一点到另一点的距离无穷小)的性质，那么几何就研究函数和其他类似的对象的"大范围"(即一点到另一点距离足够大)的性质. "大范围"地研究几何对象这个直观思想引出了流形的基本概念，这是欧氏空间区域概念的推广.

把上述的思想结合在各种具体的应用之中，这对几何的进一步发展同样是重要的：积分理论的几何解释，从"小范围"空间研究到"大范围"空间研究的直观过程，经过形式化和代数化形成了同

调理论；非线性函数和映射的线性近似的几何解释，在几何中的共同状况原理；等等.

所有这些几何思想，是在解决实际问题时产生的，它们既有助于问题的解决，也促进了几何概念和方法的发展．现在，微分几何、拓扑学的有关概念与解析几何、线性代数或其他数学分支所形成的几何概念有时是难以区分的.

在欧几里得《原本》中得到完善的古代几何，极其微弱地触及微分几何的发展．只有一个问题，在许多世纪内以为是最主要的问题，在微分几何的领域内找到简单的和自然的解答方法．这就是关于欧几里得第五公设的证明问题．欧几里得第五公设的叙述离其自明性和它对其他公理的依赖性显得是这么遥远，以至在许多世纪的时期中数学家设法在其他公理的基础上给予证明都毫无效果．在欧洲，首先企图证明第五公设的，看来是Льв Герсон(1288—1344)．有这样一些数学家从事过第五公设的证明，如K. Клавий(1574)，П. Катальди(1603)，Дж. борелли(1658)，Дж. Вимале (1680)，J. Wallis (1663)，Д. Ж. Саккерти (1733)，J. H. Lambert (1766)，A. M. Legendre (1800)，F. K. Schweikart (1818)，F. A. Taurinus(1825)，甚至还有C. F. Gauss. 虽然，企图证明第五公设是无效果的，而这些研究的作用是巨大的——它们奠定了发展新的非欧几何的基础.

伟大的俄罗斯数学家 Н. И. Лобачевский(1792—1856) 是以否认第五公设为基础的几何的创始者．在 1826 年，他首先发表了新的、非欧几何学，从此开辟了几何概念发展的新时代．在1832年 J. Bolyai 发表了类似内容的著作．C. F. Gauss 也得到了同样的思想，他没有发表他的著作.

如果说 Н. И. Лобачевский 导出他的非欧几何是基于公理方法的研究，那么在几何中新的思想的进一步发展则牵涉到另外的

原则，这些原则是与用坐标来确定几何对象有关的．坐标早在古代科学家就已在地理和天文学中使用过．Ptolemy 的《地理》中已经遇到作为数值坐标的纬度和经度．在欧洲，N. Oresme (1323—1382) 用图解给出函数时，已经用到近似于坐标的思想．但是，在他那里谈不上是坐标．笛卡儿 (1596—1650) 和 P. Fermat (1601—1665) 是坐标方法的创始人，并在此基础上建立了解析几何．其实，曲线坐标系统的研究与 Лобачевский 的思想相结合确实导致了微分几何的蓬勃发展．黎曼 (1826—1866) 迈出了原则上新的一步——开始研究起任意的所谓黎曼空间，它已经在力学，相对论等方面找到了重要的应用．出现了很快发展的、大的几何分支——向量、张量运算和黎曼几何学．

和黎曼几何同时，拓扑学的基础也奠定了，它作为几何一个分支是研究连续性的．当然拓扑的起源应该在无穷小分析中寻找．但是，真正地具有拓扑性质的第一批论文是属于 L. Euler (1707-1783) 和 C. Jordan (1838-1922) 的．在 20 世纪初创立了拓扑学的基础 (M. Fréchet, F. Hausdorff, H. L. Lebesgue, L. Brouwer) H. Poincaré 在创立拓扑学及其应用方面起了重大的作用．目前，拓扑学是正在急剧地发展的领域．

稍早一些以前，微分几何的一个分支——曲面论已经定型．曲面论是从 L. Euler 和 G. Monge 的工作开始的．非线性坐标，向量和张量运算，曲面论的结合以及几何概念在各种不同的自然科学问题中的有效性，引出了几何中最重要的概念——流形．看来，首先明确地区分出这个概念的是 H. Poincaré (1854—1912)．当前，流形的概念已在数学的思维中已如此扎实地生根了，以至不可能指出这样的数学家，他们是单单从事流形理论研究的．

最后，还应该谈到一个基本的原理，它在发展和了解几何和近代物理的许多基本问题中起着重要的作用．这就是所谓群的方法，

这种方法的基础在于几何对象关于空间对称群的不变性的思想。在几何中，群的方法是在研究射影几何时发生的，并且联系着Poncelet, Staudt, Möebius, Plücker, Cayley 的名字. 在 1872 年，F. Klein 的著名的工作出来了，它后来获得了"爱尔朗根纲领"的名称. 在这篇文章中，F. Klein得出了结论并明确地形成了构作几何的群的原则. 群的方法给发展微分几何和拓扑学以及发展几何学时对自然科学的各种应用以很大的影响，虽然应该指出不是整个几何方法的多样性都能归结为几何的群的观点.

在发展微分几何与拓扑学方面，作出很大贡献的数学家是非常多的. 我们仅指出，俄罗斯和苏联的几何学家在这个发展中给出了重要的影响。

目　　录

第一章　微分几何概论

§1　曲线坐标　最简单的例子

1. 引论

我们来考察 n 维欧氏空间，今后用 $\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间．把 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点与实数组——点关于 $\boldsymbol{R}^n$ 中选定的正交基的坐标，基向量用 $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \cdots, \vec{e}_n$（长度为 1 单位且互相正交的向量）表示——相对应，我们就认为在 $\boldsymbol{R}^n$ 中选取并建立了笛卡儿坐标 $x^1, \cdots, x^n$，借助于此坐标可以唯一地确定 $\boldsymbol{R}^n$ 中任何一点的位置．利用实数组（也可理解为从坐标原点出发到这点的向径的坐标）描述欧氏空间点的思想，是用纯代数方法能解答许多几何问题的解析几何的基础．这个重要的思想首先（以明显的形式）由笛卡儿引入数学，他的名字已铭刻在“笛卡儿坐标”这个名称中了．几何代数化不仅对几何的发展，而且对整个数学的发展都起着非常重要的作用．这里，我们不打算列举用代数(解析)的方法可简单且优美地解答问题的一些已知的例子(例如，三维空间中二阶曲面的分类问题)，这些例子，读者可参看代数和解析几何教程．我们仅提醒一下，欧氏数量积概念与 $\boldsymbol{R}^n$ 中的笛卡儿坐标紧密地联系着，数量积为双线性形式，它将每一对向量 $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \boldsymbol{R}^n$ 与一实数相对应，后者通常被表示为 $\langle\vec{\xi}, \vec{\eta}\rangle$，而且这个对应关系的运算对每个向量是对称的和线性的，而形式本身是正定的．在笛卡儿坐标系中，

$$\langle\vec{\xi}, \vec{\eta}\rangle = \xi^1\eta^1 + \cdots + \xi^n\eta^n,$$

其中 $\vec{\xi}=(\xi^1,\ \cdots,\xi^n)$, $\vec{\eta}=(\eta^1,\cdots,\eta^n)$.

但是，最简单的例子就可说明，要很方便地把许多具体问题用解析法表示出来，笛卡儿坐标是不够的. 例如，我们用具有笛卡儿坐标 x,y 的平面上曲线的方程表示法来表明这一点. 当然，当所讨论的是十分简单的曲线时，例如圆或椭圆，那么它们在笛卡儿坐标下的解析表达式是非常简单和自然的. 事实上，半径为 R，中心在 A 点的圆的方程写作：$(x-A^1)^2+(y-A^2)^2=R^2$，这里 $A=(A^1,A^2)$.

椭圆的方程也简单地写为：$(x-A^1)^2/a^2+(y-A^2)^2/b^2=1$，其中数 a,b 是椭圆的主半轴的长(图 1).

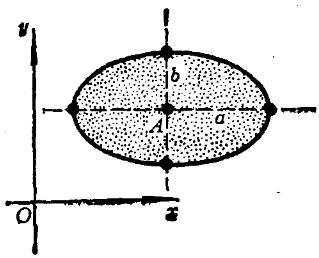

图 1

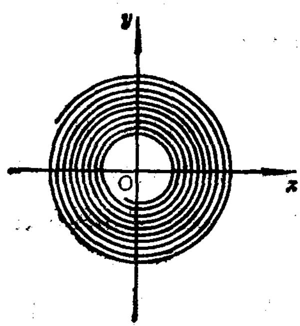

图 2

然而，在各种应用和具体的力学及物理学问题中，往往遇到这样的光滑曲线(譬如说，质点在任何力场中运动的轨迹)，它们在笛卡儿坐标下的显式表达式是很困难的. 例如在笛卡儿坐标下方程 $\sqrt{x^2+y^2}-e^{\lambda\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)}=0$ 所确定的螺线就是这样(图 2). 当然，在笛卡儿坐标下这个曲线的表示法或许还不很复杂，但是在另外的所谓平面极坐标系下，写出这个曲线却是甚为简单的. 极坐标系 $(r,\ \varphi)$ 与笛卡儿坐标系之间的关系为：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$(图

3). 在这个坐标系下螺线的方程为 $r=e^{\lambda\varphi}$，以此可立即看清质点按此轨迹运动的特性. 在下面我们还要讨论极坐标系，而这里仅指出这种坐标(称为曲线坐标)的出现，不是数学家在研究中追求标新立异的怪癖，而在某种意义下出于实际上的必要，有时在具体的计算中还是非常有益的. 我们指出(暂不详述)一个问题，对它利用极坐标是有益的.

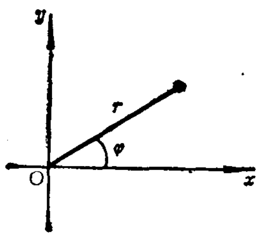

图 3

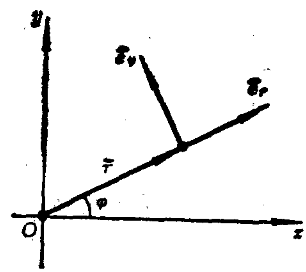

图 4

我们考察在平面中心力场中的质点运动；设中心在 O 点，并在平面上引用极坐标 (r,φ). 假设 $\vec{r}$ 是动点的向径(由 O 点发出的向径)，r 是它的长，t 是时间(运动参数)，这时 r 和 φ 是时间的某个函数. 在极坐标为 $r=|\vec{r}|$、φ 的点 $\vec{r}(t)$，考察两个垂直的单位向量：向量 $\vec{e}_r$，它的指向平行于该点的向径(这时满足 $\vec{r}=r\vec{e}_r$)；向量 $\vec{e}_\varphi$，它垂直于 $\vec{e}_r$，且其方向为极坐标 φ 的增加方向(图 4). 我们在 $\vec{r}(t)$ 上加点，即“$\dot{\vec{r}}(t)$”表示向径 $\vec{r}(t)$ 关于时间 t 的微分. 那么，在力学中已经知道，在平面中心力场中的质点(为简便起见，可把它的质量看作 1) 的运动由下面的微分方程确定：$\ddot{\vec{r}}=f(r)\vec{e}_r$，这里 f 是一个变量 r 的某个光滑的函数. 至此，我们提出一个对读者有益的问题：用平面笛卡儿坐标写出这个微分方程.

质点运动可用两个函数给出：$r=r(t)$，$\varphi=\varphi(t)$，这就是在极坐标系中的形式. 完全容易相信，质点在中心力场中运动时，量

$r^2\varphi$ 是保持不变的．这是 Kepler 定律之一，这些定律是 Kepler 研究行星在太阳系中的运动时得出的(在他的主持下，已经列表表明行星在"天球"上的坐标为时间的函数)．对这个保持不变的量完全可以赋予明显的几何意义．为此，Kepler自己引进了下面合适的概念：他称向径$\vec{r}(t)$(向径是时间的函数)扫过的面积$S(t)$变化的速度为扇形速度 v，即 $v=\frac{dS(t)}{dt}$．Kepler 定律用扇形速度的术语简述为："在相等的时间内向径扫过相等的面积，换言之，扇形速度是常数，$\frac{dS(t)}{dt}=\text{const}$．"同样可说明(我们将不在此评论)这是动量矩守恒定律的一种陈述．读者可以相信，这个定律的结论在极坐标下比在笛卡儿坐标下更为简单(虽然在笛卡儿坐标下当然也能进行计算)．

另一方面，在解力学以及物理学的具体问题时，还产生另外的(所谓"曲线的")坐标——柱面坐标，球面坐标等等．细心地观察将空间的点与实数(称为这点的坐标)的集相对应的这些不同的方法，会觉察到，作为这些对应之基础的是某个共同的思想，即设想出合理的表达形式的体系，它的特例就是上面指出的那些"曲线的"坐标(我们暂时把词"曲线的"打上引号，因为这个概念没有严格地下定义，而仅仅是求助于直观)．

2．笛卡儿坐标和曲线坐标

我们研究欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任意区域．这里提醒一下，也象分析教程中一样，区域是欧氏空间中这样的任意集合 C，它的每一点 P 与以 P 为中心，足够小的半径的球一起包含在这个集合中．我们考察用 $\mathbf{R}_1^n$ 表示的第二个欧氏空间．给出区域C 中点 P 的坐标——它意味着将这个点与一个数组对应，这个数组也可称为坐

标. 显然，任意给出这个对应时(即没有任何其他条件)，在对应可能是没有什么内容这个意义下我们就没有获得什么好的东西（希望引进的概念也象笛卡儿坐标在科学发展史上那样，带来某种好处，例如计算上的好处). 例: 区域C的每一点P与同一数组$(0,0,\cdots,0)$相对应，这样的例子是没有什么内容的. 要指出对应关系所应满足的第一个要求是: 这个对应要使区域中不同的点也对应不同的数组(坐标). 上面提到的例子(区域C中所有的点有同一个"坐标"——零坐标)是不满足这个要求的.

于是，我们希望区域C的每一点P与一个n实数组相对应. 显然，这确定了n个函数的组$x^1(P),\cdots,x^n(P)$，它们的定义域为区域C；这里$x^1,\cdots,x^n$是欧氏空间$\boldsymbol{R}_1^n$的坐标.

通常要求它们是连续的甚至是光滑的(至少是对区域C的几乎所有点)，即要求在点P的位置变动很小时，它的坐标变动也很小，甚至要求点P的光滑变动也引起它的坐标光滑变化.

这样，我们考察两个欧氏空间: 具有笛卡儿坐标$y^1,\cdots,y^n$的$\boldsymbol{R}^n$和具有笛卡儿坐标$x^1,\cdots,x^n$的$\boldsymbol{R}_1^n$；设C是$\boldsymbol{R}^n$中的区域.

注 若把$\boldsymbol{R}_1^n$的点和由实数组成的长为n的序列等同起来以后，就可把欧氏空间$\boldsymbol{R}_1^n$看作"算术空间".

定义1 若函数组$x^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,x^n(y^1,\cdots,y^n)$给出了$\boldsymbol{R}^n$中区域$C$到欧氏空间$\boldsymbol{R}_1^n$中某区域$A$上的双方单值且连续的映射，则称此函数组为区域$C$的**连续坐标系**. 换句话说，$x^1(P),\cdots,x^n(P)$这函数组给出的映射有时称为区域$C$到区域$A$上的同胚（关于同胚的概念，以后将会讲到).

定义1简述了我们的希望，点P在区域C中连续变化时，它的坐标组的变化也同样是连续的. 函数$x^1(P),\cdots,x^n(P)$称为点P关于坐标映射$f:C\to A$的坐标.

例如，可以取由线性函数$x^1=y^1,\cdots,x^n=y^n$给出的恒等映射

作为坐标映射 $f:C\to A$.

若坐标映射 $f:C\to A$已经给定，有时我们将把带有坐标$x^1(P)$，$\cdots$，$x^n(P)$的点 P 写成 $P(x^1,\cdots,x^n)$的形式.

从所有连续的坐标映射中，将从区域C到区域A上的光滑映射分出来，所谓光滑映射就是，所有函数$x^1(y^1,\cdots,y^n)$，$\cdots$，$x^n(y^1,\cdots,y^n)$是其自己的变量 $y^1,\cdots,y^n$ 的光滑函数. 但是，有坐标映射 f 本身的光滑性而没有假定其逆映射 f^{-1} 的光滑性是不会给出坐标系的内容丰富的例子的，因此我们现在立刻转到定义这样的坐标系：它的两个映射 f 和 f^{-1} 都是光滑的. 为此，要求我们建立新的概念——光滑映射的 Jacobi 矩阵的概念.

设 $f:C\to A$ 是由函数组 $x^1(y^1,\cdots,y^n)$，$\cdots$，$x^n(y^1,\cdots,y^n)$给出的光滑映射.

定义2 由坐标 $x^1(P)$，$\cdots$，$x^n(P)$的偏导数组成的函数矩阵

$$df=\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}^{①}$$

称为映射 f 的**Jacobi矩阵**. 这个矩阵的行列式用 $J(f)$ 表示，并称为映射 f 的 **Jacobi 行列式**.

注 对Jacobi矩阵，我们引用的符号 df 不会与光滑函数 f 的微分记号引起混乱，因为光滑函数 f 的微分（在适当解释这个微分的时候）在这个特殊情况下也正好与 Jacobi 矩阵完全一样. 我们还要回到这个问题. 我们再一次指出，Jacobi矩阵是变的矩阵，即依赖于区域C中的点P；同样，映射 f 的 Jacobi 行列式是区域C

---

① 为使本书前后的 Jacobi 矩阵一致，这里的矩阵是原书中矩阵的转置——译注.

上的光滑函数$J(f)(P)$，$P\in C$.

定义3 若光滑函数组$x^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,x^n(y^1,\cdots,y^n)$给出区域$C$到欧氏空间$\mathbf{R}_1^n$的某个区域$A$上的双方单值的映射，并且映射的Jacobi行列式$J(f)(P)$在区域$C$的所有点不等于0，则称此光滑函数组为欧氏空间$\mathbf{R}^n$中区域$C$的**正则坐标系**.

我们指出，映射f的Jacobi行列式在区域C中所有点不为0的要求，自动地表示f的逆映射，f^{-1}不仅是连续的，而且也是光滑的. 这事实可从隐函数组的定理得到，于是，正则坐标系是由两个光滑的互逆映射给出的，它们建立起区域C和A之间的同胚. 定义3简述了我们的希望，当点P在区域C中光滑地变化时，它的坐标组的改变也是光滑的，并且“坐标点”B在区域A中光滑地变化时，对应的(在映射f^{-1}下)点P也光滑地改变. 现在我们指出，因为从上面的定义可以看出“光滑并正则的坐标系”概念本身自动地假设了已给出至少两个标准欧氏空间，它们的某个区域借助于连续且双方单值的映射而重合，对此映射再附加光滑的要求(双方都光滑).

我们给出的定义还可用另外的观点来解释. 可以认为，在欧氏空间$\mathbf{R}^n$的区域C中，从一开始已引进了笛卡儿坐标系(当两个欧氏空间$\mathbf{R}^n$和$\mathbf{R}_1^n$自然重合时利用C到A上的恒等映射). 那么，再在区域C上引进由正则映射f(即光滑的，双方单值的，Jacobi行列式不为0的映射)给出的坐标系，它可看作坐标变换：从原来的笛卡儿坐标“变为”一个区域C上的某个新的坐标系.

定义4 区域C上的正则坐标系有时也称为区域C上的**曲线坐标系**.

现在，在区域C上考察两个任意的曲线坐标系：$x^1(P),\cdots,x^n(P)$和$z^1(P),\cdots,z^n(P)$. 这就是说给定了两个正则映射：f和g，$f:C\to A\subset\mathbf{R}_1^n(x^1,\cdots,x^n)$；$g:C\to B\subset\mathbf{R}_2^n(z^1,\cdots,z^n)$，即映射$f$

和 g 分别在区域C，A与C，B间建立了双方单值、双方光滑的对应. 换句话说,区域C的每一点P与两个曲线坐标系$\{x^i(P)\}$和$\{z^i(P)\}$相对应,这里$1\leqslant i\leqslant n$. 因为对应是双方单值的,就可研究点P的坐标$\{x^i(P)\}$与它的坐标$\{z^i(P)\}$之间的对应，从而确定了映射$\psi_{x,z}:A\to B$,即$\psi_{x,z}:x^i(P)\to z^i(P)$,$1\leqslant i\leqslant n$. 称如此确定的映射$\psi_{x,z}$为区域$C$上的**坐标变换**. 在这个变换下，点$P$得到的不是原来的曲线坐标$\{x^i(P)\}$,而是新的曲线坐标$\{z^i(P)\}$.

引理 1 映射$\psi_{x,z}$是区域A到B上的双方单值、双方光滑、Jacobi 行列式不为 0 的映射.

证明 映射$\psi_{x,z}$的双方单值性直接由定义 3 得到. 映射$\psi_{x,z}$的光滑性由两个光滑映射的合成仍为光滑映射得到. 剩下验证映射$\psi_{x,z}$具有非 0 的(在区域A中每一点)Jacobi 行列式$J(\psi_{x,z})$.

实际上,映射$\psi_{x,z}$由两个映射合成：$\psi_{x,z}=g\circ f^{-1}:A\to B$(图 5). 映射$\psi_{x,z}$的Jacobi矩阵分解为映射$f^{-1}$的Jacobi 矩阵和映射$g$的Jacobi矩阵的乘积. 现在$d\psi_{x,z}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$,我们看$\frac{\partial z^i}{\partial x^i}$,因为$z^i=z^i(y^1,\cdots,y^n)=z^i(y^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,y^n(x^1,\cdots,x^n))$,其中函数$\{y^\alpha(x^1,\cdots,x^n),1\leqslant\alpha\leqslant n\}$给出了光滑映射$f^{-1}:A\to C$,所以按复合函数的微分公式得到:$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}$,这就是说 Jacobi 矩阵$d\psi_{x,z}$分解为两个矩

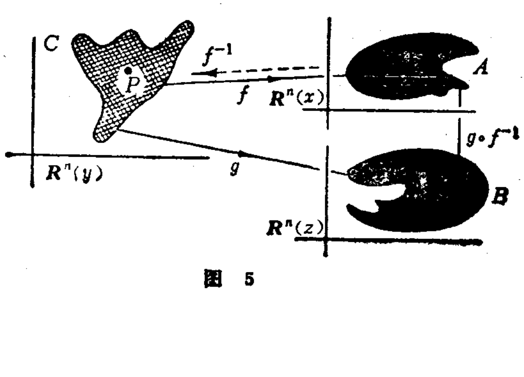

图 5