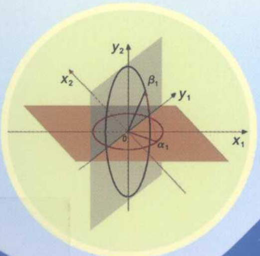
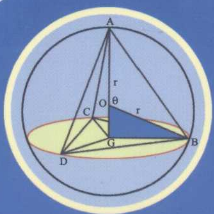
云南省普通高等学校“十二五”规划教材

初等几何研究

CHUDENG JIHE YANJIU

主 编 潘继军





重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

云南省普通高等学校“十二五”规划教材

初等几何研究

主　编　潘继军
编　者　潘继军　陈文华　高建华
　　　　谭丹英　曾赤洁　赵莉霞
　　　　费秀海　鲁翠仙　涂永玲
　　　　傅永平　郑德杨　董茂昌

重庆大学出版社

内容提要

本书内容全面结合《全日制义务教育数学课程标准》和《普通高中数学课程标准》的要求，力求适应新世纪高等师范院校数学教育教学改革的需要。全书共分 5 章，内容包括：漫谈初等几何的发展、平面几何问题、平面向量、立体几何、简单的球面几何。本书在阐述理论内容的同时，结合中学教学内容，特别是近几年高考、各种竞赛试题等，给出具体的例子，并作了详细地分析、解答。

本书既可作为高等师范院校数学教育专业本科、专科《初等几何研究》的教材，也可作为中学数学教师继续教育以及其他各级、各类数学教育教学工作者的教学科研参考书。

图书在版编目(CIP)数据

初等几何研究/潘继军主编. —重庆：重庆大学出版社，2013. 5

ISBN 978-7-5624-7305-3

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①潘… Ⅲ. ①初等几何—研究 Ⅳ. ①O123

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 063052 号

云南省普通高等学校“十二五”规划教材

初等几何研究

主编 潘继军

责任编辑：沈 静 版式设计：沈 静

责任校对：谢 芳 责任印制：张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：(023) 88617183 88617185(中小学)

传真：(023) 88617186 88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆东南印务有限责任公司印刷

*

开本：720×960 1/16 印张：13.75 字数：262 千

2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—2 000

ISBN 978-7-5624-7305-3 定价：29.00 元

【前 言】

《初等几何研究》是高等师范院校数学教育专业必选课程。2003 年 4 月，教育部颁发了《普通高中教学课程标准(实验)》，明确界定了高、初中数学课程的教学内容，为新一轮高、初中数学课程的改革指明了方向。作为基础教育课程改革的重要一环，高、初中课程改革从2004 年开始，在广东、江苏、辽宁、天津、浙江、福建、宁夏等地率先进行；江苏、辽宁、天津、浙江、福建和安徽陆续进入。2005 年初，教育部颁发了《教育部关于加强对普通高中新课程实验工作的指导意见》(2005)，至2006 年实验省份扩大到10 个，形成了“东部联片推动”的态势。云南省虽然起步较晚，但也于2009 年开始实施高中新课标。为了使高等师范院校所使用的《初等几何研究》教材适应《全日制义务教育数学课程标准》及《普通高中数学课程标准》的要求，为高等师范院校学生未来走向教学岗位时可以适应当今中学数学教学的要求打下坚实的基础，特编写此教材。

通过对老教材与新课标的系统研究，本教材具有如下特色：

1. 对初等几何研究的内容进行了新的定位。

2. 与当今现行中学几何内容相对接。

3. 增加了“平面向量及其应用、空间向量及其应用、空间几何体的三视图”等中学中的重要内容，强调三维空间与人类生存的现实空间的联系。

4. 加强了变换和坐标方面的知识。

5. 重点培养学生解决初等几何问题的能力。

6. 从学生的认识规律出发，减少大量较难的几何证明题，淡化几何证明的技巧，降低论证过程形式化的要求和证明的难度，将逻辑证明的重点放在体会证明的必要性、理解证明的基本过程、掌握用综合法证明的格式以及初步感受公理化思想上，加强合情推理，强调几何直观与理性精神。

7. 力求适应《全日制义务教育数学课程标准》和《普通高中数学课程标准》的要求，摒弃将几何论证作为重点和片面追求纯粹几何证明的技巧与难度，注意用其他变换方法来证题；对于几何论证部分按论证方法来分类。

8. 重视解析几何法、面积法，强调知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观“三维”目标达成的要求，以提高学生走向教学岗位后的适应能力为目的。

本书既可作为高等师范院校数学教育专业本科、专科《初等几何研究》的教材，也可作为中学数学教师继续教育以及其他各级、各类数学教育教学工作者的教学科研参考书。

本书内容虽然经过各编委多次讨论、审阅、修改，但由于编者的水平有限，不妥之处仍然会存在，希望广大同行和读者给予批评指正。

编　者

2012年12月

【目 录】

第1章 漫谈初等几何的发展

1.1 初等几何的发展史

几何学是一门古老而实用的科学，是自然科学的重要组成部分.在数学史上，几何学的确立和统一经历了两千多年，几百位数学家为此作出了不懈的努力.

几何学的发展历经4个基本阶段：

1.1.1 经验事实的积累和初步整理阶段

几何学是从制造器皿、测量容器、丈量土地等实际问题中产生和发起来的.

早在几十万年以前，当原始人类为了采集食物而用石块制作简单的武器和工具时，就已经开始出现形的观念.这些石器往往被做成较为规则的几何形状，反映出当时人们的头脑中已初步确立了一些几何图形的形象.例如，在北京西南周口店的猿人遗址中，发现了五十万年前制作的石器，其中的石刀、石斧等每一个面都近似平面，尖状器的尖角近似于锥体.在山西省襄汾县丁村发现了几万年前原始人用石块制成的球形工具.原始人类还知道如何美化生活，创造了石像和绘画等艺术形式.在法国和西班牙发现了一万五千年前的地穴里的绘画.原始艺术的出现，反映出人们已能把简单的图形组合成复杂的形状，来表达某种内容，获得美的享受.

大约在一万年以前，覆盖在欧亚大陆的冰块开始融化，地面露出大片森林和沙漠，以打猎和捕鱼为生的流动人群，大部分定居务农，开始了新石器时代，出现了陶器、木器和纺织品，发明了轮子.产品的几何形状更加准确和精致，并且常用各种几何形状图案加以装饰.产品的形状和装饰图案倾向于对称，很多陶器做成旋转体的形状，在装饰图案中出现平行线、相交线、垂直线，甚至还有球面上的大圆，以及全等三角形和相似形.

生产的进一步发展，使人们不仅关心物体的形状，而且对大小有具体的要求，这就需要测量长度和容积，丈量土地，并且进行有关的计算，于是就出现了一些可直接应用于计算的几何公式和定理.但是在这些公式和定理开始出现时，往往不是像我们现在这样作为重要内容单独列出来，而多半是隐含在一些具体计算问题的解答过程中，靠我们去仔细揣摩.

古代埃及人把数学资料用墨水写在很薄的草片上，现在英国的博物馆和俄罗斯的莫斯科分别收藏了一批这样的草片，都是公元前 1700 年前后埃及人写成的，上面记载着一些数学问题和他们的解答. 通过分析解答过程，可以推断出当时是依据什么法则进行计算的. 例如，草片上记载着一个求棱台体积的问题，大意为："若有人告诉你说：有一棱台，高为 6，底为 4，顶为 2. 你就要取 4 的平方，得结果为 16. 你要把它加倍，得结果为 8. 你要取 2 的平方，得 4. 你要把 16，8 和 4 加起来，得 28. 你要取 6 的三分之一，得 2. 你取 28 的 2 倍，得 56. 你看，它等于 56. 你可以知道它是对的."这段文字叙述，如果改用现在的数学符号，可以简洁地表达成$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$. 其中 V 是四棱台的体积，棱台的两个底面是边长为 a 和 b 的正方形，棱台的高为 h，在本题中 $h=6$，$a=4$，$b=2$，这是一个完全正确的公式. 现在的中学生在高中阶段才学习棱台的体积，但是在历史上，棱台的体积计算却成为最早见于文字记载的几何内容之一.

另一方面，古代埃及人进行几何计算的法则也并不完全正确. 例如，他们在庙宇的墙上刻着一个捐给庙宇的田地表，这些田地一般有四条边，铭文中计算四边形田地面积的方法，用现在的符号可以写成：$S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$，其中 S 是四边形的面积，a 和 b 是四边形的一双对边，c 和 d 是另一双对边；对于边长为 a,b,c 的三角形田地，他们认为 $d=0$，因此 $S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c}{2}$. 这些法则即使看成近似公式，误差往往也很大. 古代巴比伦人把他们的数学资料刻成泥板的形式，现在保存的泥板中，较早的一些是公元前 2000 年前后的，大部分是公元前 600 年到公元 300 年间制成的. 这些泥板主要研究算术和代数，只在实际解决问题时搞一点几何. 他们收集了一些计算简单平面图形面积和简单立体图形体积的法则，知道了三角形的相似性，以及相似三角形的对应边成比例的性质. 在一块制作于公元前 2000 年前后的泥板上，刻着一个特别的数表，根据专家考证，表中列出了十五组勾股弦数，即满足 $a^2=b^2+c^2$ 的自然数组 a,b,c. 据此，有人认为，可能古代巴比伦人已经知道了勾股定理，甚至还可能知道了求勾股弦数的一般公式. 当然，这只是一种推测. 古代巴比伦人在几何中的图形画得并不精致，计算法则也未必正确. 他们为了解决物理问题而计算的体积，有些算对了，有些算不对.

无论从古代埃及的草片或是巴比伦的泥板，都找不到有关推理论证的记载，所采用计算几何量的法则，都是通过数字计算的具体例题表现出来的. 有些问题虽然涉及的道理比较复杂，所用的公式却完全正确；另一些问题涉及的道理相对地简单一些，所用的计算法则却未必正确. 有些法则在某种情形下比较近似，而在另一些

情形下却产生较大的误差. 把这些现象联系在一起,自然会得出一个结论:在古代的埃及和巴比伦,人们都是从社会实践过程中逐步归纳、总结出一些计算法则,用于解决当时遇到的实际计算问题,一边试算,一边改进. 如果一个法则试算的结果与实际情形相符,便认为有充分的理由继续加以采用.

在古代的中国,从现存的一些较早的数学书籍来看,几何知识的积累,也是来源于社会实践的推动. 天文观测、兴修水利、丈量土地等,都促进了几何学的发展. 在《周髀算经》《九章算术》等书中,往往是通过具体数字计算问题反映出当时人们所掌握的几何知识;后代人注释这些书时,才补出有关定理的证明. 但是中国古代的数学有着自己的特点. 大约公元前 2 世纪成书的《周髀算经》中,在进行具体数字计算的同时,还明确地叙述出在直角三角形中求斜边长的一般方法:"勾,股各自乘,并而开方除之."用现在的符号写出来,就是 $c=\sqrt{a^2+b^2}$,其中 a 和 b 是两条直角边的长度,c 是斜边长. 生活在公元前四五世纪的墨子,在他的著作《墨经》中,甚至试图对一些几何概念给出逻辑的定义. 其中,关于两线段相等,线段的中点,圆周等概念的定义,既清晰,又确切. 例如,关于圆周的定义是这样的:"圜一中同长也."

"圜"就是圆周. 上面这句话,翻译成现代语言,意思就是:圆周就是到一个中心点有相等距离的点所构成的图形.

《墨经》中还叙述了一个重要命题,"穷,或有前不容尺也",意思是:用一条线段去度量另一条线段,总有量到不能够继续往前量的时候. 这里的:"尺"是《墨经》中对线段概念采用的术语. 两千多年以后,德国数学家希尔伯特提出的一套几何学公理体系中,有一条阿基米德公理,与《墨经》中上述命题完全相同.

《墨经》和《周髀算经》中这些一般性叙述,表明我国至少在公元前五世纪以后,就已经开始对几何学中某些关于共性的问题产生兴趣,不再局限于对具体几何计算问题的逐个讨论. 造成这种转变的原因,可能是我国在春秋战国时代社会剧烈变动,诸子百家各树一帜,各个学派为了发展自己的学说,纷纷从社会实践中观察,对了解到的大量现象进行深入的思考、分析,研究事物的内在客观规律,从感性认识上升到理性认识.

1.1.2 理论几何的形成和发展

对几何学进行全面而深刻的研究,使之发展成为一门独立的理论学科,这一历史性的转变,是在古代希腊完成的. 从公元前 6 世纪开始,古代希腊人在丰富的经验和材料的基础上,比较重视在形式逻辑的体系下去揭示这些几何事实存在的联系. 这项工作最后在公元前 3 世纪由欧几里得完成. 他在前人整理的基础上,加以提炼和系统化,写成了《几何原本》(简称《原本》).

《几何原本》是几何学史上的一个里程碑. 自《几何原本》问世以来，两千多年间，已发行一千多种版本. 很多国家的中学平面几何和立体几何课本，至今仍是按照《几何原本》定下的基调编写的.

1.1.3 解析几何的产生和发展

几何学发展第三阶段的重要的标志是解析几何的产生与发展. 解析几何的诞生是数学史上的一个伟大的里程碑. 它的创始人是 17 世纪法国的数学家笛卡尔(Descartes，1596—1650)和费马(Fermat，1601—1655)，他们都对欧氏几何和代数的局限性提出了挑战：欧氏几何过于抽象，过多地依赖于图形，而代数又过于受法则和公式的约束，缺乏直观. 同时，笛卡尔和费马认识到几何学提供了有关真实世界的知识和真理，而代数学能用来对抽象的未知量进行推理，是一门潜在的方法科学. 因此，把代数学和几何学中的精华结合起来，取长补短，一门新的学科——解析几何诞生了. 解析几何的基本思想是用代数的方法研究几何学，从而把空间的论证推进到可以进行计算的数量层面，对空间的几何结构代数化，用一个基本几何量和它的运算来描述空间的结构. 这个基本几何量就是向量，基本运算是指向量的加、减、数乘、内积和外积. 向量的运算是几何基本性质的代数化. 费马和笛卡尔研究解析几何的方法是不同的，费马是从方程出发来研究它的轨迹，而笛卡尔是从轨迹出发建立它的方程. 这正是解析几何中一个问题的正反两个方面的提法，但各有侧重，费马是从代数到几何，而笛卡尔是从几何到代数. 从历史发展来看，笛卡尔系统地总结出用数对表示点的位置的方法，建立了笛卡尔直角坐标系，从而拓广了几何学的研究内容，使圆锥曲线等图形也成为几何学的研究对象. 特别是研究几何的方法从单纯地强调逻辑方法，到强调逻辑和代数方法并重，从而促进了几何学的进一步发展，因此，笛卡尔的解析几何更具有突破性.

1.1.4 现代几何的发展

在初等几何和解析几何的发展过程中，人们不断发现欧几里得的《几何原本》在逻辑上有不够严密之处，并不断地充实了一些公理. 特别是尝试去证明第五公设的失败，促使人们重新考察几何学的逻辑基础，并取得了两方面的成果. 一方面从改变几何的公理系统，即用和欧几里得的第五公设相矛盾的命题来代替第五公设，从而导致几何学研究对象的根本突破. 先后由高斯，J. 波约伊和罗巴切夫斯基建立起罗氏几何，以后又有了黎曼几何. 另一方面，由对公理系统的严格分析，最后形成了公理法，并在 1899 年由德国数学家希尔伯特在他的《几何基础》中完善地建立起欧几里得几何的严格公理系统.

研究对象和方法的拓广，使现代几何以空前的速度发展.

1.2 欧几里得和《几何原本》

1.2.1 欧几里得 (Euclid) 生平

欧几里得大约生活在公元前 330—前 275 年. 除《几何原本》外,还有不少著作,如《已知数》《纠错集》《圆锥曲线论》《曲面轨迹》《观测天文学》等. 遗憾的是,除了《几何原本》以外,其他的都没有留存下来,消失在时空的黑暗之中了. 从某个意义上说,这增加了人类的遗憾. 仅留世的《几何原本》,已让我们震撼了两千余年.

关于欧几里得的生平已经失传,据后世推断,他早年在雅典受教育,熟知柏拉图的学说. 公元前 300 年左右,受托勒密王之邀,他前往埃及统治下的亚历山大城工作,长期从事教学、研究和著述,涉猎数学、天文、光学和音乐等诸多领域. 所著《几何原本》,共有 13 卷,希腊文原稿也已失传,现存的是公元 4 世纪末西翁的修订本和 18 世纪在梵蒂冈图书馆发现的希腊文手抄原本. 这部西方世界现存最古老的科学著作,为两千年来公理法演绎的数学体系找到了源头. 德摩根曾说,除了《圣经》,再没有任何一种书像《几何原本》这样拥有如此众多的读者,被译成如此多种的语言. 从 1482 年到 19 世纪末,《几何原本》的各种版本竟用各种语言出了 1 000 版以上. 明朝万历年间(1607 年),徐光启和意大利传教士利玛窦把前六卷译成中文出版,定名为《几何原本》. "几何"这个数学名词就是这样来的.《几何原本》同时也是中国近代翻译的第一部数学著作. 康熙皇帝将这个仅有前六卷的版本书当成智力玩具把玩了一生,但估计其理解也十分有限.《几何原本》后九卷是在 1852—1859 年由清朝著名的数学家、天文学家、翻译家和教育家李善兰在上海墨海书馆与英国传教士、汉学家伟烈亚力等人合作翻译出版的.

古籍中记载了两则故事:托勒密国王问欧几里得,有没有学习几何学的捷径. 欧几里得答道:"几何无王者之道."意思是,在几何学里没有专门为国王铺设的大路. 这句话成为千古传诵的箴言. 另一个故事说:一个学生才开始学习第一命题,就问学了几何后将得到什么. 欧几里得对身边的侍从说:"给他三个钱币,因为他想在学习中获取实利."这两则故事,与他的光辉著作一样,具有高深的含义.

1.2.2 《几何原本》的贡献

《几何原本》是古希腊数学家欧几里得的一部不朽之作,它把整个古希腊数学的成果与精神集于一身,既是数学巨著,也是哲学巨著,并且第一次完成了人类对空间的认识. 该书自问世之日起,在长达两千多年的时间里,历经多次翻译和修订,自 1482 年第一个印刷本出版,至今已有一千多种不同版本. 除《圣经》外,没有任何

其他著作,其研究、使用和传播之广泛能够与《几何原本》相比.

徐光启在译此作时,对该书有极高的评价,他说:"能精此书者,无一事不可精;好学此书者,无一事不科学."现代科学的奠基者爱因斯坦更是认为:如果欧几里得的《几何原本》未能激发起你少年时代的科学热情,那你肯定不会是一个天才的科学家.由此可见,《几何原本》对人们理性推演能力的影响,即对人的科学思想的影响是何等巨大.

《几何原本》从少量"自明的"定义、公理出发,利用逻辑推理的方法,推演出整个几何体系.它成为人类文明的一块极致瑰宝,创造了人类认识宇宙空间,认识宇宙数量关系的源头,是一部历史上的科学杰作.虽然逻辑并不是欧几里得开创的——逻辑以另一个希腊天才亚里士多德为代表,他的著名的三段论,开创了逻辑的基本面貌,提出了逻辑的基本建构——但他是第一个将三段论应用于实际知识体系构建的人,他铸造了一部完整的逻辑演绎体系,构成了希腊理性最完美的纪念碑.

两千年来,所有初等几何教学以及19世纪以前一切有关初等几何的论著,都以《几何原本》为依据.欧几里得成了几何学的代名词,人们把这种体系的几何学叫作欧几里得几何学.

《几何原本》对世界数学的贡献主要是:确立了数学的基本方法学;建立了公理演绎体系,即用公理、公设和定义的推证方法;将逻辑证明系统地引入数学中;确立了逻辑学的基本方法;创造了几何证明的方法:分析综合及归谬法.

相对《几何原本》中的几何知识而言,它所蕴含的方法论意义更重大.事实上,欧几里得本人对它的几何学的实际应用并不关心,他关心的是他的几何体系内在逻辑上的严密性.《几何原本》作为文化丰碑还在于,它为人类知识的整理,系统阐述提供了一种模式.从此,人类的知识建构找到了一个有效的方法.整理为从基本概念、公理或定律出发的严密的演绎体系成为人类的梦想.斯宾诺莎的伦理学就是按这种模式阐述的,牛顿的《自然哲学的数学原理》同样如此.

1.2.3 《几何原本》介绍

在《几何原本》中,欧几里得首先给出了点、线、面、角、垂直、平行等定义,接着给出了关于几何和量的10条公理,如"凡直角都相等""整体大于部分",以及后来引起许多纷争的"平行线公理",等等.公理后面是一个一个的命题及其证明,内容丰富多彩.比如有平面作图、勾股定理、余弦定理、圆的各种性质、空间中平面和直线的垂直、平行和相交等关系、平行六面体、棱锥、棱柱、圆锥、球等问题,此外还有比例的理论,正整数的性质与分类,无理量等.公理化结构是近代数学的主要特征,而《几何原本》则是公理化结构的最早典范.欧几里得创造性地总结了他之前的古

希腊人的数学.将零散的、不连贯的数学知识整理起来,加上自己的大量创造,构建出彼此有内在联系的有机的宏伟大厦.

《几何原本》共分十三卷,有5条公设和5条公理,119个定义和465个命题,构成历史上第一个数学公理体系.

第一卷　几何基础

第二卷　几何与代数

第三卷　圆与角

第四卷　圆与正多边形

第五卷　比例

第六卷　相似

第七卷　数论(一)

第八卷　数论(二)

第九卷　数论(三)

第十卷　无理量

第十一卷　立体几何

第十二卷　立体的测量

第十三卷　建正多面体

第一卷包括三角形相等的条件,三角形边和角的关系,平行线的理论和三角形以及多边形等积的条件;第二卷主要用等积变换方法研究代数的一些结论;第三卷讲的是圆;在第四卷讨论圆内接和外切多边形;第六卷讨论相似多边形;第五卷、第七卷、第八卷、第九卷和第十卷讲授比例和算术理论(用几何方式来叙述);在最后三卷里叙述立体几何原理.

从这些内容可以看出,目前属于中学课程里的初等几何的主要内容已经完全包含在《几何原本》里了.

《几何原本》每一卷都以一些概念的定义、公设和公理为基础.第一卷是以23个定义,5条公设和5条公理开始的.

1)定义

①点是没有部分的.

②线是有长度而没有宽度的.

③线的界限是点.

④直线是这样的线,它对于它的所有各个点都有同样的位置.

⑤面是只有长度和宽度的.

⑥面的界限是线.

⑦平面是这样的面,它对于在它上面的所有直线有同样的位置.

⑧平面上的角是在一个平面内两条相交直线相互的倾斜度.

⑨当形成一个角度的两线是一直线时,那角度称为平角.

定义⑩~定义㉒是关于直角和垂线、钝角和锐角、圆、圆周和中心、直线形、三角形、四边形、等边、等腰和不等边三角形、正方形、直角三角形、菱形及其他.最后一个定义是:

㉓平行直线是在同一平面上而且尽管向两侧延长也决不相交的直线.

2)公设

①从每个点到每一个别的点必定可以引直线.

②每条直线都可以无限延长.

③以任意点做中心可以用任意半径做圆周.

④所有的直角都相等.

⑤一条直线与另外两条直线相交,同侧的内角和小于两直角时,这两条直线就在这一侧相交.

3)公理

①等于同量的量相等.

②等量加等量得到等量.

③等量减等量得到等量.

④能叠合的量相等.

⑤全部大于部分.

关于公理和公设演绎法,它的基本精神是由简单现象去证明较复杂的现象,在数学中同样也遵循这一原理.这一理论里,逻辑推理虽然至关重要,但更重要的是,我们必须接受一些简单的现象作为我们的"起点",是明显的"自明"道理,而欧几里得将这些"起点"命名为"公设"和"公理".

虽然以公理为起点演绎几何的方法并非为欧几里得首创,首创的应该是他之前的泰勒斯,但是《几何原本》中的公设和公理,却全部都由欧几里得所创造和筛选.这一天才的智慧令人叹为观止!

4)关于重要命题

《几何原本》涉及诸多重要命题,比如命题:"在直角三角形中,以斜边为边的正方形面积等于以两直角边为边的正方形面积之和."这就是著名的勾股定理.传说这一定理最早是由毕达哥拉斯证明的,但他的证明方法却没有流传下来.而《几何原本》中的证明,则可以算是现存西方最早证明勾股定理的记载.

关于命题的逻辑关系,《几何原本》中命题间的逻辑关系甚至比现代的逻辑关

系还高. 为了清晰地表明这一关系,千余年来的各种语言版本多附有数学家们对逻辑关系的注解.

1.3 几何王国的“孪生三姐妹”

1.3.1 试证第五公设的历史背景

欧几里得“第五公设”问题在几何发展中占有特殊重要的地位. 因为第五公设——平行公理,无论在词句和内容方面都比其他 4 个公设复杂得多,而且不像其他公理那么显而易见. 另一方面,由于这条公设在《几何原本》中的应用很迟,仅在第 29 命题中才应用. 所以人们一直有这样的疑问:第五公设是否可以证明? 或者能否用一条更简单、更直观的公理代替它?

两千多年来,人们总觉得,把第五公设作为公理似乎没有必要,因此试图在其他公理的基础上对它进行证明,然而一直没有成功. 很可能欧几里得自己也曾经试着证明过第五公设;欧几里得似乎尽量不用这条公设,直到在几何命题里迫切用到它的时候才不得不作为公理提出来.

对第五公设的证明尝试,尽管是失败了,但还是引出了许多正面的结果,那就是证明了各种命题间的逻辑的相关性,特别是找出了欧几里得第五公设的一串等价命题:

①通过直线外某个点只能引一条直线平行于已知直线.

②两条平行线与第三条直线相交,组成相等的同位角.

③三角形的内角和等于两个直角.

④位置在直线的同一侧而且与这条直线有同样距离的点在一条直线上.

⑤从两条平行线中一条上的点到第二条的距离都相等.

⑥有着任意大面积的三角形.

⑦存在相似三角形.

1.3.2 非欧几何的产生

人们对“第五公设”作为公设的必要性,整整打了两千多年的问号. 为了寻求真理,多少世纪以来,无数造诣良深的数学家,为尝试克服平行公理,进行了艰苦的工作,花费了大量的精力和心血,人类智慧面临着挑战. 在无数的失败和挫折面前,难免有人却步,但多数人勇往直前. 最富戏剧性的一幕是:1823 年,德国数学家高斯的挚友,匈牙利数学家 F. 波约伊,由于终生研究“第五公设”毫无所获,最后怀着沉重的心情告诫他那酷爱数学的儿子 J. 波约伊(Bolyai. J,1802—1860)不要重蹈自

己的道路,"投身于那些吞噬自己智慧、精力和心血的无底洞".然而此时的小波约伊并没有因为父亲的警告而后退.他匠心独运,从前人的无数失败中,领悟到要从逻辑上推证第五公设是不可能的.于是他大胆创新,毅然决然地把"三角形内角和等于180°"换成"三角形内角和小于180°",并以此为基石,建立起一套完整和谐、精妙无比的新几何体系.

1831年,小波约伊在他父亲的一本著作后面,以附录的方式,发表了题名为"绝对空间的科学"的富有创见性的新几何学.老波约伊对此似乎心里还不够踏实,便写信见教于老朋友高斯,高斯(Gauss,1777—1855)是当时举世公认的数学泰斗.在给老波约伊复信中,高斯称赞小波约伊"有极高的天赋",但他又说:"称赞他等于称赞我自己,令郎所采用的方法和他所获得的结果,跟我20年前的沉思相符合."高斯在信的结尾还说:"我自己的著作,虽然只有一小部分已经写好,但我本来是终生不想发表的,因为大多数人对我所讨论的问题存在偏见.现在有老朋友的儿子能够把它写下来,免得与我一同湮没,那是使我最高兴不过的了."应该说前面一段话确曾是这位数学大师的推心置腹的肺腑之言,因为早在1824年高斯就曾在给他老朋友托里努斯的信中这样写过:"三角形三内角之和小于180°,这个假定引导到特殊的,与我们完全不同的几何,我发展它本身,结果完全令人满意."但是,这时初露锋芒的小波约伊正踌躇满志,高斯的复信引起这位数坛新星的极大误解,他误认为高斯是运用他崇高的威望来夺取自己关于新几何体系的发明权,并为此痛心疾首,发誓摒弃一切数学研究,在孤独与苦闷之中,度过了他的后半生.

与此同时,在俄国的喀山升起了一颗璀璨的新星,他就是俄罗斯的天才数学家罗巴切夫斯基(Никола́й Ива́нович Лобаче́вский,英文 Nikolas lvanovich Lobachevsky,1792—1856).罗巴切夫斯基是在尝试解决欧氏第五公设问题的过程中,从失败走上他的发现之路的.罗巴切夫斯基是从1815年着手研究平行线理论的.开始他也是循着前人的思路,试图给出第五公设的证明.在保存下来的他的学生听课笔记中,就记有他在1816—1817学年度在几何教学中给出的一些证明.可是,很快他便意识到自己的证明是错误的.前人和自己的失败从反面启迪了他,使他大胆思索问题的相反提法:可能根本就不存在第五公设的证明.于是,他便调转思路,着手寻求第五公设不可证的解答.这是一个全新的,也是与传统思路完全相反的探索途径.罗巴切夫斯基正是沿着这个途径,在试证第五公设不可证的过程中发现了一个崭新的几何世界.

那么,罗巴切夫斯基是怎样证得第五公设不可证的呢?又是怎样从中发现新几何世界的呢?原来他创造性地运用了处理复杂数学问题常用的一种逻辑方法——反证法.

这种反证法的基本思想是:为证"第五公设不可证",首先对第五公设加以否